



36^a Gara Matematica “Città di Padova”

25 marzo 2023

Patavina Mathesis

- (1) Determinare i numeri primi p tali che la media aritmetica di p , p^2 e p^3 sia un numero intero. In quale caso questa media diventa un numero primo?
- (2) Si consideri un cubo di lato 4 e su ogni faccia si disegni il quadratino di lato 2 con lo stesso centro della faccia e con i lati paralleli agli spigoli della faccia. Fatto questo si consideri il solido che ha per spigoli i lati di tali quadratini e i segmenti che congiungono ogni vertice di un tale quadratino con i due vertici più vicini tra quelli degli altri quadratini. Si descrivano le facce del solido così ottenuto e il loro numero. Si calcoli inoltre la sua superficie totale e il suo volume. Si dimostri infine che esiste la sfera circoscritta al solido e se ne calcoli il raggio.
- (3) Due punti A e B su una retta orizzontale distanti tra loro 12 metri (A sta a sinistra di B) iniziano a muoversi a mezzanotte verso destra con velocità costante di 1 m/s . Un altro punto C che si trova all'istante iniziale in corrispondenza del punto A si muove con velocità costante di 2 m/s inizialmente verso destra, ma ogni volta che incontra uno dei due punti rimbalza cambiando direzione. Alle $11:15:46$ quanto sono distanti A e C ?
- (4) Un gruppo di 12 persone è composto di 4 famiglie (ogni famiglia ha almeno un componente). Ogni famiglia fa un regalo ad ogni membro delle altre famiglie e inoltre ogni componente di ogni famiglia fa un regalo ad ogni altro componente della sua famiglia. Dimostrare che il numero di regali che vengono fatti è almeno 60.
- (5) Nell'isola di Smullyan ogni persona è un cavaliere (e in tal caso dice sempre la verità) o un furfante (e in tal caso dice sempre il falso). Ci sono quattro abitanti A , B , C e D che si conoscono bene l'un l'altro. Ciascuno di essi tiene in mano una carta di cui noi vediamo solo una faccia; loro, invece, possono vedere entrambe le facce delle carte degli altri. Le carte hanno un numero su una faccia, mentre l'altra faccia può essere scura o chiara. Quello che vediamo è: un 1 sulla carta di A , un 2 sulla carta di B , una carta scura in mano a C , una carta chiara in mano a D . Inoltre, A afferma che ogni carta pari ha il retro scuro; B afferma che D ha una carta pari; C afferma che B ha una carta scura; infine, D afferma: “Se C è un furfante lo sono

anch'io". Quali carte è indispensabile chiedere di girare per scoprire la natura degli abitanti?

- (6) Dimostrare che, dato un triangolo PQR , se i vertici A, B, C di un triangolo giacciono rispettivamente sui lati PQ, QR, RP , allora le tre circonferenze circoscritte ai triangoli PAC, QAB, RBC passano per uno stesso punto.
- (7) Esistono numeri naturali palindromi in notazione decimale, il cui quadrato, in notazione decimale, è un numero palindromo di sei cifre?
- (8) Diciamo che un poligono è semiregolare se è equiangolo e i suoi lati possono avere al massimo due misure diverse. Ad esempio i rettangoli sono gli unici quadrilateri semiregolari.
 - (a) Si dimostri che tutti i pentagoni semiregolari sono regolari, ma esistono esagoni semiregolari non regolari.
 - (b) Si dimostri che per ogni numero naturale pari $n > 2$ esiste un poligono semiregolare non regolare con n lati.
 - (c) Si dimostri che per ogni numero naturale composto n esiste almeno un poligono semiregolare non regolare con n lati.