Patavina Mathesis

38ª Gara Matematica "Città di Padova"
5 aprile 2025

(1) Il PIN dello smartphone di Anna è composto da 5 cifre tutte positive. La prima è un multiplo della seconda, la terza è il numero successore della seconda, terza, quarta e quinta sono in progressione aritmetica, e la somma delle prime due è uguale alla somma delle ultime tre. Quanti tentativi dobbiamo fare per essere sicuri di aver digitato il codice esatto?
(Si ricorda che una successione finita di numeri $a_1, ..., a_n$ è in progressione aritmetica se la differenza tra ogni termine e il precedente è un numero reale costante.)

Soluzione. Dobbiamo trovare tutte le sequenze ordinate di cinque numeri naturali in $\{1, 2, ..., 9\}$ della forma

$$(na, a, a+1, a+1+b, a+1+2b)$$

con $b \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che $(n+1)a = 3(a+b+1)$.

Dato che 3 è un numero primo, deve dividere a o $n+1$. Nel primo caso, $a \in \{3, 6, 9\}$.

(a) Se $a = 3$, allora n può essere solo 1, 2 o 3. Se $n = 1$, allora si ricava che $b = -2$, ma questo è impossibile perchè $a + 1 + 2b = 0$. Se $n = 2$, allora $b = -1$ e si ottiene la soluzione $(6, 3, 4, 3, 2)$. Se $n = 3$, allora $b = 0$ e si ottiene la soluzione $(9, 3, 4, 4, 4)$.
(b) Se $a = 6$, allora $n = 1$ e $b = -3$, da cui si ottiene la soluzione $(6, 6, 7, 4, 1)$.
(c) Infine, se $a = 9$, allora $a + 1 = 10$, impossibile.

Nel secondo caso, invece, $n \in \{2, 5, 8\}$.

(a) Se $n = 2$, allora a può essere 1, 2, 3 o 4 (ma il caso $a = 3$ è stato già considerato). Nel caso in cui $a = 1$, allora $b = -1$ e $a + 1 + 2b = 0$ che non è accettabile. Se $a = 2$, allora $b = -1$ e si trova la soluzione $(4, 2, 3, 2, 1)$. Infine, se $a = 4$, allora $b = -1$ e si trova la soluzione $(8, 4, 5, 4, 3)$.
(b) Se $n = 5$, allora $a = 1$, da cui si ottiene $b = 0$ e quindi la soluzione $(5, 1, 2, 2, 2)$.
(c) Se $n = 8$, allora $a = 1$, da cui si ottiene $b = 1$ e dunque la soluzione $(8, 1, 2, 3, 4)$.

Riepilogando, le soluzioni sono: $(6, 3, 4, 3, 2)$, $(9, 3, 4, 4, 4)$, $(6, 6, 7, 4, 1)$, $(4, 2, 3, 2, 1)$, $(8, 4, 5, 4, 3)$, $(5, 1, 2, 2, 2)$ e $(8, 1, 2, 3, 4)$.

(2) Da un'urna contenente 100 palline bianche ne vengono estratte tre, che vengono colorate di rosso. Poi di queste tre, due vengono reimmesse nell'urna.

Si estraggono in seguito due palline dall'urna; poi si pesca una pallina casualmente fra le tre che sono fuori e la si reimmette nell'urna; infine si pesca una pallina dall'urna.
Qual è la probabilità che le palline che sono fuori dall'urna alla fine di questa sequenza di azioni siano tutte e tre rosse?

Soluzione. Supponiamo che le due palline rosse siano appena state reinserite nell'urna. Seguono tre azioni: A) due palline vengono estratte dall'urna. B) una pallina viene reinserita nell'urna. C) una pallina viene estratta dall'urna. Affinché a seguito di C) fuori ci siano 3 palline rosse, allora dopo la fase B) devono esserci due palline rosse fuori e una pallina rossa dentro e 97 bianche dentro l'urna. Dunque la probabilità dell'evento C_3: "dopo C) ci sono tre palline rosse fuori" è data da

