



39^a Gara Matematica “Città di Padova”
17 aprile 2026

Soluzioni

Patavina Mathesis

- (1) Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

Calcolare il valore della somma

$$S = f\left(\frac{2026}{1}\right) + f\left(\frac{2025}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{2}{2025}\right) + f\left(\frac{1}{2026}\right).$$

Soluzione. Se $x > 0$, allora $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{x+1}$, da cui segue che

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 1.$$

Dunque

$$S = \sum_{i=1}^{2026} f\left(\frac{2027-i}{i}\right) = \sum_{i=1}^{1013} \left(f\left(\frac{2027-i}{i}\right) + f\left(\frac{i}{2027-i}\right) \right) = \sum_{i=1}^{1013} 1 = 1013.$$

- (2) Dimostrare che esistono infinite coppie di numeri interi (a, b) tali che

$$ab + b^3 = a^2.$$

Soluzione. Usando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado

$$ab + b^3 = a^2.$$

se e solo se

$$a = \frac{b \pm \sqrt{b^2 + 4b^3}}{2} = \frac{b(1 \pm \sqrt{1 + 4b})}{2}$$

Quindi se si pone $b = n^2 + n$ (con $n \in \mathbb{N}$) si ottiene una soluzione prendendo

$$a = \frac{(n^2 + n)(1 + \sqrt{1 + 4n + 4n^2})}{2} = \frac{(n^2 + n)(1 + 2n + 1)}{2} = (n^2 + n)(n + 1)$$

Abbiamo quindi individuato infinite soluzioni intere: tutte quelle della forma

$$((n^2 + n)(n + 1), n^2 + n).$$

al variare di $n \in \mathbb{N}$ (le quali sono tutte diverse tra loro).

- (3) Sia ABC un triangolo i cui angoli soddisfano $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$. Detti H e K i piedi delle altezze relative ai lati AB e BC rispettivamente, calcolare l'ampiezza (in radianti) dell'angolo convesso $K\widehat{H}C$.

Soluzione. Da $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$ si ricava $\widehat{A} = \frac{4\pi}{7}$, $\widehat{B} = \frac{2\pi}{7}$ e $\widehat{C} = \frac{\pi}{7}$; il triangolo è quindi ottusangolo in \widehat{A} . Il quadrilatero $AHCK$ ha due angoli opposti retti, quindi è ciclico (cioè inscrittibile in una circonferenza). Ne segue che l'angolo $K\widehat{H}C$ è congruente a $K\widehat{A}C$ (perché insistono sullo stesso arco), cioè a $\frac{\pi}{2} - \widehat{C} = \frac{5\pi}{14}$.

- (4) Determinare quali sono i numeri naturali che in base 10 sono palindromi di 3 cifre, e che continuano ad essere palindromi anche quando sono espressi in base 5.

Soluzione. I numeri n che in base 10 hanno tre cifre, in base 5 possono avere 3 cifre (quando $100 \leq n \leq 124$), 4 cifre (quando $125 \leq n \leq 624$) o 5 cifre (quando $625 \leq n \leq 999$). Consideriamo i tre casi separatamente:

- (a) Gli unici palindromi in base 10 minori di 125 sono 101, 111 e 121 che in base 5 diventano, rispettivamente, $(401)_5$, $(421)_5$ e $(441)_5$, nessuno dei quali è palindromo.
- (b) Supponiamo che $125 \leq n \leq 624$ sia un numero con la proprietà richiesta. Notiamo innanzitutto che la cifra delle unità in base 10 e in base 5 di un numero n devono essere congruenti modulo 5. Dunque se $n < 500$, le due cifre delle unità devono coincidere e devono coincidere anche le due cifre più alte in entrambe le rappresentazioni. Dunque n deve essere contemporaneamente uguale a $100a + 10b + a$ e a $125a + 25c + 5c + a$ per qualche $a \in \{1, 2, 3, 4\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ e $c \in \{0, 1, 2, 3\}$. Da questo si ottiene che

$$101a + 10b = 126a + 30c$$

da cui

$$25a = 10b - 30c \leq 90.$$

Da questo segue che $a = 2$ (perché deve essere pari e $25a \leq 90$) e di conseguenza

$$b = 5 + 3c$$

che vale solo per le coppie $(b, c) = (5, 0), (8, 1)$ che ci danno le soluzioni $n = 252 = (2002)_5$ e $n = 282 = (2112)_5$.

