GEOMETRIA 2B

Maurizio Cailotto

aa 2019/20

secondo semestre

(primo semestre dell'era del

CORONA-VIRUS,

tentativi di didattica a distanza:

pg. web,

pg. moodle, forum sugli argomenti?

appunti commentati...

sperando nel rientro in Torre!)

Geometria 2B 2019/20

ORGANIZZAZIONE: telematica via MOODLE & PG. WEB
(fino a nuove disposizioni)
compitini & ESAMI: troppo presto per decidere
(per il momento, tutto sospeso).

PROGRAMMA: ci sono due parti quasi indipendenti:

① GEOMETRIA DIFFERENZIALE IMMERSA:

CURVE $\subseteq \mathbb{R}^n$: lunghezza d'arco e invarianti (curvature)
riferimento ed Equazioni di FRENET,
teorema fondamentale di esistenza e unicità
esempi fondamentali.

SUPERFICIE $\subseteq \mathbb{R}^3$: calcoli metrici con la I forma fondam.
CURVATURA: mappa di GAUSS, WEINGARTEN, II forma fond
TEOREMA EGREGIUM di GAUSS
curve contenute sulle superficie (tra cui GEODETICHE)
esempi fondamentali.
Cenni su: calcolo differenziale intrinseco (sulle sup.)
equazioni di GAUSS e CODAZZI-MAINARDI
teorema fondam. di esistenza unicità
TEOREMA DI GAUSS-BONNET

riferimenti: APPUNTI sulla pg web, con esami passati
LIBRI: DO CARMO, KLINGEMBERG, ABATE-TOVENA
bibbia: SPIVAK.

② TOPOLOGIA GENERALE: estendere a spazi non-metrici
alcune nozioni geometriche viste in analisi:
- APERTI, CHIUSI, INTORNI, CONTINUITÀ, CONVERGENZA
- SEPARAZIONE, CONNESSIONE, COMPATTEZZA, ~~COMPLETEZZA~~

qui bisognerà studiare molti esempi per sviluppare una buona comprensione e un po' di intuizione NUOVA.
La topologia oggi è usata in MOLTI CAMPI della MATEMATICA, non solo in geometria/analisi, ma anche in algebra, logica, applicazioni.

finiremo con:
③ CLASSIFICAZIONE TOPOLOGICA delle SUPERF. REALI COMPATTE
(usando caratteristica di EULERO-POINCARÉ e GENERE)

CURVE DIFFERENZIALI in $\mathbb{R}^n$

ci sono (almeno) due modi per definire le curve in $\mathbb{R}^n$:

- sottinsiemi di $\mathbb{R}^n$ localmente omeomorfi ad intervalli aperti di $\mathbb{R}$
- sottinsiemi di $\mathbb{R}^n$ parametrizzati da un parametro reale

noi useremo la seconda strategia:

CURVA PARAMETRIZZATA DI CLASSE C^m è funzione $\gamma: I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \gamma(t)$

dove I è intervallo aperto di $\mathbb{R}$,
$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix}$ con γ_i funzioni reali di classe C^m.

cambiamento di parametro (o riparametrizzazione)

tramite $J \to I$, $s \mapsto t(s)$ diffeomorfismo tra intervalli aperti di $\mathbb{R}$ (o di classe almeno C^m)

è la composizione $\tilde{\gamma}: J \xrightarrow{t} I \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^n$, $s \longmapsto \tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s))$.

Naturalmente, γ e $\tilde{\gamma}$ hanno stessa immagine $\subseteq \mathbb{R}^n$.
Si verifica subito che la riparametrizzazione è relazione di equivalenza (simm., rifl., trans.) tra curve parametrizzate.

CURVA := CURVE PARAMETRIZZATE modulo RIPARAMETRIZZAZIONE
(studiare le curve è come studiare la loro immagine in $\mathbb{R}^n$ senza tener conto del parametro che le descrive).
Si dicono: PIANE se $\subseteq$ piano $\subseteq \mathbb{R}^n$
SPAZIALI se $\subseteq$ spazio di dim 3 $\subseteq \mathbb{R}^n$.

