CIK

Geometrie 2B 2019/20

Facciamo un piccolo riassunto prima di cominciare:

CURVE PARAMETRIZZATE CLASSE C^m : $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$
$t \mapsto \gamma(t)$

RIPARAMETRIZZAZIONI : $J \to I$, $\tilde{\gamma}(s) := \gamma(t(s))$
$s \mapsto t(s)$

CURVE := CURVE PARAM. / RIPARAM.

REGOLARITÀ DELLE CURVE (indipendenza di $\gamma', \gamma'', \dots, \gamma^{(k)}$)

PARAMETRO D'ARCO per curve almeno 1-REGOLARI

SISTEMA (MOBILE) DI FRENET

EQUAZIONI (DIFF.) DI FRENET, CURVATURE

calcolo di curvatura nel piano

calcolo di curvatura e torsione nello spazio.

Altre applicazioni: forma normale in $\mathbb{R}^3$

cerchi osculatori e raggio curvatura

proprietà del massimo.

Questa settimana:

Teorema fondamentale delle curve:

esistenza ed unicità modulo isometrie

Catalogo di esempi fondamentali.

Quindi, data una curva $(n-1)$-regolare in $\mathbb{R}^n$, essa determina un sistema differenziale $E' = EK$ di Frenet con K matrice antisimmetrica con termini non nulli $k_1, \dots, k_{n-1}$ solo su sotto/sopra diagonale principale, e positivi per $i < n-1$. Viceversa, conoscere le funzioni curvatura k_i determina la curva?

TEOREMA FONDAMENTALE DELLE CURVE DIFFERENZIALI:
Date $k_i(t)$ per $i = 1, \dots, n-1$, funzioni differenziabili $I \to \mathbb{R}$, che siano > 0 per $i < n-1$, allora esiste una unica curva differenziale a meno di isometrie euclidee di $\mathbb{R}^n$ avente quelle funzioni come curvature.

Per la dimostrazione diamo per noto il teorema di esistenza ed unicità locale per soluzioni di problemi di Cauchy per (sistemi lineari di) equazioni differenziali ORDINARIE (cioè in una variabile).

Esistenza: supponiamo $0 \in I$ (eventualmente, trasliamo t) e risolviamo il problema di Cauchy $\begin{cases} E' = EK \\ E(0) = \mathbb{1}_n \end{cases}$
dove K è la matrice delle curvature,
e poi usiamo $\gamma :=$ primitiva della prima colonna di E.

Unicità modulo isometrie: siano γ_1 e γ_2 soluzioni del problema ~~di Cauchy~~ scritto sopra, e confrontiamole per $t = 0 \in I$: esiste una isometria euclidea (composta di TRASLAZIONE e ISOMETRIA ORTOGONALE di $\mathbb{R}^n$) tale che:
$R\gamma_2(0) = \gamma_1(0)$ e $RE_2(0) = E_1(0)$, perché $E_1(0), E_2(0)$ sono riferimenti ortonormali.
Ma allora γ_1 e $R\gamma_2$ risolvono lo stesso problema di Cauchy (nota: R è matrice di costanti!), quindi coincidono.

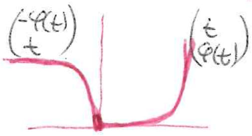
PROBLEMA: perché nel teorema fondamentale viene richiesta la positività di k_i per $i < n-1$?
Non c'è nessuna richiesta di questo tipo per risolvere i problemi di Cauchy, però è una condizione necessaria sulle curvature (di curve $(n-1)$-regolari).
Il punto è che il teorema fondamentale non dà solo la curva, ma anche tutto il riferimento (mobile) di Frénet associato.

Vediamo alcuni esempi in cui si annulla la curvatura:
usiamo $\varphi(t) = e^{-t^{-2}}$ che è funzione C^∞, anche in 0 per continuità, ma con sviluppo di Taylor in 0 che è IDENTICAMENTE 0, (quindi non è analitica!)

(0) $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$

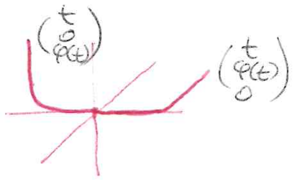
è 1-regolare (non 2-regolare in 0), e ammette un unico riferimento Frénet.

(1)



non è 1-regolare (in 0) e non ammette riferimento di Frénet.

(2)



non ammette alcun rif. Frénet:
il versore tangente esiste continuo in 0,
ma il versore normale cambia in 0
perché la curva cambia piano osculatore!

Abbiamo sempre $\tau = 0$ per continuità, ma in 0 anche $k = 0$, e la curva ne approfitta per cambiare piano...

