Università Iuav di Venezia **Anno Accademico 2016-2017**
CLT Architettura Costruzione Conservazione

Esame scritto del corso
Analisi Matematica e Geometria
1/2/2017

Cognome e nome: .... N. Matricola: ....

Compilare questo foglio scrivendo cognome e nome e numero di matricola dove indicato. Le prove senza cognome o nome non verranno corrette. Al termine della prova lo studente dovrà restituire solo la bella copia (cioè questo pacchetto di fogli).
È vietato l'uso di libri, appunti, telefoni, calcolatrici, compagni di corso, ... Non è consentito comunicare con altri candidati durante la prova per nessun motivo: la prova di chiunque venga sorpreso a comunicare con altri candidati sarà annullata seduta stante dalla commissione. Ogni domanda di chiarimento va rivolta esclusivamente alla commissione, che risponderà solamente a domande sulle modalità d'esame o a richieste di chiarimenti sul testo degli esercizi; in ogni caso non si daranno indicazioni sullo svolgimento degli stessi.

Tempo a disposizione: 2 ore.

Esercizio 1

Sia $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin(x) + 1, & \text{se } x < 0, \\ e^x, & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(1) (*4 punti*) Si dica, motivando la risposta, se φ è iniettiva e se φ è suriettiva.

(2) (*5 punti*) Si verifichi che φ è continua in 0.

(3) (*5 punti*) Si dimostri che φ è derivabile in 0. Quanto vale $\varphi'(0)$?

Soluzione. (1) Si ha $\varphi(-\pi) = \sin(-\pi) + 1 = 1 = \sin(-2\pi) + 1 = \varphi(-2\pi)$, quindi φ non è iniettiva. Inoltre per $x < 0$ è $\varphi(x) = \sin x + 1 \geq 0$ e per $x \geq 0$ è $\varphi(x) = e^x > 0$. Quindi i numeri reali negativi non appartengono all'immagine di φ, che pertanto non è suriettiva.

(2) Si ha che $\varphi(0) = e^0 = 1$, $\lim_{x\to 0^-} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^-}(\sin x + 1) = 1$, $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1$, e ciò mostra che φ è continua in 0.

(3) Scriviamo il rapporto incrementale di φ relativo ai punti x e 0:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{se } x < 0, \\[2ex] \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Si ha allora che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Pertanto il limite del rapporto incrementale esiste finito ed è uguale a 1, e ciò prova che φ è derivabile in 0 e che $\varphi'(0) = 1$.

Si poteva procedere in un altro modo, utilizzando la seguente osservazione:

PROPOSIZIONE. *Sia I intervallo di $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in $I \setminus \{x_0\}$; supponiamo che esista finito il limite* $\lim_{x\to x_0} f'(x) = l$. *Allora f è derivabile in x_0 ed è $f'(x_0) = l$.*

Dimostrazione. Osserviamo che il limite $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Poiché il limite $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ esiste finito, applicando la regola di l'Hôpital otteniamo che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} f'(x) = l,$$

e dunque f è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = l$. $\square$

Sia ha che

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \cos(x), & \text{se } x < 0, \\ e^x, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Poi

$$\lim_{x\to 0^-} \varphi'(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos x = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \varphi'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^x = 1,$$

quindi esiste finito il limite $\lim_{x\to 0} \varphi'(x)$ ed è uguale a 1.

Esercizio 2

Sia f la funzione reale di variabile reale definita da $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$.

(1) (*2 punti*) Si determini il dominio di f e si verifichi che $f(-x) = f(x)$.

(2) (*3 punti*) Si calcolino i limiti

$$\lim_{x\to -1^-} f(x), \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^-} f(x), \quad \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

(3) (*3 punti*) Si calcoli la derivata prima di f.

(4) (*4 punti*) Si determinino eventuali massimi o minimi della funzione f. Esistono massimi o minimi assoluti?

Soluzione. (1) La funzione f è definita dove non si annulla il denominatore della frazione $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, quindi deve essere $x^2-1 \neq 0$, da cui $x \neq \pm 1$. Pertanto il dominio di f è $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$. Osserviamo poi che per ogni $x \in \mathbb{R}, x \neq \pm 1$ si ha

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x).$$

(2) Si ha che

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

Utilizzando poi la simmetria pari di f dimostrata nel punto (1), si vede che

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty.$$

(3) Applicando la regola di derivazione di un quoziente di trova che

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

(4) Osserviamo subito che f non può ammettere massimi o minimi assoluti, come segue dal punto (2). Per determinare gli eventuali massimi o minimi relativi di f, studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) \geq 0 \iff -\frac{4x}{(x^2-1)^2} \geq 0 \iff x \leq 0.$$

Quindi f è (strettamente) decrescente negli intervalli $]-\infty, -1[$ e $]-1, 0[$ e (strettamente) crescente negli intervalli $]0, 1[$ e $]1, +\infty[$. Da ciò segue che 0 è un punto di massimo relativo per f e che il massimo relativo ivi assunto è $f(0) = -1$.

Esercizio 3

Sia $g\colon]0,+\infty[\setminus\{e^{-1}\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $g(x) = \dfrac{1}{x(\log(x)+1)}$.

(1) (*5 punti*) Si determinino tutte le primitive della funzione g.

[*Suggerimento: si tratta di calcolare l'integrale indefinito* $\int g(x)dx$. Si ponga $t = \log x$ ...]

(2) (*5 punti*) Si calcoli $\displaystyle\int_e^{e^2} g(x)\,dx$.

Soluzione. (1) Usiamo la sostituzione $t = \log x$. Si ha $dt = \dfrac{1}{x}\,dx$ e quindi

$$\begin{aligned}\int g(x)\,dx &= \int \frac{1}{\log(x)+1}\cdot\frac{1}{x}\,dx\\ &= \int \frac{1}{t+1}\,dt\\ &= \log|t+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}\\ &= \log|\log(x)+1| + c, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(2) Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} g(x)\,dx &= \log|\log(e^2)+1| - \log|\log(e)+1|\\ &= \log\frac{3}{2}.\end{aligned}$$