Considerando ora il caso $n \geq 500$, n non può avere come cifra più alta (e quindi come cifra delle unità) 5 altrimenti il numero in base 5 dovrebbe avere 0 come cifra delle unità (impossibile dato che è palindromo).

Il numero n non può nemmeno avere come cifra delle centinaia (e delle unità) 6 altrimenti in base 5 dovrebbe avere cifra più alta 1 e dunque dovrebbe essere minore o uguale a $(1441)_5 = 246$, assurdo.

- (c) Se $625 \leq n \leq 999$, allora la sua cifra più alta in base 5 deve essere necessariamente 1, dato che $625 \cdot 2 > 999$. Se in base 5 esso è palindromo, anche la cifra delle unità deve essere 1. Dato che le cifra delle unità in base 10 e in base 5 devono essere congruenti (modulo 5), n deve essere palindromo in base 10 e $n \geq 625$, sappiamo che la cifra delle unità e delle centinaia di n devono essere uguali a 6. Pertanto $626 \leq n \leq 696$. Questo significa che la seconda cifra più alta di n in base 5 deve essere 0 e la terza cifra può essere solo 0, 1 o 2. Ora, $(10001)_5 = 626$, $(10101)_5 = 651$ e $(10201)_5 = 676$. Abbiamo quindi trovato due soluzioni: $n = 626$ e $n = 676$.

Riepilogando, le soluzioni sono $n = 252, 282, 626, 676$.

- (5) Dire quante sono le stringhe costituite da 8 caratteri che soddisfano queste proprietà:
- ogni carattere è una vocale della lingua italiana;
 - ogni carattere dal quarto in poi è diverso dai tre precedenti.

Soluzione. Cominciamo a contare in quanti modi possiamo costruire una stringa con le caratteristiche richieste partendo da destra. L'ultimo carattere può essere una qualsiasi delle 5 vocali. Ora, il settimo carattere, per costruzione, deve essere diverso dall'ottavo, quindi può essere scelto in 4 modi diversi. Il sesto, invece, deve essere diverso dal settimo e dall'ottavo (che sono diversi tra loro), quindi può essere scelto in 3 modi diversi. Il quinto carattere deve essere diverso dal sesto, dal settimo e dall'ottavo (che sono tutti diversi tra loro), quindi può essere scelto in soli 2 modi. Il quarto carattere, che deve essere diverso dal quinto, dal sesto e dal settimo (che sono tutti e tre diversi tra loro), può essere scelto anch'esso in soli 2 modi. Lo stesso vale per il terzo carattere che può essere scelto anch'esso in soli 2 modi. Il secondo carattere invece deve essere diverso solo dal quarto e dal quinto, quindi può essere scelto in 3 modi, mentre il primo carattere deve essere diverso solo dal quarto e quindi può essere scelto in 4 modi.

Quindi le stringhe sono in tutto:

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 5760.$$

- (6) I cavalieri sono persone che dicono sempre la verità. I furfanti sono persone che dicono sempre il falso. C'è una fila di 10 cavalieri e furfanti numerati da 1 a 10. Sia b un numero intero fissato (per tutti). La persona al posto i dice che ci sono $2i + b$ cavalieri. Quali sono i valori di b per cui tale situazione non è possibile?

Soluzione. Innanzitutto possiamo notare che dato che le persone dicono tutte cose diverse, al massimo uno di loro può essere cavaliere. Quando nessuno dice che ci sono 0 cavalieri, lo scenario è perfettamente coerente con l'assenza di cavalieri. Dobbiamo quindi considerare solamente i casi in cui qualcuno dica che ci sono 0

cavalieri (ovvero i casi in cui $b \in \{-20, -18, -16, -14, -12, -10, -8, -6, -4, -2\}$). In questi casi i personaggi non possono essere tutti furfanti, altrimenti uno di loro direbbe il vero. Ma non può nemmeno esserci esattamente un cavaliere tra loro, altrimenti egli direbbe il falso dato che ogni persona in questi casi dice che il numero di cavalieri è un certo numero pari. Pertanto, questi sono i valori di b cercati.