Prima nozione fondamentale è quella di REGOLARITÀ:

se γ è CURVA di classe $\geq k$,
diciamo che è k-REGOLARE se le derivate $\gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(k)}$ sono vettori lin. indip. per $\forall t \in I$
(ovviamente $k \leq n$ dimensione dello spazio ambiente)
e allora $\langle \gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(i)} \rangle$ oppure $\gamma + \langle \gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(i)} \rangle$
si dice i-simo spazio OSCULATORE di γ (nel punto $\gamma(t)$).
per esempio: $\gamma + \langle \gamma' \rangle$ è retta osculatrice o tangente
$\gamma + \langle \gamma', \gamma'' \rangle$ è piano osculatore, ecc.

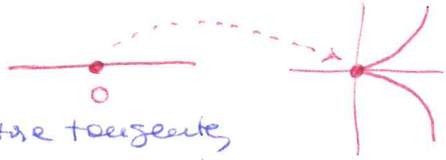
diciamo PUNTO SINGOLARE un punto non 1-regolare, cioè con $\gamma' = 0$, in cui non c'è la retta tangente

Esempi:

(1) CUSPIDE: $\gamma(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ curva nel piano (di equazione $y^2 = x^3$)

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$

nulle per $t=0$



Si può definire un vettore tangente, o una retta tangente in $\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

(2) NODO: $\gamma(t) := \begin{pmatrix} t^2-1 \\ t(t^2-1) \end{pmatrix}$ curva nel piano (di equazione $y^2 = x^2(x+1)$)

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2-1 \end{pmatrix}$

Sempre regolare!
ma non iniettiva,

nota: nel punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \gamma(1) = \gamma(-1)$ ha due vettori tangenti, a seconda del valore usato del parametro: intorno a quel punto non è omeomorfo col un intervallo reale.

(3) CURVA RAZIONALE NORMALE in $\mathbb{R}^3$:

$\gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ curva nello spazio, non piana (definita dalle equazioni $\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$, intersezione di cilindri retti)

$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$

$\gamma''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6t \end{pmatrix}$

$\gamma'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

quindi è 3-regolare in ogni punto
(i tre vettori sono sempre lin indip, per ogni $t \in \mathbb{R}$)

Sia γ una curva differenziabile almeno 1-regolare, definiamo il PARAMETRO D'ARCO di γ nel modo seguente:

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} \|\gamma'(u)\|\, du = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\sum_i \gamma_i'(u)^2}\, du$$

(si tratta della lunghezza d'arco da t_0 a t della curva γ, e cambiando t_0 cambia per una costante: quale?).

La funzione $t \mapsto s(t)$ è un omeomorfismo (di intervalli generici) e quindi possiamo riparametrizzare γ scrivendo t in funzione di s:

$\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s))$ è la PARAMETRIZZAZIONE canonica o in PARAMETRO D'ARCO di γ,

ed è l'unica parametrizzazione con "velocità 1", cioè con vettore tangente sempre unitario.

Infatti da $\frac{ds}{dt} = \|\gamma'\|$ abbiamo $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\|\gamma'\|}$

quindi $\tilde{\gamma}' = \gamma' \frac{dt}{ds} = \gamma' / \|\gamma'\|$

da cui $\|\tilde{\gamma}'\| \equiv 1$.

Nota sull'uso sportivo delle derivazioni:

$$\tilde{\gamma}(s)' = \frac{d}{ds}\tilde{\gamma}(s) = \frac{d}{ds}\gamma(t(s)) = \frac{d}{dt}\gamma(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}(s) = \gamma'(t(s))\frac{dt}{ds}(s)$$

derivazione di funzione composta

che scriviamo semplicemente $\tilde{\gamma}' = \gamma' \frac{dt}{ds}$ sopprimendo le variabili

(la formula diventa più facile da leggere, ma bisogna stare attenti: al minimo dubbio, esplicitare!).

Tuttavia, trovare $\tilde{\gamma}$ è difficile per due motivi:

(1) spesso $s(t)$ non è elementarmente integrabile, cioè non è integrabile con funzioni elementari,

(2) spesso invertire $s(t)$ in $t(s)$ non è banale, anche se è garantito essendo omeomorfismo: si tratta di trovare la funzione INVERSA per COMPOSIZIONE.

