21ª GARA MATEMATICA CITTÀ DI PADOVA"
25 MARZO 2006

SOLUZIONI DEI QUESITI

1.- L'ipotesi equivale a $n = 2a^2 = 3b^3$ per opportuni *a, b* naturali.
Consideriamo i fattori primi di *n*, ciascuno con la sua molteplicità, che è il numero di volte in cui esso compare nella fattorizzazione di *n*.
La molteplicità del fattore 2 dev'essere un numero dispari (perché $n = 2a^2$) e anche un multiplo di 3 (perché $n = 3b^3$) ; quindi uno dei numeri : 3, 9, 15, ... , 3 + 6i, ...
Analogamente la molteplicità del fattore 3 dev'essere un numero pari del tipo 1 + 3k, quindi uno dei numeri : 4, 10, 16, ... , 4 + 6j, ...
Per ogni altro fattore primo $p \neq 2, 3$ la molteplicità dev'essere un multiplo pari di 3, quindi : 0, 6, 12, ... , 6h, ...
Queste condizioni sono anche sufficienti, perciò la soluzione generale è :

$$n = 2^{3+6i} \cdot 3^{4+6j} \cdot p^{6h} \cdot ..$$

ossia (applicando proprietà note) : $n = 2^3 \cdot 3^4 \cdot z^6$ con z = 1, 2, 3, ...
Tra questi numeri i due più piccoli si hanno per z = 1 e z = 2 :
$2^3 \cdot 3^4 = 648$ e $2^9 \cdot 3^4 = 648 \cdot 2^6$ (= 41472) .

2.-

Se P fosse situato prima di A si avrebbe, detta x la sua distanza da A, la seguente equazione :

$$x + (x + 10) + (x + 10 + 25) + (x + 10 + 25 + 5) + (x + 10 + 25 + 5 + 15) = 87$$
$$5x + 140 = 87$$

ma x dev'essere positiva, dunque equazione senza soluzione.

Se P fosse situato tra A e B, detta questa volta x la sua distanza da B si avrebbe la seguente :

$$10 + (x + 25) + (x + 25 + 5) + (x + 25 + 5 + 15) = 87$$
$$3x + 110 = 87$$

ancora una volta manifestamente impossibile [il primo addendo è 10 = PA+PB] .

Se P viene situato tra B e C, detta questa volta x la sua distanza da C si avrebbe la seguente :

$$25 + 40 + (x + 5 + 15) = 87$$
$$x + 85 = 87$$

che ha per soluzione x = 2 [25 = PB+PC , 40 = PA+PD] .

Se P viene situato tra C e D , detta questa volta y la sua distanza da D si avrebbe la seguente :
$5 + 45 + (5 - y + 25 + 10) = 87$
$90 - y = 87$
che ha per soluzione y = 3 che rappresenta la distanza PD, ma allora PC = 2.

Procedendo in modo analogo si trova che P non può trovarsi tra D ed E, né essere situato alla destra di quest'ultimo.
In ogni caso P si trova a 2 Km dalla stazione C .

3.- Calcoliamo i primi (quattro) termini della successione :

$$s_0 = 3,\ s_1 = 3,\ s_2 = 6,\ s_3 = 18,\ s_4 = 72\ .$$

Osserviamo che non solo ogni termine divide il successivo, ma anche che il quoziente è uguale all'indice di quest'ultimo : $n \cdot s_{n-1} = s_n$, quando n = 1, 2, 3, 4 .