(3) Si può aggiustare?

qui si possono trovare infiniti "riferimenti di Frénet" differenziabili, ma la curva non è 2-regolare.

Passiamo agli esempi di CURVE PIANE,
e ricordiamo che in questo caso possiamo trattare direttamente il sistema di Frenet:

$$(t,n)' = (t,n)\begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} t = \gamma' & \text{(par. d'arco)} \\ t' = kn \\ n' = -kt \end{cases}$$

usando $t = \begin{pmatrix} \cos\vartheta(s) \\ \sin\vartheta(s) \end{pmatrix}$ risulta $t' = \vartheta' \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$

quindi $k = \vartheta'$, da cui $\vartheta(s) = \int k(s)\,ds$

e infine $\gamma = \int t(s)\,ds = \begin{pmatrix} \int \cos\vartheta(s)\,ds \\ \int \sin\vartheta(s)\,ds \end{pmatrix}$.

e questo può essere usato per scrivere esplicitamente casi facili, per esempio quando la curvatura $k(s)$ risulta 0, costante, proporzionale a s oppure a $\frac{1}{s}$, ecc.

Naturalmente, possiamo anche usare il teorema fondamentale: se troviamo che una certa curva ha curvatura data da una certa funzione di s (parametro d'arco), e la curva è almeno 1-regolare (siamo nel piano), allora le curve con quella curvatura $k(s)$ sono esattamente di quel tipo.

(1) primo esempio: rette nel piano.
$\gamma = P + sv$, $\gamma' = v$, $\gamma'' = 0$, quindi $k \equiv 0$,
e viceversa per il TFC ogni curva 1-regolare di curvatura identicamente nulla è una retta.
Facciamo il viceversa anche in modo esplicito:
da $k = 0$ abbiamo $t' = kn = 0$, quindi $t = v$ costante,
quindi $\gamma = \int v\,ds = P + sv$ che è una retta.

(2) Secondo esempio: cerchi nel piano

$$\gamma = P + R\begin{pmatrix}\cos(s/R)\\ \sin(s/R)\end{pmatrix}, \quad \gamma' = \begin{pmatrix}-\sin(s/R)\\ \cos(s/R)\end{pmatrix}, \quad \gamma'' = \frac{1}{R}\begin{pmatrix}-\cos s/R\\ -\sin s/R\end{pmatrix},$$

dunque $k = \|\gamma''\| = \frac{1}{R}$ costante non nulla.

Viceversa, per il TFC, ogni curva γ regolare nel piano con k = costante non nulla è un cerchio di raggio $\frac{1}{k}$.

Facciamo il viceversa in modo esplicito:

da $\begin{cases} t' = kn \\ n' = -kt \end{cases}$ con k costante otteniamo $t'' = (kn)' = kn' = -k^2 t$

equazione differenziale ben nota ($f'' = -a^2 f$) con soluzioni le funzioni trigonometriche, da cui

$t = v_1 \cos(ks) + v_2 \sin(ks)$ con v_1, v_2 versori ortogonali (perché t è versore)

e integrando t si trova una circonferenza di raggio $\frac{1}{k}$.

(3) terzo esempio: SPIRALI DI CORNU

Cerchiamo le curve tali che $k(s)$ sia proporzionale a s, cioè la curvatura aumenti linearmente con la lunghezza d'arco.

Nota: sono curve usate come RACCORDI quando bisogna cambiare direzione senza fare discontinuità sulla curvatura: tubature (per evitare erosione e vortici), strade e ferrovie (per evitare deragliamenti) ...

Usiamo la tecnica generale.

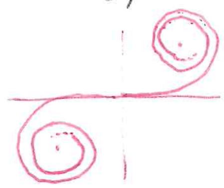
da $k(s)=s$, otteniamo $\vartheta(s)=\int k(s)\,ds = \frac{1}{2}s^2$,

quindi $t=\begin{pmatrix}\cos(\frac{1}{2}s^2)\\ \sin(\frac{1}{2}s^2)\end{pmatrix}$ e infine $\gamma=\begin{pmatrix}\int\cos(\frac{1}{2}s^2)\,ds\\ \int\sin(\frac{1}{2}s^2)\,ds\end{pmatrix}$,

e si tratta di primitive non elementari (FRESNEL).

per $s\to\infty$ tendono a $\pm\begin{pmatrix}\pi/2\\ \pi/2\end{pmatrix}$,

e l'aspetto delle spirali di Cornu è questo:



da cui si capisce il nome di spirale

(4) Prima di continuare con gli esempi, facciamo un intermezzo semi-teorico: CURVA DEI CENTRI nel piano.

