

7^a GARA MATEMATICA “CITTÀ DI PADOVA”
14 MARZO 1992

- 1.- In quanti modi si possono disporre tutti i numeri naturali da 1 a 9 nelle nove caselle di una tabella 3×3 , in modo che i numeri presenti in due caselle contigue (in orizzontale e in verticale) non diano mai prodotto e somma entrambi pari ?
- 2.- Quali piramidi godono della proprietà che il numero dei loro spigoli è uguale al numero degli spigoli di un qualche prisma ?
È possibile che abbiano anche lo stesso numero di vertici ?
- 3.- Date due circonferenze C_1 e C_2 di uguale raggio e tangenti esternamente, determinare il luogo dei punti di C_1 che sono vertici di triangoli equilateri con i restanti due vertici su C_2 .
- 4.- Siano a, b, c numeri interi relativi . Si verifichi che se $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c$, allora $a = b = c = 0$.
Con riferimento ad un usuale sistema cartesiano (O, x, y) si verifichi che un circolo di centro il punto $C(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ non può passare per due diversi punti di coordinate intere. (si sfrutti p.e. il risultato precedente)
- 5.- Si consideri nel piano un sistema cartesiano (O, x, y).
È vero che l'area di un qualunque poligono che abbia i vertici di coordinate intere è o un numero intero o la metà di un numero intero ?
- 6.- Sono dati tre filtri S, C, Q che trattengono, rispettivamente, il 70, il 50 e il 40 per cento delle impurità presenti nei gas di scarico di una automobile. Quale percentuale di impurità trattengono complessivamente se sono messi in serie (uno dopo l'altro) nell'ordine S, C, Q nel tubo di scarico dell'automobile ?
E se l'ordine cambia ?
Sapendo che le tre quantità di impurità trattenute dai tre filtri (messi in serie) sono proporzionali ai lati di un triangolo scaleno, si può dire qual è l'ordine dei tre filtri nel tubo ?
- 7.- Si dimostri che per ogni scelta di numeri positivi α, β risulta :
$$\frac{4}{7} < \frac{4\alpha + 3\beta}{7\alpha + 5\beta} < \frac{3}{5}.$$
Si dimostri che, se per la frazione $\frac{a}{b}$, con a e b interi positivi, risulta $\frac{4}{7} < \frac{a}{b} < \frac{3}{5}$, allora
$$\frac{a}{b} = \frac{4\alpha + 3\beta}{7\alpha + 5\beta}$$
per opportuni α, β interi positivi.
- 8.- Ogni giorno, alla stessa ora, la signora A parte in macchina da R, dove abita, e si reca in città a Padova a prendere il marito prof. B al termine delle sue lezioni, per riportarlo a casa.
Un giorno B finisce le lezioni mezz'ora prima del solito e si avvia a piedi sulla strada di casa.
Dopo 25 minuti di cammino B incontra A che veniva, come al solito, a prenderlo.
Fermata la macchina e invertita la marcia, A e B rientrano a casa prima del solito. Quanti minuti prima ?