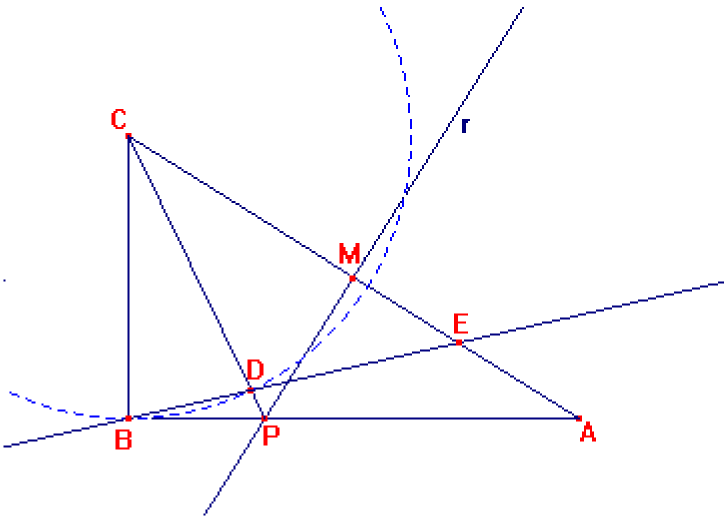
Vogliamo ora mostrare che questa proprietà vale per ogni n procedendo *per induzione* :
- la proprietà è vera per n = 1;
- sia n > 1, supponiamo che la proprietà valga quando l'indice vale n – 1 e verifichiamo che in tal caso risulta vera anche per l'indice uguale a n :
  $s_{n+1} = n \cdot (s_n + s_{n-1}) = n \cdot s_n + n \cdot s_{n-1} =$ [per l'ipotesi induttiva] $= n \cdot s_n + s_n = (n+1) \cdot s_n$.

4.- Osserviamo che se $2^x = 3$, allora $2 = 3^{1/x}$; ne segue che $\log_3 2 = 1/\log_2 3$.
Inoltre $\log_2 3 > 0$ poiché 3 > 1, ed è ≠ 1 poiché 3 ≠ 2.

Verifichiamo ora che se y > 0 e y ≠ 1, allora $y + \dfrac{1}{y} > 2$.

Infatti moltiplicando per y (che è > 0) si ottiene la disuguaglianza equivalente :
$y^2 - 2y + 1 > 0$, equivalente alla $(y-1)^2 > 0$, verificata per ogni y ≠ 1 .
La risposta al quesito è affermativa.

5.-



Il triangolo APC è isoscele poiché P appartiene all'asse r del segmento AC, quindi l'angolo PAC è uguale all'angolo PCA (chiamiamolo α).
L'angolo PBD è angolo alla circonferenza relativo all'arco BD del circolo di centro C, cosicché DCB = 2 · PBD (e detto PBD = β), risulta DCB = 2 · β.

Essendo ABC un triangolo rettangolo in B, si ha che la somma dei suoi angoli in A e in C è uguale a 90°, cioè α + (α + 2 · β) = 90° e quindi α + β = 45°.
Ma l'angolo BEC è angolo esterno del triangolo AEB ed è dunque uguale alla somma degli angoli in A e in B di tale triangolo : BEC = α + β = 45° e l'angolo formato dalle rette BD e AC risulta perciò la metà di un angolo retto .

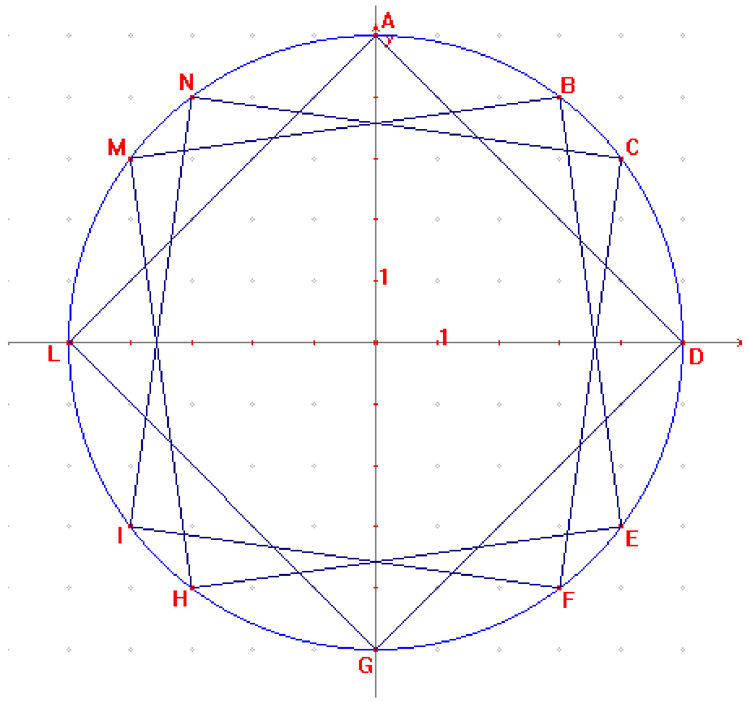
6.- a) Il più grande di tali numeri è 123456789, perciò essi sono in numero finito.
Osserviamo che se si conoscono le cifre usate per scrivere uno di tali numeri si conosce il numero stesso poiché c'è un unico modo per disporle in ordine crescente.
Ma allora tali numeri sono tanti quanti i sottoinsiemi dell'insieme { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }, cioè proprio 2^9.
Può esserci qualche perplessità su quale numero associare al sottoinsieme vuoto, ma ad esso associamo il numero 0 (le cui cifre sono in ordine crescente così come lo sono, per esempio, per il numero 4) .
Se non si vuol considerare 0 come numero naturale, allora i numeri richiesti risultano $2^9 - 1$.