Sia γ curva piana unitaria con $k \neq 0$ (sempre)

sappiamo che la curva dei centri (dei cerchi osculatori di γ) ha espressione:

$$C_\gamma = \gamma + \frac{1}{k} n$$ dove k è curvatura di γ, n è versore normale di γ.

Vogliamo capire rif. Frénet, curvatura di C_γ:

$$C_\gamma' = \gamma' + \left(\frac{1}{k}\right)' n + \frac{1}{k} n' = \cancel{t} - \frac{k'}{k^2} n - \cancel{\frac{1}{k} k t} = -\frac{k'}{k^2} n$$

da cui vediamo che $t_{C_\gamma} = \pm n$ (vettore tg di C_γ è normale di γ, quindi ortogonale al tg di γ)

e $\| C_\gamma' \| = \frac{k'}{k^2}$

(quindi al solito C_γ non è in par. d'arco)

$$C_\gamma'' = \left(-\frac{k'}{k^2}\right)' n - \frac{k'}{k^2} n' = * n - \frac{k'}{k^2}(-kt) = * n + \frac{k'}{k} t$$

da cui possiamo calcolare la curvatura:

$$k_{C_\gamma} = \frac{| C_\gamma' \, C_\gamma'' |}{\| C_\gamma' \|^3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k'/k \\ -k'/k^2 & * \end{vmatrix}}{(k'/k^2)^3} = \frac{k'^2/k^3}{k'^3/k^6} = \frac{k^3}{k'} .$$

Osservazione: per inciso, abbiamo visto che la curva dei centri ha come tangenti le normali della curva data, quindi possiamo disegnare la curva dei centri come INVILUPPO delle NORMALI (cioè curva avente quelle rette come tangenti): disegnando le normali di γ si ritrova la curva dei centri!

Facciamo comunque qualche esempio disegnando i cerchi osculatori:

Come applicazione, cerchiamo l'INVOLUTA del CERCHIO, ovvero una curva γ tale che C_γ sia un cerchio.

Quindi cerchiamo una curva γ con curvatura k tale che k^3/k' sia COSTANTE (questo caratterizza i cerchi!):

da $\frac{k'}{k^3} = -R$, otteniamo $-\frac{1}{2k^2} = -Rs$, quindi $k^2 = \frac{1}{2Rs}$

e infine k è PROPORZIONALE A $\frac{1}{\sqrt{s}}$ $\left(k = \frac{1}{\sqrt{2R}}\frac{1}{\sqrt{s}}\right)$.

Usiamo la costruzione esplicita:

$$k(s) = \frac{1}{\sqrt{2R}}\frac{1}{\sqrt{s}}, \quad \text{dunque } \vartheta(s) = \int k(s)\,ds = \int \frac{1}{\sqrt{2R}}\frac{1}{\sqrt{s}}\,ds = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R}}\sqrt{s}$$

$$t = \begin{pmatrix} \cos\vartheta(s) \\ \sin\vartheta(s) \end{pmatrix}$$

$$\gamma = \int t(s)\,ds = R\begin{pmatrix} x\sin(x) - \cos(x) \\ -x\cos(x) - \sin(x) \end{pmatrix}$$

$$\int \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R}}\sqrt{s}\right)ds = \int \cos(x)\,Rx\,dx = R\left(x\sin(x) - \cos(x)\right)$$

dove $x^2 = \frac{2}{R}s$

$$2x\,dx = \frac{2}{R}\,ds$$

$$\int \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R}}\sqrt{s}\right)ds = R\left(-x\cos(x) - \sin(x)\right)$$

Curva da non confondere con la spirale di Archimede che vedremo poi.

(5) caratterizziamo le SPIRALI LOGARITMICHE come le curve (1-regolari) con K proporzionale a $1/s$:

se $\gamma(t) = a e^{bt}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$ otteniamo: $\gamma' = a e^{bt}\begin{pmatrix}-\sin t + b\cos t\\ \cos t + b\sin t\end{pmatrix}$

dunque $\|\gamma'\| = a e^{bt}(1+b^2)^{\frac{1}{2}}$, e $s(t) = \int \|\gamma'\|\, dt = a \frac{\sqrt{1+b^2}}{b} e^{bt}$

poi $\gamma'' = a e^{bt}\begin{pmatrix}-\cos t - 2b\sin t + b^2\cos t\\ -\sin t + 2b\cos t + b^2\sin t\end{pmatrix}$, e $|\gamma'\,\gamma''| = a^2 e^{2bt}(1+b^2)$

da cui $K(t) = \frac{|\gamma'\,\gamma''|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{a^2 e^{2bt}(1+b^2)}{a^3 e^{3bt}(1+b^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a e^{bt}\sqrt{1+b^2}} = \frac{1}{b}\frac{1}{s(t)}$

quindi K è proporzionale a $\frac{1}{s}$.

