39ª Gara Matematica "Città di Padova"
17 aprile 2026

Patavina Mathesis

(1) Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x+1}.$$

Calcolare il valore della somma

$$S = f\left(\frac{2026}{1}\right) + f\left(\frac{2025}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{2}{2025}\right) + f\left(\frac{1}{2026}\right).$$

(2) Dimostrare che esistono infinite coppie di numeri interi (a, b) tali che

$$ab + b^3 = a^2.$$

(3) Sia ABC un triangolo i cui angoli soddisfano $\widehat{A} = 2\widehat{B} = 4\widehat{C}$. Detti H e K i piedi delle altezze relative ai lati AB e BC rispettivamente, calcolare l'ampiezza (in radianti) dell'angolo convesso $K\widehat{H}C$.

(4) Determinare quali sono i numeri naturali che in base 10 sono palindromi di 3 cifre, e che continuano ad essere palindromi anche quando sono espressi in base 5.

(5) Dire quante sono le stringhe costituite da 8 caratteri che soddisfano queste proprietà:
 (a) ogni carattere è una vocale della lingua italiana;
 (b) ogni carattere dal quarto in poi è diverso dai tre precedenti.

(6) I cavalieri sono persone che dicono sempre la verità. I furfanti sono persone che dicono sempre il falso. C'è una fila di 10 cavalieri e furfanti numerati da 1 a 10. Sia b un numero intero fissato (per tutti). La persona al posto i dice che ci sono $2i + b$ cavalieri. Quali sono i valori di b per cui tale situazione non è possibile?

(7) Si consideri la famosa successione di stringhe $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la cui prima α_0 è (1), la seconda α_1 è $(1, 1)$ (un 1), la terza α_2 è $(2, 1)$ (due 1), la quarta α_3 è $(1, 2, 1, 1)$ (un 2, un 1), la quinta α_4 è $(1, 1, 1, 2, 2, 1)$ (un 1, un 2, due 1) ... seguendo sempre la regola di elencare al passo $n + 1$-esimo in successione quanti caratteri di un certo tipo consecutivi si trovano nella stringa al passo n.

(a) Si dimostri che ogni sequenza α_i contiene solo i numeri 1, 2 e 3;
(b) Si dimostri che in ogni sequenza α_i non ci sono mai tre 3 consecutivi.
(c) Si dimostri che ogni α_i finisce con esattamente un 1 o con esattamente due 1.
(d) Si dimostri che $\ell(\alpha_{n+1}) \geq \ell(\alpha_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove ℓ indica la lunghezza della stringa.

(8) Sia D un punto interno al lato AC di un triangolo ABC, e sia E l'intersezione fra il lato AB e la retta per D parallela a BC. Dimostrare che le rette uscenti da A e tangenti alla circonferenza di centro E e raggio ED sono anche tangenti alla circonferenza di centro B e raggio BC.
Determinare la posizione del punto D per cui le due circonferenze risultano tangenti (calcolare la distanza $\overline{AD}$ in funzione delle misure dei lati del triangolo).
Per le posizioni di D per cui le due circonferenza sono esterne, sia F il punto, interno al lato AB, da cui passano le tangenti comuni alle due circonferenze diverse da quelle uscenti da A. Determinare la distanza $\overline{AF}$ in funzione delle misure dei lati del triangolo.