b) Fra questi numeri quelli che non contengono lo 0, per quanto detto prima, sono tanti quanti i sottoinsiemi di 5 oggetti presi da un insieme di 9 oggetti, cioè $\binom{9}{5}$.

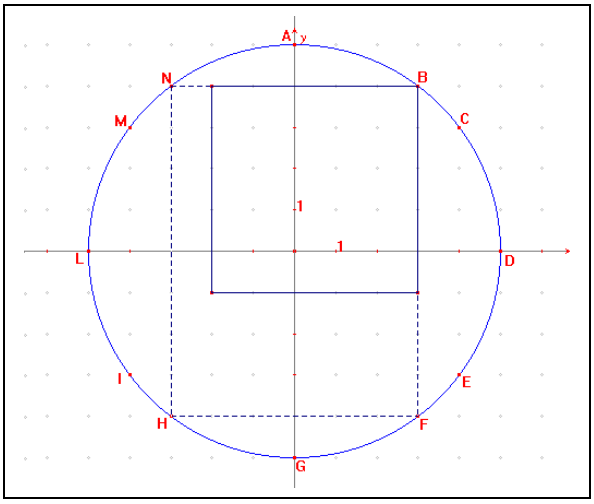
Per quelli che contengono lo 0 possiamo procedere così : dapprima scegliamo le quattro cifre diverse da 0 [e questo lo possiamo fare in $\binom{9}{4}$ modi] , poi per ciascuno di questi numeri abbiamo quattro modi di inserire lo 0 [al secondo, al terzo, al quarto o all'ultimo posto], ottenendo, in quest'ultimo caso, $4 \cdot \binom{9}{4}$ numeri.

In totale : $\binom{9}{5} + 4 \cdot \binom{9}{4} = 5 \cdot \binom{9}{5}$, poiché $\binom{9}{4} = \binom{9}{5}$.

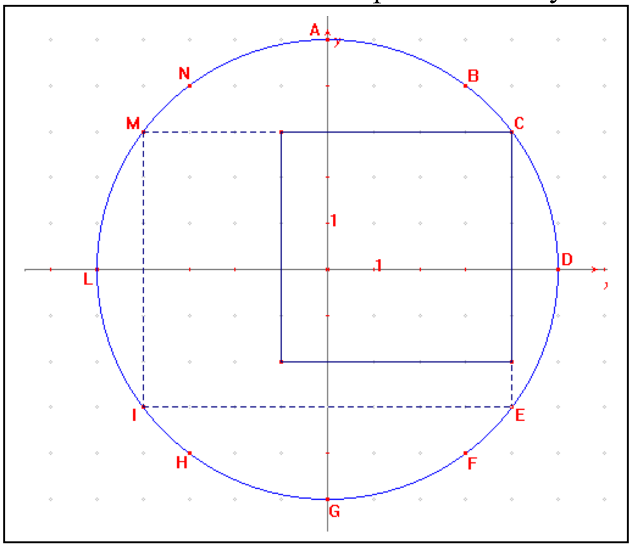
7.- Il cerchio è costituito dai punti che hanno coordinate soddisfacenti la condizione $x^2 + y^2 \le 25$.
I punti a coordinate intere del bordo sono : A(0, 5), B(3, 4), C(4, 3), D(5, 0), E(4, -3), F(3, -4), G(0, -5), H(-3, -4), I(-4, -3), L(-5, 0), M(-4, 3), N(-3, -4) .
Si vede allora che i tre quadrati : quello di lato AD, quello di lato BE e quello di lato CF inscritti nel circolo hanno tutti i vertici di coordinate intere e area massima perché appunto inscritti nel circolo .