Dal teorema fondamentale deduciamo il viceversa (ogni curva 1-regolare piana con K proporzionale a $1/s$ è una spirale logaritmica), come pure si può fare direttamente:

da $K = 1/s$ otteniamo $\vartheta = \int K\, ds = \lg(s)$,

dunque $\gamma' = \begin{pmatrix}\cos(\lg s)\\ \sin(\lg s)\end{pmatrix}$ e usando $t = \lg s$, $dt = \frac{1}{s} ds$, $ds = e^t dt$

$\gamma = \int \gamma(s)\, ds = \frac{e^t}{2}\begin{pmatrix}\sin t + \cos t\\ \sin t - \cos t\end{pmatrix} = * e^T\begin{pmatrix}\cos T\\ \sin T\end{pmatrix}$ per opportuno T,

quindi una spirale logaritmica

Vi sono molte proprietà geometriche delle spirali logaritmiche, che sono state intensamente studiate: consiglierei di guardare bene nelle dispense.

Per esempio, la curva dei centri di una spirale log è ancora una spirale log.

(6) La SPIRALE DI ARCHIMEDE invece è come di parametrizzaz.

$$\gamma = a t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \text{quindi } \gamma' = a \begin{pmatrix} \cos t - t \sin t \\ \sin t + t \cos t \end{pmatrix}, \quad \|\gamma'\| = a\sqrt{1+t^2}$$

(dunque non è in param. d'arco).

$$\text{e } \gamma'' = a \begin{pmatrix} -2\sin t - t\cos t \\ 2\cos t - t \sin t \end{pmatrix}$$

quindi otteniamo:

$$s(t) = \int a (1+t^2)^{\frac{1}{2}}\, dt = \frac{a}{2}\left(t(1+t^2)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{settsh}(t) \right)$$

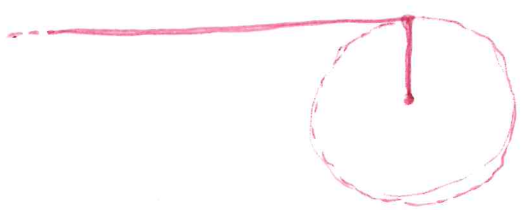
$$= \frac{a}{2}\left(t(1+t^2)^{\frac{1}{2}} + \lg\left(t + (1+t^2)^{\frac{1}{2}}\right) \right)$$

e

$$K(t) = \frac{|\gamma' \gamma''|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{a^2(2+t^2)}{a^3(1+t^2)^{3/2}} = \frac{1}{a}\,\frac{2+t^2}{(1+t^2)^{3/2}}$$

ed è difficile vedere una relazione diretta tra K ed s in questo caso.

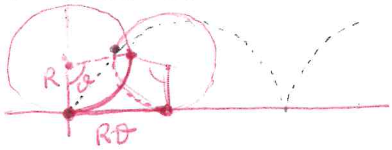
Anche se non possiamo ancora giustificarlo (lo faremo parlando di evolute/involute) vediamo le differenze tra spirale Archimede ed involute del cerchio: se poniamo una squadra retta come disegnato



e facciamo ROTOLARE senza STRISCIARE il lato lungo sul cerchio, allora:

- l'estremo del lato corto disegna una spirale Archim.
- l'angolo della squadra disegna una involuta del cerchio.

(7) CICLOIDE della RETTA: è la curva data dalla traiettoria di un punto di una circonferenza che rotola senza strisciare su una retta:



$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} R\vartheta \\ R \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \vartheta-\sin\vartheta \\ 1-\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

e applicando la yoga standard otteniamo:

$$\gamma' = R\begin{pmatrix} 1-\cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}, \quad \|\gamma'\| = R\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}, \quad n = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\vartheta)}}\begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ 1-\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\gamma'' = R\begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad |\gamma', \gamma''| = R^2\begin{vmatrix} 1-\cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{vmatrix} = R^2(\cos\vartheta - 1)$$

$$K = \frac{|\gamma', \gamma''|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{R^2(\cos\vartheta-1)}{R^3\sqrt{2}^3\sqrt{1-\cos\vartheta}^3} = -\frac{1}{R\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\vartheta}}.$$

È interessante osservare la curva dei centri:

$$C_\gamma = \gamma + \frac{1}{K}n = R\begin{pmatrix} \vartheta-\sin\vartheta \\ 1-\cos\vartheta \end{pmatrix} + \left(-R\sqrt{2}^3\sqrt{1-\cos\vartheta}\right)\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\vartheta}}\begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ 1-\cos\vartheta \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} \vartheta+\sin\vartheta \\ -1+\cos\vartheta \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \vartheta-\sin(\pi+\vartheta) \\ -1-\cos(\pi+\vartheta) \end{pmatrix} =$$

$$= R\begin{pmatrix} -\pi \\ -2 \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} (\pi+\vartheta)-\sin(\pi+\vartheta) \\ 1-\cos(\pi+\vartheta) \end{pmatrix}$$

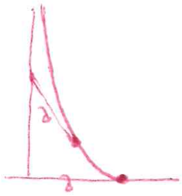
che quindi è un cicloide TRASLATO e riparametrizzato per traslazione di π.

