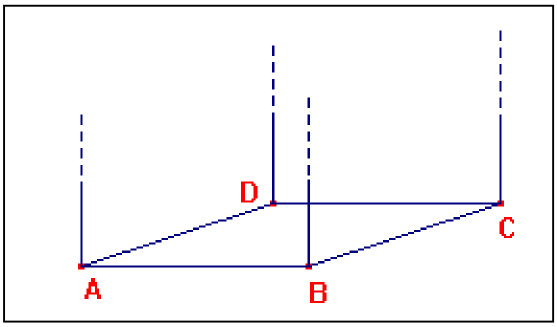
12ª Gara Matematica "Città di Padova"   22 Marzo 1997

1.- Le attuali targhe automobilistiche sono del tipo RL 506 BS, cioè contengono quattro lettere e tre cifre nel centro. Quante sono le targhe in cui, leggendo da sinistra a destra, le 3 cifre sono in stretto ordine crescente e le 4 lettere in stretto ordine alfabetico ? [esempio BL 056 RS]. Si supponga che le lettere usate siano 21 e le cifre 10.

2.- In un piano Π si consideri un quadrato ABCD di lato 10 cm. Si traccino quindi quattro segmenti AE, BF, CG, DH, perpendicolari a Π, di lunghezza 5, 10, 15, 10 cm rispettivamente.
Si verifichi che E, F, G, H sono i vertici di un rombo; se ne determini l'area.
Si trovi il volume del poliedro che ha per vertici A, B, C, D, E, F, G, H.



3.- Se ABC è un qualunque triangolo scaleno, con AB lato maggiore, si fissino due punti D, E sul lato AB (A, B, D, E distinti). Quanti sono i triangoli che hanno per vertici tre dei punti A, B, C, D, E ?
E' possibile scegliere il triangolo ABC e i punti D, E in modo che quattro dei triangoli precedenti siano isosceli ?

4.- Date in un piano due rette r, s incidenti, si trovi un punto P che ha da r distanza doppia di quella che ha da s. [d(P,r) = 2d(P,s)]. Se tre rette r, s, t sono i (prolungamenti dei) lati di un triangolo, esistono punti P del piano per cui risulta d(P,r) = 2d(P,s) = 3d(P,t) ? Come si costruiscono ? Quanti sono ?

5.- Disponendo di 10 tinte differenti, in quanti modi diversi si può colorare un cubo, dipingendo ogni faccia di un solo colore, diverso da quello delle altre 5 ? [si intende che due cubi sono "colorati in modo diverso" se la colorazione delle facce li rende distinguibili]

6.- Un numero n si chiamerà "allegro" se per qualche scelta di x, y interi risulta $n = 2x^2 + 3y^2$ (esempi : $11 = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1^2$, $12 = 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 2^2$).
Si dimostri che se n è un numero allegro, allora lo è anche 7n .

7.- Un automobilista dispone di un treno di 5 gomme nuove, la cui vita è di 50000 km [cioè una gomma diventa inservibile quando ha percorso esattamente 50000 km]. Qual è il massimo chilometraggio possibile, e come si potrà dare il cambio alle gomme per ottenerlo ? Se invece, partendo dalla stessa condizione iniziale, l'automobilista sapesse di dover percorrere 70000 km, quante altre gomme dovrà acquistare (numero minimo) ?

8.- Considerato il numero $1+\sqrt{2}$, si dimostri che tutte le sue potenze $(1+\sqrt{2})^n$ con n intero, eventualmente negativo, si possono scrivere nella forma $a_n + b_n\sqrt{2}$ con a_n e b_n interi opportuni.
Si dimostri inoltre che (per ogni indice n) i numeri a_n, b_n sono primi tra loro.