- (7) Si consideri la famosa successione di stringhe $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la cui prima α_0 è (1), la seconda α_1 è (1, 1) (un 1), la terza α_2 è (2, 1) (due 1), la quarta α_3 è (1, 2, 1, 1) (un 2, un 1), la quinta α_4 è (1, 1, 1, 2, 2, 1) (un 1, un 2, due 1) ... seguendo sempre la regola di elencare al passo $n + 1$ -esimo in successione quanti caratteri di un certo tipo consecutivi si trovano nella stringa al passo n .
- Si dimostri che ogni sequenza α_i contiene solo i numeri 1, 2 e 3;
 - Si dimostri che in ogni sequenza α_i non ci sono mai tre 3 consecutivi.
 - Si dimostri che ogni α_i finisce con esattamente un 1 o con esattamente due 1.
 - Si dimostri che $\ell(\alpha_{n+1}) \geq \ell(\alpha_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove ℓ indica la lunghezza della stringa.

Soluzione.

- Supponiamo che ad un certo punto nella successione compaia un $n > 3$ e sia \bar{i} il più piccolo numero naturale tale che n compaia nella stringa $\alpha_{\bar{i}}$. Sicuramente $\bar{i} \neq 0, 1$. Dato che n non compare nella stringa precedente, n deve necessariamente indicare il numero di volte consecutive in cui un certo a si ripete in $\alpha_{\bar{i}-1}$. Quindi in $\alpha_{\bar{i}-1}$ ci sono almeno quattro a consecutivi. Questo è impossibile perché vorrebbe dire che in $\alpha_{\bar{i}-2}$ avremmo contato un gruppo di a consecutive come due gruppi di a distinti. Assurdo.
- Supponiamo che ad un certo punto nella successione α_i con $i > 0$ compaia un gruppo di tre 3 consecutivi. L'unico modo di "leggere" i tre 3 consecutivi è "tre 3, tre", altrimenti avremmo considerato un gruppo di 3 consecutivi della stringa precedente come due gruppi. Questo significa in particolare che nella stringa precedente ci sono tre 3 consecutivi. Dunque abbiamo dimostrato che, qualsiasi sia $n > 0$, se α_n contiene tre 3 consecutivi, allora α_{n-1} ha la stessa proprietà. Dunque se ad un certo punto della successione comparissero tre 3 consecutivi, essi dovrebbero comparire anche in α_0 , cosa che non succede. Quindi in nessuna stringa della successione ci sono tre 3 consecutivi.
- Per induzione dimostriamo che ogni stringa nella successione finisce con esattamente un 1 o con esattamente due 1. Questo è vero per α_0 . Supponiamo che valga per n . Se α_n finisce con esattamente un 1, allora α_{n+1} finirà con esattamente due 1 ("un 1"), mentre se α_n finisce con esattamente due 1, allora α_{n+1} finirà con un 2 seguito da un 1 ("due 1"), dunque con esattamente un 1.
- Per quanto dimostrato precedentemente, per ogni n , in α_n , possiamo trovare solo gruppi di 1, 2 o 3 numeri uguali consecutivi. Se indichiamo con N_1^n , N_2^n e N_3^n il numero di tali gruppetti in α_n , abbiamo che $\ell(\alpha_n) = N_1^n + 2N_2^n + 3N_3^n$,

mentre $\ell(\alpha_{n+1}) = 2(N_1^n + N_2^n + N_3^n)$. Da questo segue che

$$\ell(\alpha_{n+1}) - \ell(\alpha_n) = N_1^n - N_3^n$$

pertanto per concludere dobbiamo dimostrare che $N_3^n \leq N_1^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Facciamo le seguenti osservazioni:

- (i) In una stringa α_n con $n > 0$ due gruppi lunghi 3 di numeri uguali consecutivi non possono essere divisi da un numero pari di numeri. Se infatti ci fosse una sottostringa di α_n della forma $(a, a, a, x_1, \dots, x_{2n}, b, b, b)$ essendo i primi quattro elementi necessariamente da leggere come “un numero a di a e un numero a di x_1 ”, avremmo che dovremmo pure leggere gli ultimi quattro come “un numero x_{2n} di b e un numero b di b ”: assurdo. Dunque tra ogni coppia di triplete di numeri uguali consecutive deve esserci almeno un gruppo composto di un singolo numero.
- (ii) Dopo l’ultimo gruppo di 3 numeri uguali che compare nella stringa non può esserci un numero pari di elementi. Se infatti avessimo come parte finale della stringa $(a, a, a, x_1, \dots, x_{2n})$ questo vorrebbe dire che staremmo contando un solo gruppo di a consecutivi come due gruppi: assurdo. Questo significa che dopo l’ultimo gruppo di 3 numeri uguali c’è almeno un gruppetto fatto da un solo numero.

Da queste due osservazioni segue che in ogni stringa α_n con $n > 0$, $N_3^n \leq N_1^n$. Per la stringa α_0 questo è banalmente vero.

Abbiamo dunque concluso.

- (e) Sia D un punto interno al lato AC di un triangolo ABC , e sia E l’intersezione fra il lato AB e la retta per D parallela a BC . Dimostrare che le rette uscenti da A e tangenti alla circonferenza di centro E e raggio ED sono anche tangenti alla circonferenza di centro B e raggio BC .

Determinare la posizione del punto D per cui le due circonferenze risultano tangenti (calcolare la distanza \overline{AD} in funzione delle misure dei lati del triangolo).

Per le posizioni di D per cui le due circonferenze sono esterne, sia F il punto, interno al lato AB , da cui passano le tangenti comuni alle due circonferenze diverse da quelle uscenti da A . Determinare la distanza \overline{AF} in funzione delle misure dei lati del triangolo.

Soluzione. Siano $a := \overline{BC}$, $b := \overline{CA}$ e $c := \overline{AB}$; allora, per similitudine, $\overline{ED} = ka$, $\overline{AD} = kb$ e $\overline{AE} = ka$ per qualche $0 < k < 1$.

Affinché A non sia interno alla circonferenza di centro E passante per D (altrimenti non ci sono tangenti uscenti da A e non c’è nulla da dimostrare!) deve essere $\overline{AE} \geq \overline{DE}$, cioè (per similitudine) $c \geq a$, fatto che supporremo in tutta la soluzione. [In realtà, il caso limite $c = a$ si potrebbe trattare a parte: corrisponde ad avere le due circonferenze tangenti internamente in A .]

Consideriamo l'omotetia η di centro A e scalare $\frac{1}{k}$; essa fissa A e manda la circonferenza di centro E passante per D nella circonferenza di centro B passante per C . Quindi η deve anche mandare le tangenti per A alla prima circonferenza nelle tangenti per A alla seconda circonferenza; dal fatto che le rette per A sono fissate da η segue che le tangenti alle due circonferenze coincidono.

Le due circonferenze sono tangenti esternamente quando $\overline{EB} = \overline{ED} + \overline{BC}$ (la distanza fra centri è uguale alla somma dei raggi). Ma $\overline{EB} = \overline{AB} - \overline{AE} = c - kc$; ne segue che $k = \frac{c-a}{c+a}$ e quindi $\overline{AD} = b \cdot \frac{c-a}{c+a}$. [Le due circonferenze sono tangenti internamente quando $\overline{EB} = \overline{BC} - \overline{ED}$, cioè $(1-k)c = (1-k)a$; questo vale sempre nel caso $c = a$ e vale solo se $k = 1$, cioè se le due circonferenze coincidono, negli altri casi.]

Supposto ora $\overline{AD} < b \frac{c-a}{c+a}$, cioè $k < \frac{c-a}{c+a}$, il punto F deve essere il centro di un'altra omotetia che manda il cerchio di centro E passante per D nel cerchio di centro B passante per C . Ne segue che $\frac{\overline{EF}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{ED}}{a} = k$. Inoltre $\overline{EF} + \overline{FB} = \overline{EB} = (1-k)c$; quindi $\overline{EF} = k \frac{1-k}{1+k} c$. Allora $\overline{AF} = \overline{AE} + \overline{EF} = \frac{2k}{1+k} c$. [Non dipende da a e b , ma solo da c e dal fattore di scala k (quindi, ad esempio, dalla posizione di D relativamente al segmento AC).]