



27ª GARA MATEMATICA “CITTÀ DI PADOVA”

31 Marzo 2012

- 1.- È vero che per ogni x intero il numero $x \cdot (x^4 - 1)$ è divisibile per 30 ?

- 2.- Si considerino due cerchi tangenti internamente in un loro punto A ed un triangolo isoscele, inscritto nel circolo maggiore, avente un vertice in A ed il lato opposto ad A tangente al circolo minore.
È vero che l'area del triangolo è uguale all'area del deltoide $AHDK$, dove AD è il diametro per A del circolo maggiore e H e K sono le ulteriori intersezioni col circolo minore dei lati del triangolo ?

- 3.- È possibile che l'ombra solare di un tetraedro (anche non regolare) su di un piano sia un quadrato ?

- 4.- Si dimostri che se una scacchiera quadrata ha un numero dispari di caselle nere, tale numero è somma di due quadrati.

- 5.- In un triangolo rettangolo ABC sia H il piede dell'altezza relativa all'ipotenusa BC . Siano O_1 ed O_2 gli incentri dei triangoli ABH e ACH . Dimostrare che la retta O_1O_2 divide ABC in due parti, di cui una è un triangolo isoscele.

- 6.- Prendiamo un mazzo di 18 carte, lo dividiamo in due mazzetti formato il primo con le prime 9 carte e il secondo con le rimanenti 9, senza alterare l'ordine delle carte; poi mescoliamo alternando una carta del primo mazzetto con una del secondo.
Ripetendo questa operazione più volte si può riottenere l'ordinamento di partenza ?
E in caso affermativo, dopo quante volte ?

- 7.- È vero che esistono infinite coppie di numeri interi positivi (a, b) tali che :
$$(a^2 + 2b^2) \cdot (ab + 1)$$
risulti un intero ?
(Sugg. : si considerino dapprima soluzioni del tipo $(0, n)$ e, per ciascuna di queste ...)

8.- Si verifichi che l'insieme delle soluzioni della disequazione :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > k > 0$$

è l'unione di tre intervalli.

Si dimostri che la somma delle misure dei tre intervalli è $3/k$.

(*Sugg. : si tracci dapprima un grafico approssimato della funzione $f(x)$ a primo membro*)