ESEMPI:

(1) CERCHIO: $\gamma(t) := \begin{pmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{pmatrix}$, $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -R\sin t \\ R\cos t \end{pmatrix}$, $\|\gamma'\|^2 = R^2$

$$s(t) = \int_{t_0=0}^{t} R\, dt = Rt \Rightarrow t(s) = \frac{s}{R}$$

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)) = \begin{pmatrix} R\cos(s/R) \\ R\sin(s/R) \end{pmatrix}.$$

note: abbiamo trovato la parametrizzazione d'arco del cerchio di raggio R, cioè quella con $\|\tilde{\gamma}'\| = 1$. anche $\frac{1}{R}\gamma(t)$ ha derivata di norma 1, ma è un'altra curva!

(2) ELLISSI: $\gamma(t) := \begin{pmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{pmatrix}$, $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{pmatrix}$, $\|\gamma'\|^2 = a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t$
$= a^2 + (b^2-a^2)\cos^2 t$

$$s(t) = \int_{t_0=0}^{t} \sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 u}\, du$$

che è un INTEGRALE ELLITTICO, e non si esprime con funzioni elementari.

(3) PARABOLE: $\gamma(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$, $\|\gamma'\|^2 = 1+4t^2$

$$s(t) = \int_{t_0=0}^{t} \sqrt{1+4u^2}\, du = \frac{1}{2}\int ch^2 v\, dv = \frac{1}{4}\left(v + sh\, v\, ch\, v\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\mathrm{settsh}(2u) + 2u\sqrt{1+4u^2}\Big]_0^t =$$

$$= \frac{1}{4}\log\left(2t+\sqrt{1+4t^2}\right) + \frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2}.$$

abbiamo scritto il parametro d'arco con funzioni elementari, ma ricavare $t(s)$, cioè t in funzione di s, non sembra praticabile!

Nota: è buona cosa riguardare le tavole di primitive elementari note, e anche guardare le funzioni elementari le cui primitive **non** si esprimono con funzioni elementari (dall'anno scorso).

Problema: quando si danno definizioni per le curve, bisogna controllare che siano indipendenti dalla parametrizzazione. STRATEGIA GENERALE: dare le definizioni USANDO IL PARAMETRO D'ARCO, e poi capire come si calcolano i termini definiti in parametrizzazione QUALSIASI, perché spesso non riusciamo a portare una curva in param. d'arco.

definizione di RIFERIMENTO ed EQUAZIONI DI FRENET:

$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ curva (almeno) $(n-1)$-regolare in par. d'arco, allora otteniamo il riferimento mobile:

$$V_\gamma : I \to GL_n(\mathbb{R})$$
$$t \mapsto (\gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(n-1)}, v_n)$$

dove $v_n = (-)^{n-1} \operatorname{cross}(\gamma', \dots, \gamma^{(n-1)})$ è il cross-product orientato dei precedenti vettori.

e applicando Gram-Schmidt otteniamo il riferimento mobile ORTOGONALE

$$E_\gamma : I \to SO_n(\mathbb{R})$$
$$t \mapsto \text{ortogonalizzaz. alla G-S di } V_\gamma(t).$$

che si dice RIFERIMENTO DI FRENET della curva γ: per ogni punto della curva è rif. ortog. euclideo che tiene conto degli spazi OSCULATORI in quel punto.

Dalla definizione segue che:

$E_\gamma^t E_\gamma = \mathbb{1}$, $E_\gamma = V_\gamma \cdot T$ con $T = \begin{pmatrix} & * \\ 0 & \end{pmatrix}$ triangolare superiore con termini positivi in diagonale

e $V_\gamma' = V_\gamma \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ 1 & & 0 & * \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & * \end{pmatrix}$ dove $V_\gamma' = \frac{d}{dt} V_\gamma$,

da cui deduciamo le EQUAZIONI DI FRENET per γ:

$$E_\gamma' = E_\gamma K \quad \text{con } K = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & & 0 \\ k_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -k_{n-1} \\ 0 & & k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

matrice ANTISIMMETRICA con termini non nulli solo su sopra/sotto DIAGONALE

le FUNZIONI $k_i(t)$ si chiamano le CURVATURE di γ e sono non negative per $i < n-1$.

k_1 si dice anche CURVATURA PRINCIPALE o CURVATURA di γ

k_2 si dice anche TORSIONE di γ (almeno in dim 3)

Significato geometrico: k_i misura la VARIAZIONE dello spazio osculatore i-esimo.

