

13^a GARA MATEMATICA "CITTÀ DI PADOVA" - 21-3-1998

1) In un trapezio il rapporto delle lunghezze delle due basi è $2/3$.

Si scrivano quattro numeri proporzionali alle aree dei quattro triangoli in cui il trapezio è diviso dalle due diagonali.

2) Due amici devono dipingere una staccionata circolare e si dividono il lavoro in parti eguali. Incominciano al sorgere del sole partendo dallo stesso punto e procedendo in versi opposti. A mezzogiorno hanno dipinto complessivamente metà staccionata. Alle quattro del pomeriggio uno dei due amici finisce di dipingere la sua metà, l'altro termina la sua metà alle nove di sera. Tutti e due hanno lavorato ininterrottamente, ciascuno con la propria velocità costante.

A che ora è sorto il sole?

3) Siano A, B, C, D, E, F, G vertici successivi di un ettagono regolare. Indichiamo con b, c, d le misure dei segmenti AB, AC, AD, rispettivamente.

Verificare che

$$1/b = 1/c + 1/d.$$

4) Dimostrare che per ogni intero n dispari maggiore di 1 il numero

$$7^n + 6^n + 5^n \quad \text{è divisibile per } 12.$$

5) Si consideri l'insieme dei numeri naturali da 1 a 90.

Quanti sono i suoi sottoinsiemi costituiti da cinque numeri (si pensi alle cinque del lotto) il cui massimo comun divisore è 3 ?

6) Dimostrare che in ogni triangolo si può inscrivere un quadrato (un quadrato si dice inscritto in un triangolo quando i vertici del quadrato stanno sui lati del triangolo).

Come deve essere il triangolo per avere più di due quadrati inscritti?

7) La seguente disuguaglianza è vera o falsa?

$$\log \sqrt{5} 2 > \log 1/5 (1/2) + \log 25 3.$$

8) Date nello spazio tre rette non complanari r, s, t, passanti per uno stesso punto O, tali che t non sia ortogonale né a r né a s, si considerino un punto P_t appartenente a t, e la sfera per O di centro P_t . Siano R e S le ulteriori intersezioni della sfera con r e s, rispettivamente.

E' vero che al variare di P_t su t i vari segmenti RS che così si ottengono sono tutti paralleli?