Vediamo ora quanti sono i quadrati di lato uguale a 5. Contiamo dapprima quelli con un lato orizzontale :

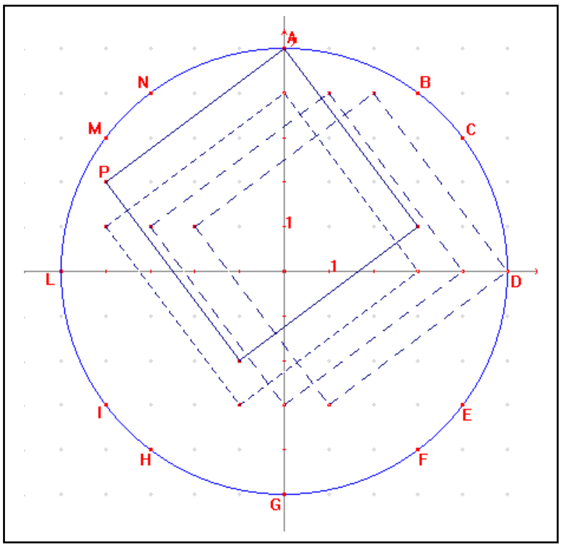


quelli contenuti nel rettangolo BFHN sono 2 col lato sul segmento NB e poi altri 6 ottenuti traslando questi di 1, 2, 3 unità verso il basso
Altri 2 con un lato su CE e i 2 simmetrici rispetto all'asse y : in totale 12 .

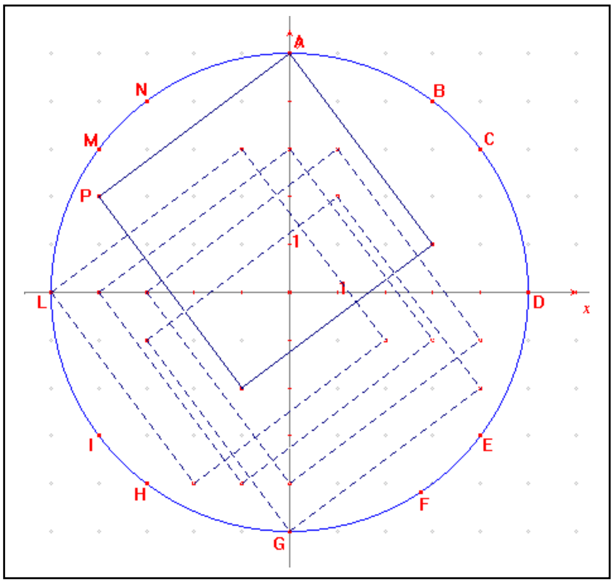


.

Ci sono poi quelli che hanno un lato parallelo alla retta di equazione $y = \frac{3}{4}x$, per esempio quello il cui lato ha per estremi A(0, 5) e P(-4, 2), infatti AP = 5. Anzi possiamo traslare questo quadrato di 1 unità verso il basso e quindi di 1 o 2 unità verso destra:

