



38^a Gara Matematica “Città di Padova” 5 aprile 2025

Patavina Mathesis

- (1) Il PIN dello smartphone di Anna è composto da 5 cifre tutte positive. La prima è un multiplo della seconda, la terza è il numero successore della seconda, terza, quarta e quinta sono in progressione aritmetica, e la somma delle prime due è uguale alla somma delle ultime tre. Quanti tentativi dobbiamo fare per essere sicuri di aver digitato il codice esatto?
(Si ricorda che una successione finita di numeri $a_1, \dots, a_n$ è in progressione aritmetica se la differenza tra ogni termine e il precedente è un numero reale costante.)
- (2) Da un'urna contenente 100 palline bianche ne vengono estratte tre, che vengono colorate di rosso. Poi di queste tre, due vengono reimmesse nell'urna. Si estraggono in seguito due palline dall'urna; poi si pesca una pallina casualmente fra le tre che sono fuori e la si reimmette nell'urna; infine si pesca una pallina dall'urna.
Qual è la probabilità che le palline che sono fuori dall'urna alla fine di questa sequenza di azioni siano tutte e tre rosse?
- (3) Dato un numero naturale n diverso da 0, sia $P(n)$ il prodotto dei suoi divisori interi positivi. Determinare quali sono gli n tali che $P(n) = n^k$ per qualche k intero.
- (4) Un triangolo ABC è inscritto in una circonferenza di centro O e raggio 5. Inoltre, la distanza fra O e il baricentro G del triangolo è 1. Calcolare l'area del triangolo nell'ipotesi che OG sia parallelo a BC .
(Si ricorda che, per un famoso risultato di Eulero, G appartiene al segmento OH , dove H è l'ortocentro del triangolo; inoltre, $\overline{GH} = 2 \cdot \overline{OG}$.)
- (5) Giovanni estrae 4 palline da un'urna in cui ci sono 9 palline numerate da 1 a 9. Poi somma tutti i numeri di 4 cifre che possono essere scritti con le cifre estratte ottenendo un numero a . Qual è la probabilità che a abbia esattamente 24 divisori?
- (6) Determinare tutte le coppie ordinate di numeri interi (a, b) tali che

$$b(a^2 + a) = a^3.$$

- (7) Siano a , b e c tre rette dello spazio a due a due incidenti e ortogonali fra loro; e siano A , B e C tre punti distinti sulle rette a , b e c rispettivamente. Dimostrare che il triangolo ABC non può essere ottusangolo.
- (8) Il triangolo di Tartaglia è lo schema infinito costruito come segue

dove ogni termine è ottenuto come somma dei due termini (o dell'unico termine) immediatamente sopra di esso nella riga precedente. Le righe sono numerate a partire da 0.

- Dimostrare che, qualsiasi sia la riga $n > 0$, la somma a segni alterni dei numeri in essa è 0.
- Sia $M(n)$ il numero massimo che compare nella riga n del triangolo di Tartaglia. Dimostrare che se $n \geq 4$ non tutti i numeri tra 1 e $M(n)$ compaiono nelle righe dalla 0 alla n .