Problema (difficile): abbiamo già visto due curve (spirali log. e cicloide) che sono isometriche (?) alla loro curva dei centri: si possono caratterizzare le curve con questa proprietà?
Cosa succede se si impone che K sia uguale a $\frac{K^3}{K'}$?

Suggerimento: guardare EPI/IPO CICLOIDI del cerchio.

(8) TRATTRICE: importante perché è la più semplice curva da TRASCINAMENTO, e perché la superficie di rotazione attorno all'asintoto (si chiama PSEUDOSFERA DI BELTRAMI) è stato il primo modello euclideo (non completo) per la geometria del PIANO IPERBOLICO.

Costruzione: curva piana passante per $\binom{a}{0}$ e tale che in ogni punto il segmento di tangente fino all'asse delle ordinate ha lunghezza COSTANTE a.



$\gamma=\binom{x}{y}$, $\gamma'=\binom{x'}{y'}$, intersezione con $x=0$ è $\binom{0}{y-\frac{x}{x'}y'}$

tangente $\binom{x}{y}+\alpha\binom{x'}{y'}$

e quindi otteniamo $\boxed{x^2+\frac{x^2}{x'^2}y'^2=a^2}$

Da questa espressione possiamo ricavare:

$$\frac{y'}{x'}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} \qquad \text{e} \qquad x'^2+y'^2=\frac{a^2}{x^2}x'^2$$

e derivando:

$$\frac{y''x'-y'x''}{x'^3}=-\frac{a^2}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}$$

che permette il calcolo

$$k=\frac{\begin{vmatrix}x'&x''\\y'&y''\end{vmatrix}}{\sqrt{x'^2+y'^2}^3}=\frac{x}{a\sqrt{a^2-x^2}}$$

(senza nemmeno calcolare γ)

quindi se unitaria: $\frac{a^2}{x^2}x'^2=1$

che permette una riparametrizzazione esplicita:

$\frac{x'}{x}=\frac{1}{a}$, quindi $x=ae^{t/a}$ (perché $x(0)=a$)

$$y'=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}x'=\sqrt{1-e^{2t/a}}$$

che si può riparametrizzare in vari modi, dando 3 espressioni per la trattrice:

$$\begin{cases}x=ae^{t/a}\\ y=a\left(\sqrt{1-e^{2t/a}}-\mathrm{settch}(e^{-t/a})\right)\end{cases} \qquad \begin{cases}x=a\sin\vartheta\\ y=a(\cos\vartheta-\mathrm{settth}(\cos\vartheta))\end{cases} \qquad \begin{cases}x=a/\cosh(u)\\ y=a(\mathrm{th}\,u-u)\end{cases}$$

(in parametro d'arco) (più semplice!)

Problema: applicare lo yoga standard all'ultima espressione trovare che $k=\frac{1}{sh(u)}$ e che la curva dei centri è una CATENARIA (grafico della funzione ch).

Suggerimento: traiettoria della ruota posteriore della bici, nota quella anteriore?

Passiamo oggi agli esempi tridimensionali e generali.
Già in dimensione 3 non c'è un modo elementare per risolvere il sistema di Frénet

$$(t,n,b)' = (t,n,b)\begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} t' = \kappa n \\ n' = -\kappa t + \tau b \\ b' = -\tau n \end{cases}$$

e quindi useremo il teorema fondamentale per caratterizzare certe curve in base a κ, τ.
Per il piano abbiamo caratterizzato per esempio:
rette, cerchi, spirali cornu, spirali log, involute del cerchio
come aventi risp. curvatura nulla, costante, proporzionale a $s, \frac{1}{s}, \frac{1}{\sqrt{s}}$.

Per curve nello spazio cominciamo con le osservazioni facili:

(0) una curva 2-regolare è PIANA (cioè sta su un piano) sse $\tau \equiv 0$ (torsione identicamente nulla) questo equivale a dire che il vettore binormale è costante.