$$\mathbb{P}(\mathsf{C}_3) = \frac{1}{98}\mathbb{P}(\mathsf{B}_2)$$

dove B_2: "dopo B) ci sono due palline rosse fuori". Affinché B_2 accada, deve accadere prima A_3: "Dopo A) ci sono tre palline rosse fuori" e poi che si reinserisca una pallina rossa fra queste, oppure che accada A_2: "Dopo A) ci sono due palline rosse fuori (e una bianca)" e poi che si reinserisca la pallina bianca. Dunque

$$\mathbb{P}(\mathsf{B}_2) = 1 \cdot \mathbb{P}(\mathsf{A}_3) + \frac{1}{3} \cdot \mathbb{P}(\mathsf{A}_2).$$

Ci rimane ora da calcolare $\mathbb{P}(\mathsf{A}_2)$ e $\mathbb{P}(\mathsf{A}_3)$. Il primo vale $\frac{4 \cdot 97}{99 \cdot 98}$ e il secondo è $\frac{2}{99 \cdot 98}$.
Dunque

$$\mathbb{P}(\mathsf{C}_3) = \frac{1}{98} \cdot \left(\frac{2}{99 \cdot 98} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 97}{99 \cdot 98} \right) = \frac{197}{99 \cdot 98 \cdot 49 \cdot 3}$$

(3) Dato un numero naturale n diverso da 0, sia $P(n)$ il prodotto dei suoi divisori interi positivi. Determinare quali sono gli n tali che $P(n) = n^k$ per qualche k intero.

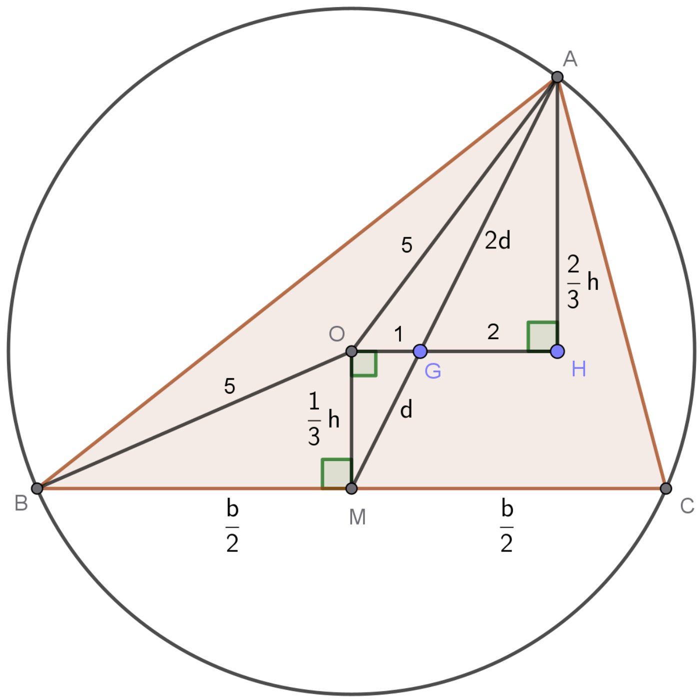
Soluzione. Sia n un numero naturale diverso da 0. Per ogni divisore intero positivo d di n minore di $\sqrt{n}$, il numero $\frac{n}{d}$ è anch'esso un divisore intero di n ed è maggiore di $\sqrt{n}$. Se n non è un quadrato perfetto, i suoi divisori interi positivi possono quindi essere organizzati in coppie del tipo d, $\frac{n}{d}$ e il prodotto di ognuna di queste coppie è n. Dato che il prodotto dei divisori interi positivi di n può essere scritto come il prodotto dei prodotti di tali coppie, si ottiene che $P(n)$ in questo caso è della forma n^k per qualche $k \in \mathbb{N}$.

Consideriamo ora il caso in cui $n = m^2$ per qualche $m \in \mathbb{N}^+$. In questo caso, resterà fuori dall'accoppiamento dei divisori il divisore m e il prodotto dei divisori $P(n)$ avrà dunque la forma $n^{k+\frac{1}{2}}$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Tale numero è una potenza intera di n se e solo se $n = 1$.

Dunque la proprietà considerata vale se e solo se n non è un quadrato perfetto oppure è uguale a 1.