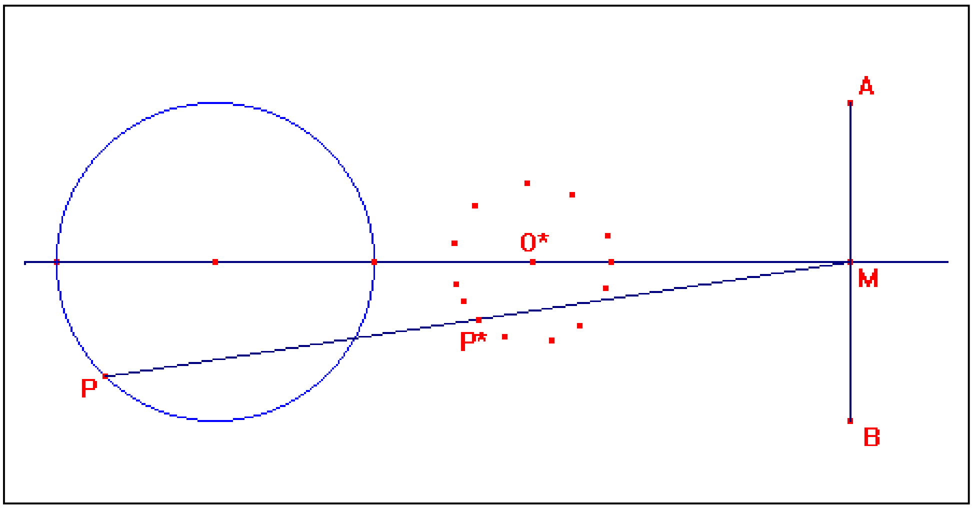


Oppure lo possiamo traslare di 2 unità verso il basso e, successivamente, di 1 unità verso sinistra odi 1 unità verso destra :



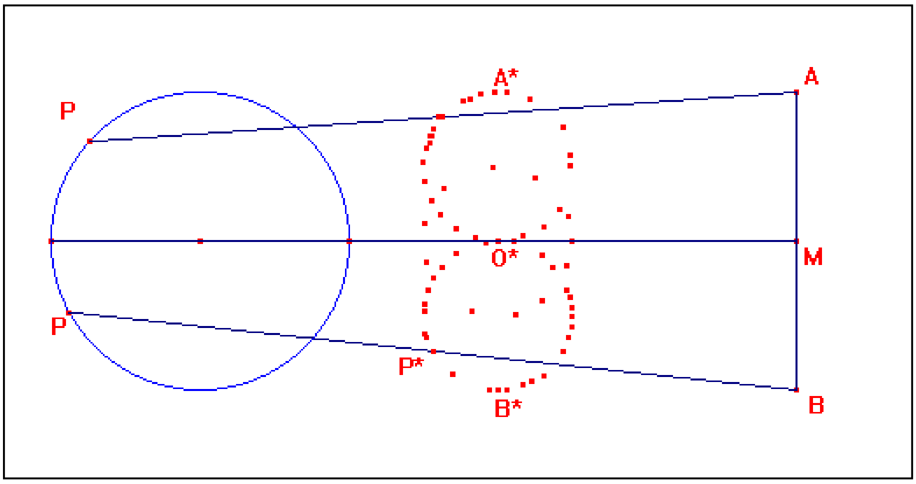
E l'ultimo di questi lo trasliamo ancora di 1 unità verso il basso. Contiamo 8 quadrati di lato 5 paralleli alla retta suddetta, ce ne son altri 8 simmetrici di questi rispetto all'asse x.
In totale quindi : 12 + 8 + 8 = 28.

8.- Troviamo dapprima il luogo dei punti medi P^* dei segmenti che hanno un estremo P sul circolo e l'altro estremo nel punto M :



Vediamo che per ogni punto P appartenente al circolo ***C*** troviamo un punto P^* che appartiene alla semiretta MP e tale che $MP^* = ½$ MP.
Ma allora P^* corrisponde a P nella omotetia di centro M e rapporto ½ e il luogo descritto da P^* è dunque un circolo di centro O^* e raggio ½ r.

Se operiamo in maniera analoga con il punto A (oppure il punto B) al posto di M, otteniamo il circolo di diametro A^*O^* (oppure B^*O^*) :



Usando poi i punti compresi tra A e B (e diversi da M) come estremi fissi dei segmenti aventi l'estremo P che descrive il circolo : otterremo come luoghi dei punti medi circoli di raggio ½ r e col diametro contenuto nel segmento A^*B^*.
Il luogo richiesto è pertanto un quadrato di lato r unito a due cerchi aventi rispettivamente per diametro due lati opposti del quadrato.