Vediamo perché la matrice K ha la forma semplice detta prima:

ricordo che $E = VT$ con $V = (\gamma', \dots, \gamma^{(n-1)}, v_n) \in GL_n(\mathbb{R})$
$E = (e_1, \dots, e_n) \in SO_n(\mathbb{R})$
T = matrice triangolare di G.-S.

e $E' = EK$ con K matrice di Frénet: allora

① $E^t E = \mathbb{1} \Rightarrow (E^t E)' = \mathbb{0}$ (derivando)

$E'^t E + E^t E' = \mathbb{0}$

$(EK)^t E + E^t (EK) = \mathbb{0} \Rightarrow K^t + K = \mathbb{0}$

dunque K è ANTISIMMETRICA.

② $E = VT \Rightarrow E' = V'T + VT' =$ (derivando)

$= V \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & * \\ \boxed{\mathbb{1}} & \vdots \\ & * \end{pmatrix} T + VT' =$

$= \underbrace{V}_{ET^{-1}} \left(\begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & * \\ \boxed{\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}} & \vdots \\ & * \end{pmatrix} T + T' \right) = E \begin{pmatrix} \cdot & & * \\ \cdot & \ddots & \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ ← diagonale, sottodiagonale

① e ② $\Rightarrow K = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & & 0 \\ k_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & k_{n-1} \\ 0 & & k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ ← antisimmetrica!

per esercizio: capire perché $k_i > 0$ se $i < n-1$.

Vediamo cosa succede se γ non è un parametro d'arco:

da $\gamma(t)$ troviamo $E(t)$ con $\frac{d}{dt}E(t) = E(t)\,\Omega(t)$ con $\Omega(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & & 0 \\ \omega_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & -\omega_{n-1} \\ 0 & & \omega_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$

e riparametrizziamo con $t(s)$, s parametro d'arco:

$E(t(s))\,K(t(s)) = \frac{d}{ds} E(t(s)) = \frac{d}{dt} E(t(s)) \cdot \frac{dt}{ds}(s)$

$= E(t(s))\,\Omega(t(s)) \cdot \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}$

da cui si ricava $K(t(s)) = \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}\,\Omega(t(s))$

cioè $k_i = \frac{1}{\|\gamma'\|}\,\omega_i$.

Infine, ricordiamo che $(\|\gamma'\|^2)' = (\gamma' \cdot \gamma')' = 2\gamma' \cdot \gamma''$,

quindi $\|\gamma'\|$ costante $\Leftrightarrow \gamma' \perp \gamma''$,

in particolare γ par. d'arco $\Rightarrow \gamma''$ è già ortogonale a γ'.

$(\|\gamma'\| \equiv 1) \Rightarrow k_1 = \|\gamma''\|$ (da $\underset{(\gamma')'}{\underset{\shortparallel}{e_1'}} = k\,\underset{\gamma''/\|\gamma''\|}{\underset{\shortparallel}{e_2}}$)

Vediamo la situazione nel piano:

se γ è curva almeno 2-regolare nel piano,
$\gamma = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\gamma' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \neq 0$, $-\mathrm{cross}(\gamma') = \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$,

se siamo in parametro d'arco abbiamo:

sistema di rif. di Frenet: $e_1 = t = \gamma' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
$e_2 = n = -\mathrm{cross}\,\gamma' = \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$

sistema di equazioni di Frenet: $(t,n)' = (t,n)\begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}$

cioè: $\begin{cases} t' = kn \\ n' = -kt \end{cases}$

da cui $k = n \cdot t' = \begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = x'y'' - x''y' = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = |\gamma' \ \gamma''|$

note: siccome $\|\gamma'\| = 1$ abbiamo $\gamma'' \perp \gamma'$, quindi $\gamma'' \parallel n$,
e k risulta positivo/negativo a seconda che n e γ'' siano con versi uguali/opposti.

