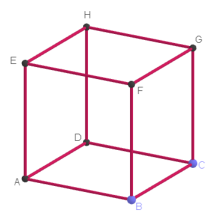
37^{a} Gara Matematica "Città di Padova"
6 aprile 2024

Patavina Mathesis

(1) Preso un cubo come quello in figura di lato 1, si costruiscano due sfere: Γ_1 di centro B passante per D e Γ_2 di centro H passante per F. Si determinino i raggi delle due sfere che hanno come centro il centro del cubo e che sono tangenti sia a Γ_1 che a Γ_2.



(2) Siano $x_1, ..., x_n$ $(n \geq 2)$ numeri reali tali che

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_{n-1}x_n + x_nx_1$$

Si dimostri che $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

(3) Nell'isola di cavalieri e furfanti ci sono solo due tipi di persone: i cavalieri che dicono sempre la verità e i furfanti che mentono sempre. Si forma una fila infinita di abitanti dell'isola in cui le persone sono numerate in ordine con 1,2,3,4,... e così via. Sia $k \geq 0$ un un numero naturale fissato e assumiamo che ogni persona nella fila dichiari: "Le prime k persone dopo di me nella fila sono furfanti". Fissato k, quante sono le configurazioni di cavalieri e furfanti compatibili con queste dichiarazioni?

(4) Si consideri la parola RICARICA. Qual è la probabilità che un suo anagramma non contenga due lettere consecutive uguali?

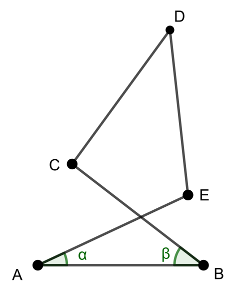
(5) Sia $P(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $P(7) = P(-7)$, $P(14) = P(-14)$ e $P(21) = P(-21)$. Dimostrare che per ogni numero naturale n i numeri naturali $P(n)$ e $P(-n)$ hanno lo stesso resto nella divisione per 6.

(6) Fissato un numero naturale $n \geq 3$ si consideri la successione di numeri naturali $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ definita da

$$\begin{cases} a_0 := n \\ a_{m+1} := d(a_m) \text{ per ogni } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

dove per ogni numero naturale a, $d(a)$ indica il numero di numeri naturali divisori di a (per esempio $d(6) = 4$ dato che 6 ha come divisori 1, 2, 3 e 6). Dimostrare che, qualsiasi sia il numero naturale $n \geq 3$, la successione $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ contiene sempre un numero primo dispari.

(7) Sia $ABCDE$ un pentagono equilatero intrecciato come quello in figura. Determinare per quali angoli α e β, sia i vertici A, C, D che i vertici B, E, D sono allineati.



(8) Una piccola torre è composta inizialmente di 15 blocchi a forma di parallelepipedo disposti inizialmente in 5 strati di tre blocchi ciascuno con orientamento alternato come in figura. Si consideri il seguente celebre gioco. Si parte dalla situazione iniziale e ogni giocatore deve rimuovere a turno un pezzo dalla torre e poi posizionarlo sul piano più alto della torre dove ci sia uno spazio disponibile (mantenendo l'alternanza dell'orientamento degli strati). Chi fa crollare la torre perde. C'è inoltre una regola che vieta di estrarre un pezzo dal penultimo strato (il secondo a partire dall'alto) se l'ultimo (il primo a partire dall'alto) non è completo. Supponendo che i giocatori siano così bravi da non far mai cadere la torre, allora il gioco ad un certo punto termina perché non si possono più fare mosse. Quante sono le configurazioni finali possibili della torre?