

15^a GARA MATEMATICA "CITTÀ DI PADOVA" 25 Marzo 2000

1) Una linea tranviaria ha due capolinea e 11 fermate intermedie, che suddividono la linea in tratti ciascuno di 500 metri. Una vettura tranviaria parte dal capolinea A, arriva al capolinea B, poi ritorna in A, poi va nuovamente in B, e così via. Quando ha percorso Km 46,7 a quale distanza dal capolinea A si trova ? quante volte è passata per il capolinea B ? quante volte è passata per la n-esima stazione intermedia (n-esima a partire da A) ?

2) Chiamiamo "biisoscele" un triangolo che sia scomponibile in due triangoli isosceli non degeneri. Dire quali delle seguenti proposizioni sono vere e quali false e perché :

A - Tutti i triangoli rettangoli sono biisosceli

B - Tutti i triangoli biisosceli sono rettangoli

C - Tutti i triangoli sono biisosceli

D - Il triangolo equilatero è biisoscele .

Quali triangoli isosceli sono biisosceli ?

3) Due numeri primi si dicono gemelli quando la loro differenza è 2 ; p.e. sono gemelli 11 e 13 , 17 e 19 , 29 e 31 . E' vero che 5 è l'unico primo che ha due gemelli ?

4) Dato un triangolo equilatero ABC , si considerino i rettangoli ad esso circoscritti (diremo che un rettangolo è circoscritto al triangolo ABC quando lo contiene e ogni suo lato contiene almeno uno dei punti A , B , C). Tra tali rettangoli si determini uno che abbia area massima e uno che abbia area minima.

5) Come sapete, nel gioco degli scacchi ogni "mossa" del "cavallo" consiste di due passi nella direzione di uno qualunque dei lati della scacchiera più uno nella direzione ortogonale. Se un cavallo si trova inizialmente in una delle caselle d'angolo della scacchiera, qual è il minimo numero di mosse di cui deve disporre per esser certo di poter raggiungere una qualunque altra casella ? (La scacchiera ha 8 x 8 caselle).

6) Tre rette a , b , c del piano passano per uno stesso punto O. Preso un punto P (diverso da O) si consideri il triangolo che ha per vertici i piedi A, B, C delle perpendicolari condotte da P alle rette a , b , c. Si dimostri che se si ripete la costruzione a partire da un altro punto P' si ottiene un triangolo A' B' C' simile ad A B C .

7) Un cubo di lato 1 è illuminato dal Sole .

a) Che tipi di poligoni si ottengono, su di un piano ortogonale alla direzione dei raggi solari, come ombre del cubo in corrispondenza delle sue diverse posizioni ?

b) Si verifichi che tra le ombre c'è un esagono regolare e se ne determini il lato.

8) E' vero che se i due polinomi a coefficienti reali $x^2 + ax + b$ e $x^2 + cx + d$ sono irriducibili (cioè non scomponibili nel prodotto di polinomi di primo grado a coefficienti reali) lo è anche la loro somma ?