se siamo in parametrizzazione qualsiasi abbiamo:

sist. rif. Frenet: $e_1 = t = \gamma'/\|\gamma'\| = \frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
$e_2 = n = -\mathrm{cross}(t) = \frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix}$

ora $t' = \left(\gamma'/\|\gamma'\|\right)' = \frac{\gamma''}{\|\gamma'\|} + \left(\frac{1}{\|\gamma'\|}\right)'\gamma'$

e equazione Frenet è $t' = \omega n$
quindi $\omega = t' \cdot n = \frac{1}{\|\gamma'\|}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\|\gamma'\|}\begin{pmatrix} -y' \\ x' \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\gamma'\|^2}|\gamma' \ \gamma''|$

e $k = \frac{1}{\|\gamma'\|}\omega = \frac{1}{\|\gamma'\|^3}|\gamma' \ \gamma''|$.

Nota: il segno di $|\gamma' \ \gamma''| = \det(\gamma' \ \gamma'')$ dice esattamente se γ', γ'' è orientato come la base canonica o meno, ovvero se γ'' è orientato come n o opposto.
Nei libri spesso si definisce k come $\|\gamma''\|$ (in p.d'a) e poi si aggiunge il segno!

per esercizio, vediamo come esprimere la curvatura di curve piane date come grafici di funzioni:

in coordinate cartesiane:

$\gamma(x) = \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$, $\gamma' = \begin{pmatrix} 1 \\ f' \end{pmatrix}$, $\gamma'' = \begin{pmatrix} 0 \\ f'' \end{pmatrix}$, $\|\gamma'\| = \sqrt{1+f'^2}$

(non è param. d'arco!)

rif. Frenet: $t = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f' \end{pmatrix}$

$n = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}} \begin{pmatrix} -f' \\ 1 \end{pmatrix}$

$k = \frac{|\gamma' \, \gamma''|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}^3}$

in coordinate polari:

$\gamma(\vartheta) = \begin{pmatrix} \rho(\vartheta)\cos\vartheta \\ \rho(\vartheta)\sin\vartheta \end{pmatrix}$, $\gamma' = \begin{pmatrix} \rho'\cos\vartheta - \rho\sin\vartheta \\ \rho'\sin\vartheta + \rho\cos\vartheta \end{pmatrix}$, $\gamma'' = \begin{pmatrix} \rho''\cos\vartheta - 2\rho'\sin\vartheta - \rho\cos\vartheta \\ \rho''\sin\vartheta + 2\rho'\cos\vartheta - \rho\sin\vartheta \end{pmatrix}$

$\|\gamma'\| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$

$k = \frac{|\gamma' \, \gamma''|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{\rho^2 - \rho\rho'' + 2\rho'^2}{\sqrt{\rho^2+\rho'^2}^3}$

Il sistema di equazioni di Frénet è un sistema di equazioni differenziali di cui ci occuperemo in generale. Nel caso del piano è particolarmente semplice, e può essere esplicitato subito: abbiamo

$$(t,n)' = (t,n)\begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{cioè} \begin{cases} t = \gamma' \\ t' = kn \\ n' = -kt \end{cases}$$ (tutto funzione s)

poniamo $t = \begin{pmatrix} \cos\vartheta(s) \\ \sin\vartheta(s) \end{pmatrix}$, quindi $t' = \vartheta' \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$,

da cui vediamo $k = \vartheta'$, cioè $\vartheta(s) = \int k(s)\,ds$

e infine $\gamma = \int t(s)\,ds$ = primitiva di $\begin{pmatrix} \cos(\int k(s)ds) \\ \sin(\int k(s)ds) \end{pmatrix}$.

Questo ci mostra anche che data la curvatura $k(s)$ riusciamo a ricostruire la curva γ se imponiamo le condizioni iniziali per il sistema differenziale. Vedremo in generale che le curvature determinano, sotto qualche condizione, le curve a meno di ISOMETRIE (euclidee) dello spazio.

Per il momento possiamo fare qualche esempio nel piano:

(1) le rette sono le curve con k identicamente 0

(2) le circonferenze sono le curve con k COSTANTE $\neq 0$

(3) le curve con $k(s)$ funzione proporzionale a s, cioè alla lunghezza d'arco, sono le SPIRALI DI CORNU

(4) le curve con $k(s)$ funzione inversamente proporzionale a s, lunghezza d'arco, sono le SPIRALI LOGARITMICHE

(5) che curvature hanno le SPIRALI DI ARCHIMEDE?