(1) le rette hanno identicamente $\kappa \equiv 0$, $\tau \equiv 0$

(2) i cerchi sono caratterizzati da $\tau \equiv 0$ e κ costante $\neq 0$.

In questa lezione vediamo altri esempi:

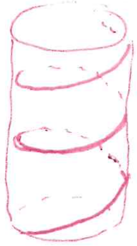
(3) eliche circolari (e curve dei canti)
(4) eliche generali
(5) curve sferiche (e alcune derivate)
(6) alcuni esempi di curve derivate o primitive
(7) costruzione generale di evolute/involute
(8) nozione di curve parallele

ed eventualmente altri problemi/costruzioni.

(3) ELICHE CIRCOLARI : sono curve che si ottengono con passo costante su un cilindro retto di base circolare:

$$\gamma = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix}, \quad \gamma' = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ b \end{pmatrix}, \quad \gamma'' = \begin{pmatrix} -a\cos t \\ -a\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma' \times \gamma'' = \begin{pmatrix} ab\sin t \\ -ab\cos t \\ a^2 \end{pmatrix},$$

$\left(\underset{>0}{a, b \text{ costanti}}\right)$ $\quad \|\gamma'\| = \sqrt{a^2+b^2}, \quad \gamma''' = \begin{pmatrix} a\sin t \\ -a\cos t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|\gamma' \times \gamma''\| = a\sqrt{a^2+b^2}$



da cui ricaviamo:

$$K = \frac{\|\gamma' \times \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\tau = \frac{\gamma' \times \gamma'' \cdot \gamma'''}{\|\gamma' \times \gamma''\|^2} = \frac{b}{a^2+b^2}$$

in particolare, K e τ sono costanti determinate da a, b e viceversa:

$$a = \frac{K}{K^2+\tau^2}$$

$$b = \frac{\tau}{K^2+\tau^2}$$

perché $K^2+\tau^2 = \frac{1}{a^2+b^2}$.

Dunque, per il teorema fondamentale, le curve 2-regolari nello spazio con curvatura e torsione COSTANTI NON NULLE sono eliche circolari.

Si può vedere questo anche direttamente dal sistema Frenet:

$$\begin{cases} t' = Kn \\ n' = -Kt + \tau b \\ b' = -\tau n \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} n'' &= -Kt' + \tau b' \\ &= -(K^2+\tau^2)n \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} t' &= Kn \\ t &= \begin{pmatrix} * \sin s\sqrt{} \\ * \cos s\sqrt{} \\ b \end{pmatrix} \end{aligned} \Rightarrow \gamma' = t$$

$$n = \begin{pmatrix} \cos s\sqrt{K^2+\tau^2} \\ \sin s\sqrt{K^2+\tau^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

γ ELICA CIRCOLARE.

Vediamo la curva dei centri di un'elica circolare:

$$C_\gamma = \gamma + \frac{1}{K} n = \begin{pmatrix} a\cos t \\ a\sin t \\ bt \end{pmatrix} + \frac{a^2+b^2}{a} \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2/a \cos t \\ -b^2/a \sin t \\ bt \end{pmatrix}$$

quindi è un'elica circolare COASSIALE con parametri $-\frac{b^2}{a}, b$,

da cui $\quad K_{C_\gamma} = \dfrac{-b^2/a}{b^4/a^2 + b^2} = -\dfrac{a}{a^2+b^2}$

$$\tau_{C_\gamma} = \frac{-b}{b^4/a^2 + b^2} = -\frac{a^2}{b(a^2+b^2)}$$

e la curva dei centri osculatori di C_γ è elica circolare con parametri $-\frac{b^2}{-b^2/a} = a$, b; quindi $C_{C_\gamma} = \gamma$.

(4) ELICHE (GENERALI): γ curva in $\mathbb{R}^3$ con $k\tau \neq 0$. Sono equiv:

① τ/k COSTANTE

② le tangenti formano angolo fisso con un vettore v fissato

③ le normali sono parallele a un fissato piano ($\perp v$)

④ le binormali formano angolo fisso con un vettore v fissato

⑤ sono del tipo $\begin{pmatrix} a\int \sin\vartheta(t)\,dt \\ a\int \cos\vartheta(t)\,dt \\ bt \end{pmatrix}$ con a, b costanti

Nota: $t\cdot v$ costante $\Leftrightarrow (t\cdot v)' = 0 \Leftrightarrow t'\cdot v = 0 \Leftrightarrow k\,n\cdot v = 0 \Leftrightarrow n \perp v$

$b\cdot v$ costante $\Leftrightarrow (b\cdot v)' = 0 \Leftrightarrow b'\cdot v = 0 \Leftrightarrow -\tau n\cdot v = 0 \Leftrightarrow n\perp v$

e quindi ②, ③, ④ sono equivalenti tra loro.