(4) Un triangolo ABC è inscritto in una circonferenza di centro O e raggio 5. Inoltre, la distanza fra O e il baricentro G del triangolo è 1. Calcolare l'area del triangolo nell'ipotesi che OG sia parallelo a BC.

(Si ricorda che, per un famoso risultato di Eulero, G appartiene al segmento OH, dove H è l'ortocentro del triangolo; inoltre, $\overline{GH} = 2 \cdot \overline{OG}$.)



Soluzione. Sia M il punto medio di BC; per una nota proprietà del baricentro, si ha $\overline{AG} = 2 \cdot \overline{AG}$. Ne segue che i due triangoli GOM e GHA sono simili; quindi $\overline{AH}$ è i $\frac{2}{3}$ dell'altezza h. Dal triangolo rettangolo OHA si calcola $\overline{AH} = 4$ e quindi $h = 6$. Infine, dal triangolo BMO si ha $\overline{BM} = \sqrt{21}$. L'area misura, quindi, $6\sqrt{21}$.

(5) Giovanni estrae 4 palline da un'urna in cui ci sono 9 palline numerate da 1 a 9. Poi somma tutti i numeri di 4 cifre che possono essere scritti con le cifre estratte ottenendo un numero a. Qual è la probabilità che a abbia esattamente 24 divisori?

Soluzione. Una volta estratte le 4 cifre A, B, C, D, tra i numeri ottenuti utilizzandole ogni cifra verrà utilizzata 6 volte come cifra delle migliaia, 6 come cifra delle centinaia, 6 come cifra delle decine e 6 come cifra delle unità (6 è il numero delle permutazioni delle altre 3 cifre che devono occupare le altre posizioni decimali del numero). Pertanto la somma dei numeri considerati è uguale a $n = 6666 \cdot (A + B + C + D) = 2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 101 \cdot (A + B + C + D)$. Vogliamo che n abbia esattamente $24 = 2^3 \cdot 3$ divisori e sappiamo che esso ha almeno 4 divisori. Ricordando che il numero di divisori di un numero $p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_k^{a_k}$ scomposto in fattori primi è dato da $(a_1 + 1)(a_2 + 1)...(a_k + 1)$, l'unica possibilità nel nostro caso è che $A + B + C + D$ sia uguale a uno dei numeri primi 2, 3, 11, 101. Dato che A, B, C, D sono cifre distinte diverse da 0, la loro somma può essere solo 11, il quale può essere ottenuto solamente come somma delle cifre distinte 1, 2, 3, 5.

La probabilità richiesta è dunque

$$\frac{1}{\binom{9}{4}} = \frac{1}{126}.$$

(6) Determinare tutte le coppie ordinate di numeri interi (a, b) tali che

$$b(a^2 + a) = a^3.$$

Soluzione. Se $a \neq 0$, allora possiamo dividere per a entrambi i membri ottenendo l'equazione $b(a + 1) = a^2$. Se $a \neq -1$, possiamo dividere entrambi i membri per $a + 1$, ottenendo che $b = \frac{a^2}{a+1}$ e quindi che $\frac{a^2}{a+1}$ è intero. Ma

$$\frac{a^2}{a+1} = \frac{(a+1)^2}{a+1} - \frac{2a+1}{a+1} = a + 1 - \frac{2a+2}{a+1} + \frac{1}{a+1} = a + 1 - 2 + \frac{1}{a+1}.$$

Dunque $\frac{a^2}{a+1}$ è intero se e solo se $\frac{1}{a+1}$ lo è, cioè se e solo se $a + 1 = \pm 1$. Dato che abbiamo assunto $a \neq 0$, questo accade solo quando $a = -2$. In tal caso, $b = -4$, e la coppia $(-2, -4)$ è una soluzione dell'equazione iniziale.

Il caso $a = -1$ può essere escluso osservando che porterebbe all'uguaglianza $0 = 1$.

Se $a = 0$, invece, ogni b verifica l'equazione iniziale. Riassumento le soluzioni dell'equazione sono tutte le coppie $(0, n)$, al variare $n \in \mathbb{Z}$, sono soluzioni dell'equazione, e $(-2, -4)$.