PROVATE DA SOLI: sono i primi esercizi nelle dispense!

Vediamo la situazione nello spazio:

usiamo $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ almeno 2-regolare, supponiamo che sia un parametro d'arco,

riferimento di Frénet: $\begin{cases} e_1 = t = \gamma' & \text{tangente} \\ e_2 = n = \gamma''/\|\gamma''\| & \text{normale} \\ e_3 = b = t \times n = \dfrac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma''\|} & \text{binormale} \end{cases}$

equaz. di Frénet: $(t\,n\,b)' = (t\,n\,b)\begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$, cioè $\begin{cases} t' = kn \\ n' = -kt + \tau n \\ b' = -\tau n \end{cases}$

da cui: $k = n \cdot t' = \|\gamma''\|$

$\tau = -b' \cdot n = n' \cdot b =$ (perché $n \cdot b = 0 \Rightarrow n' \cdot b + n \cdot b' = 0$)

$= \left(\dfrac{\gamma''}{\|\gamma''\|}\right)' \cdot \dfrac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma''\|} = \dfrac{\gamma' \times \gamma'' \cdot \gamma'''}{\|\gamma''\|^2} = \dfrac{|\gamma'\,\gamma''\,\gamma'''|}{\|\gamma''\|^2}$

se invece siamo in parametrizzazione qualsiasi,

rif. Frénet: $\begin{cases} t = \gamma'/\|\gamma'\| \\ \qquad \Longrightarrow n = b \times t = \dfrac{(\gamma' \times \gamma'') \times \gamma'}{\|\gamma' \times \gamma''\| \cdot \|\gamma'\|} \\ b = \dfrac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|} \end{cases}$

e calcoliamo curvatura e torsione usando le formule per $\tilde\gamma$ riparametrizzata in p. d'arco:

otteniamo $\dfrac{ds}{dt} = \|\gamma'\|$, $\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{\|\gamma'\|}$, $\dfrac{d^2t}{ds^2} = -\dfrac{\gamma' \cdot \gamma''}{\|\gamma'\|^4}$

$\tilde\gamma' = \dfrac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$

$\tilde\gamma'' = \left(\dfrac{\gamma''}{\|\gamma'\|} - \gamma' \cdot \dfrac{\gamma' \cdot \gamma''}{\|\gamma'\|^3}\right)\dfrac{1}{\|\gamma'\|} = \dfrac{\|\gamma'\|^2\gamma'' - (\gamma' \cdot \gamma'')\gamma'}{\|\gamma'\|^4} =$

$= \dfrac{\gamma' \times (\gamma'' \times \gamma')}{\|\gamma'\|^4}$

$\tilde\gamma''' = \dfrac{\gamma'''}{\|\gamma'\|^3} +$ vettore $\in \langle \gamma', \gamma'' \rangle$

da cui: $k = \|\tilde\gamma''\| = \dfrac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}$

$\tau = \dfrac{\tilde\gamma' \times \tilde\gamma'' \cdot \tilde\gamma'''}{\|\tilde\gamma''\|^2} = \dfrac{\frac{\gamma'}{\|\gamma'\|} \times \frac{\gamma''}{\|\gamma'\|^2} \cdot \frac{\gamma'''}{\|\gamma'\|^3}}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2/\|\gamma'\|^6} = \dfrac{\gamma' \times \gamma'' \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2}$

(che naturalmente danno le precedenti, se $\|\gamma'\| = 1$ e $\gamma' \perp \gamma''$)

Vediamo qualche applicazione delle equazioni di Frênet

iniziamo con la FORMA NORMALE in $\mathbb{R}^3$ (in p. d'arco):

esprimiamo la curva $\gamma(s)$ usando Taylor nella base Frenet t, n, b:

$$t = \gamma'$$
$$t' = \gamma'' = kn$$
$$\gamma''' = (kn)' = k'n + kn' = k'n + k(-kt + \tau b) =$$
$$= -k^2 t + k'n + k\tau b$$
$$\gamma^{IV} = (-k^2 t + k'n + k\tau b)' = \dots$$