mostriamo che ③ $\Rightarrow$ ①:

$n\perp v \Rightarrow v \in \langle t, b\rangle$, $v = t\cos\vartheta + b\sin\vartheta$ (con ϑ costante per ②③)

(derivando) $\Rightarrow 0 = v' = t'\cos\vartheta + b'\sin\vartheta = (k\cos\vartheta - \tau\sin\vartheta)n$

$\Rightarrow k\cos\vartheta - \tau\sin\vartheta = 0 \Rightarrow k/\tau = \operatorname{tg}\vartheta$ COSTANTE.

mostriamo che ① $\Rightarrow$ ②, ④:

k/τ COSTANTE $=: \operatorname{tg}\vartheta$, e usiamo il vettore $v := t\cos\vartheta + b\sin\vartheta$.

Si vede subito che $v' = 0$, cioè v costante e ha angolo fisso con t, b.

mostriamo che ⑤ $\Rightarrow$ ① usando lo yoga standard:

$$\gamma' = \begin{pmatrix} a\sin\vartheta \\ a\cos\vartheta \\ b\end{pmatrix},\ \gamma'' = \begin{pmatrix} a\vartheta'\cos\vartheta \\ -a\vartheta'\sin\vartheta \\ 0\end{pmatrix},\ \gamma''' = \vartheta'^2\begin{pmatrix} -a\sin\vartheta \\ -a\cos\vartheta \\ 0\end{pmatrix} + \vartheta''\begin{pmatrix} a\cos\vartheta \\ -a\sin\vartheta \\ 0\end{pmatrix},$$

$$\|\gamma'\| = \sqrt{a^2+b^2},\ \gamma'\times\gamma'' = \begin{pmatrix} ab\vartheta'\sin\vartheta \\ -ab\vartheta'\cos\vartheta \\ -a^2\vartheta'\end{pmatrix},\ \|\gamma'\times\gamma''\| = |\vartheta'|\,a\sqrt{a^2+b^2}$$

e quindi $k = \dfrac{\|\gamma'\times\gamma''\|}{\|\gamma'\|^3} = \dfrac{a}{a^2+b^2}|\vartheta'|$ e $\tau = \dfrac{\gamma'\times\gamma''\cdot\gamma'''}{\|\gamma'\times\gamma''\|^2} = -\dfrac{b}{a^2+b^2}\vartheta'$

da cui $k/\tau = a/b$ costante (possiamo supporre $\vartheta' > 0$).

nota: γ è in p.d'arco sse $a^2+b^2 = 1$, e inoltre $k^2+\tau^2 = \dfrac{\vartheta'^2}{a^2+b^2}$.

mostriamo che ① $\Rightarrow$ ⑤ usando il teorema fondamentale:

data γ con k/τ costante, cerchiamo a, b, ϑ che realizzino quei k, τ:

abbiamo allora $\begin{cases} a = \dfrac{k}{k^2+\tau^2}\vartheta' \\ b = \dfrac{\tau}{k^2+\tau^2}\vartheta' \end{cases}$ e usando $a^2+b^2=1$ possiamo ricavare a, b, ϑ', quindi γ a meno di isometrie.

mostriamo che ②,③ $\Rightarrow$ ⑤ direttamente:

$v := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ con $\begin{matrix} v\cdot t \text{ costante} \\ v\cdot n = 0\end{matrix}$ dà $\gamma' = t = \begin{pmatrix} a\sin\vartheta(t) \\ a\cos\vartheta(t) \\ b\end{pmatrix}$, quindi γ come in ⑤.

con $a^2+b^2 = 1$

NOTA: se poi k è COSTANTE, da t' si trova $k = a\vartheta'$,

quindi $\vartheta' = k/a$ COSTANTE, $\vartheta = \frac{k}{a}s$, e si ritrovano le eliche circolari.

(5) Facciamo un intermezzo semi-teorico sulle curve definite dal riferimento di Frénet di una data γ: supponiamo 2-regolare, unitaria, con t, n, b e κ, τ come curvature

La <u>curva delle tangenti</u>, o <u>indicatrice delle tangenti</u> è $\delta := t = \gamma'$ e applicando lo yoga otteniamo:

$\delta' = \gamma'' = \kappa n$, dunque $t_\delta = n$, $\|\delta'\| = \kappa$,

$\delta'' = (\kappa n)' = \kappa' n + \kappa n' = \kappa' n + \kappa(-\kappa t + \tau b) = -\kappa^2 t + \kappa' n + \kappa\tau b$

dunque $n_\delta = \dfrac{-\kappa t + \tau b}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$ e $b_\delta = t_\delta \times n_\delta$