(7) Siano a, b e c tre rette dello spazio a due a due incidenti e ortogonali fra loro; e siano A, B e C tre punti distinti sulle rette a, b e c rispettivamente. Dimostrare che il triangolo ABC non può essere ottusangolo.

Soluzione. Le tre rette a, b, c si incontrano necessariamente tutte in un solo punto O (sono disposte come i tre assi cartesiani nello spazio). Per il teorema di Pitagora:

$$AC^2 = OA^2 + OC^2$$
$$AB^2 = OA^2 + OB^2$$
$$BC^2 = OB^2 + OC^2$$

Da queste uguaglianze segue che

$$AC^2 \leq AB^2 + BC^2$$

$$BC^2 \leq AB^2 + AC^2$$

$$AB^2 \leq BC^2 + AC^2$$

e quindi che il triangolo ABC non può essere ottusangolo.

(8) Il triangolo di Tartaglia è lo schema infinito costruito come segue

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & ... & & & & \end{array}$$

dove ogni termine è ottenuto come somma dei due termini (o dell'unico termine) immediatamente sopra di esso nella riga precedente. Le righe sono numerate a partire da 0.

(a) Dimostrare che, qualsiasi sia la riga $n > 0$, la somma a segni alterni dei numeri in essa è 0.

(b) Sia $M(n)$ il numero massimo che compare nella riga n del triangolo di Tartaglia. Dimostrare che se $n \geq 4$ non tutti i numeri tra 1 e $M(n)$ compaiono nelle righe dalla 0 alla n.

Soluzione. (a) I numeri $\alpha_0, ..., \alpha_n$ nella riga n del triangolo di Tartaglia sono, nello stesso ordine, i coefficienti dello sviluppo della potenza n-esima del binomio $a + b$, cioè

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k a^k b^{n-k}$$

Ponendo $a = -1$ e $b = 1$, per $n > 0$ si ottiene che

$$0 = 0^n = (-1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - ... + (-1)^n \alpha_n.$$

(b) Gli elementi della riga n del triangolo di Tartaglia sono nell'ordine $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$,...,$\binom{n}{n}$. Se $k = 0, ..., n-1$ otteniamo che

$$\binom{n}{k+1} - \binom{n}{k} = \frac{n!(n-2k-1)}{(k+1)!(n-k)!}$$

Tale quantità è positiva quanto $k < \dfrac{n-1}{2}$ e negativa quando $k > \dfrac{n-1}{2}$. Da questo segue che nel caso di riga pari $2m$, il massimo $M(2m) = \binom{2m}{m}$, mentre nel caso di riga dispari $2m+1$, $M(2m+1) = \binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$. Per dimostrare che, per $n \geq 4$, non tutti i valori naturali positivi minori di $M(n)$ compaiono nelle prime righe, ci basta dimostrare che sia la differenza tra $M(n)$ e $M(n-1)$, che la differenza tra $M(n)$ e il secondo valore maggiore nella stessa riga sono maggiori strettamente di 1: in tal caso infatti sapremmo che $M(n) - 1$ non compare nelle prime n righe. La prima differenza è sempre maggiore strettamente di 1 per come il triangolo di Tartaglia è costruito: ogni massimo della riga n è ottenuto come somma di un massimo della riga $n-1$ e di un altro valore maggiore strettamente di 1 (quando $n \geq 4$). Per quanto riguarda l'altra differenza, nel caso pari $2m$ (con $m \geq 2$) essa è uguale a $\frac{(2m)!}{(m+1)!m!} = \frac{2m \cdot ... \cdot (m+2)}{m \cdot (m-1) ... \cdot 2}$ che è un numero maggiore strettamente di 1 e ovviamente intero. Nel caso dispari $2m+1$ essa è invece uguale a $\frac{2 \cdot (2m+1)!}{m!(m+1)!} = 2 \cdot \frac{(2m+1) \cdot ... (m+2)}{m \cdot ... \cdot 1}$ che per $m \geq 2$ è sicuramente maggiore strettamente di 1 ed è ovviamente intero.