ora

$$\gamma(s) = \gamma(0) + s\gamma'(0) + \frac{s^2}{2}\gamma''(0) + \frac{s^3}{3!}\gamma'''(0) + \dots$$
$$= \gamma(0) + s\,t + \frac{s^2}{2}kn + \frac{s^3}{6}(-k^2 t + k'n + k\tau b) + \dots$$
$$= \gamma(0) + t\left(s - k^2\frac{s^3}{6}\dots\right) + n\left(k\frac{s^2}{2} + k'\frac{s^3}{6}\dots\right) + b\left(k\tau\frac{s^3}{6}\dots\right)$$
$$= \gamma(0) + \begin{pmatrix} s - k^2 s^3/6 \dots \\ k s^2/2 + k' s^3/6 \dots \\ k\tau s^3/6 \dots \end{pmatrix}$$

e dunque otteniamo le approssimazioni:

- sul piano osculatore $\langle t, n\rangle$: PARABOLA $\begin{pmatrix} s \\ k s^2/2 \end{pmatrix}$: $y = \frac{k}{2}x^2$
- sul piano normale $\langle n, b\rangle$: CUSPIDE $\begin{pmatrix} k s^2/2 \\ k\tau s^3/6 \end{pmatrix}$
- sul piano rettificante $\langle t, b\rangle$: FLESSO $\begin{pmatrix} s \\ k\tau s^3/6 \end{pmatrix}$

Problema: come si esprime la forma normale in $\mathbb{R}^n$?

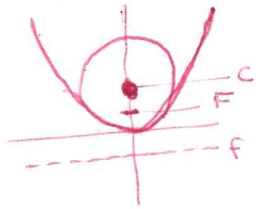
vediamo la storia dei CERCHI OSCULATORI alle curve
e del raggio di curvatura = $1/$curvatura.

Usando uno sviluppo di Taylor per $\gamma(s)$,
la prima approssimazione è la retta tangente (identificata dalla direzione)
la seconda approssimazione è una parabola (identificata dal vettore normale e dalla curvatura):

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + (s-s_0)\underbrace{\gamma'(s_0)}_{t(s_0)} + \frac{(s-s_0)^2}{2}\underbrace{\gamma''(s_0)}_{k(s_0)\,n(s_0)} + o((s-s_0)^2).$$

Ma di solito preferiamo approssimare con CIRCONFERENZE:
nel fascio iperosculatore generato da tangente e parabola c'è una sola circonferenza:

se punto $= 0$, parabola: $2y = ax^2$, tangente $y=0$,
l'unica circonferenza è $2y = ax^2 + ay^2$
cioè $x^2 + (y - \frac{1}{a})^2 = \frac{1}{a^2}$
di centro $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/a \end{pmatrix}$ e raggio $\frac{1}{a}$.



Dunque nel caso della curva γ nel punto $\gamma(s_0)$ abbiamo
tangente di direzione $t(s_0)$
normale di direzione $n(s_0)$
e il cerchio è centrato in $\gamma(s_0) + \frac{1}{k(s_0)} n(s_0)$
con raggio $\rho(s_0) = \frac{1}{k(s_0)}$ (RAGGIO DI CURVATURA)

Nota: data una curva γ, i centri dei cerchi osculatori formano un'altra curva C_γ che studieremo.
Conviene anche chiedersi se data una curva γ esiste una curva δ tale che $\gamma = C_\delta$ (cioè γ è la curva dei centri dei cerchi osculatori di qualche δ).

Nota: nei libri classici i cerchi osculatori sono costruiti con un "passaggio al limite" di cerchi per tre punti vicini a $\gamma(s_0)$ quando i tre punti tendono a $\gamma(s_0)$, usando pesantemente l'analisi.
Il punto di vista algebrico è decisamente più semplice

Vediamo infine la proprietà del MASSIMO:

se $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ è curva regolare

ed esiste $t_0 \in I$ t.c. $\|\gamma(t)\|$ ottiene MASSIMO LOCALE in t_0,

allora $|k(t_0)| > \frac{1}{\|\gamma(t_0)\|}$

cioè $\rho(t_0) < \|\gamma(t_0)\|$.

nella dimostrazione viene spontaneo vedere che sotto l'ipotesi detta abbiamo $\gamma(t_0) \perp \gamma'(t_0)$.

Cosa si può dire invece se c'è un MINIMO relativo?