$\delta' \times \delta'' = \kappa^2\tau t + \kappa^3 b$,

dunque $\kappa_\delta = \dfrac{\|\delta' \times \delta''\|}{\|\delta'\|^3} = \dfrac{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}{\kappa} = \sqrt{1+\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)^2}$

$\delta''' = (-\kappa^2 t + \kappa' n + \kappa\tau b)' = \cdots$ dopo un po' di conti $\cdots =$

$= (-3\kappa\kappa')t + * n + (2\kappa'\tau + \kappa\tau')b$

non abbiamo calcolato il coefficiente di n perché non serve nel calcolo successivo:

$\tau_\delta = \dfrac{\delta' \times \delta'' \cdot \delta'''}{\|\delta' \times \delta''\|^2} = \cdots = \dfrac{-\kappa'\tau + \kappa\tau'}{\kappa(\kappa^2+\tau^2)} =$

$= \dfrac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}(\tau/\kappa)'$

Per esercizio, provare le curve $\nu := n$ (normale)
$\beta := b$ (binormale)

E' interessante vedere anche le primitive:

$\mu := \int n\,ds$

$\mu' = n$

$\mu'' = n' = -\kappa t + \tau b$

$\mu' \times \mu'' = \tau t + \kappa b$

$\mu''' = -\kappa' t - (\kappa^2+\tau^2)n + \tau' b$

$\kappa_\mu = \|\mu''\| = \sqrt{\kappa^2+\tau^2}$

$\tau_\mu = \dfrac{\mu' \times \mu'' \cdot \mu'''}{\|\mu''\|^2} = \dfrac{(\tau/\kappa)'}{1+(\tau/\kappa)^2}$

$\alpha := \int b\,ds$

$\alpha' = b$

$\alpha'' = b' = -\tau n$, $\alpha' \times \alpha'' = \tau t$

$\alpha''' = -\tau' n - \tau n' = \kappa\tau t - \tau' n - \tau^2 b$

$\kappa_\alpha = \|\alpha''\| = |\tau|$

$\tau_\alpha = \dfrac{\alpha' \times \alpha'' \cdot \alpha'''}{\|\alpha''\|^2} = \dfrac{\kappa\tau^2}{\tau^2} = \kappa$

Quindi, se $\tau > 0$, allora la primitiva della binormale ha κ e τ SCAMBIATE rispetto a γ.

(6) CURVE SFERICHE : sono curve unitarie, regolari con $\tau\kappa\kappa' \neq 0$ contenute in una superficie sferica (es. normale, tangente, binorm.)

vogliamo vedere che sono caratterizzate da queste proprietà:

① $\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'$ oppure da ①' $\frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{1}{\kappa}\right)'^2 \frac{1}{\tau^2} = R^2$ COSTANTE

o equivalentemente, usando $\begin{cases} \rho = 1/\kappa \\ \sigma = 1/\tau \end{cases}$, quindi $\begin{cases} \rho' = -\kappa'/\kappa^2 \\ \sigma\rho' = -\kappa'/\tau\kappa^2 \end{cases}$

da ② $\frac{\rho}{\sigma} + (\sigma\rho')' = 0$ oppure ②' $\rho^2 + (\sigma\rho')^2 = R^2$ COSTANTE.

Per passare da ① a ② (e da ①' a ②') basta sostituire.

Per vedere ② ⇔ ②' basta derivare ②' : $2\rho'(\rho + \sigma(\rho'\sigma)') = 0$.

mostriamo che $\gamma \subseteq$ sfera (centro C e raggio R) implica ①:

per ipotesi: $(\gamma - C)\cdot(\gamma - C) = R^2$ costante

derivando: $(\gamma - C)\cdot\gamma' = 0$, cioè $(\gamma - C)\cdot t = 0$

derivando: $\gamma'\cdot\gamma' + (\gamma - C)\cdot\gamma'' = 0 \Rightarrow 1 + (\gamma - C)\cdot\kappa n = 0$

quindi $(\gamma - C)\cdot n = -\frac{1}{\kappa}$

derivando: $\gamma'\cdot\kappa n + (\gamma - C)\cdot\kappa' n + (\gamma - C)\cdot\kappa n' = 0$

$0 + \kappa'\left(-\frac{1}{\kappa}\right) + \kappa\tau(\gamma - C)\cdot b = 0$

quindi $(\gamma - C)\cdot b = \kappa'/\kappa^2\tau$

derivando: $\cancel{\gamma'\cdot b} + \underbrace{(\gamma - C)\cdot b'}_{(\gamma - C)\cdot(-\tau n)} = (\kappa'/\kappa^2\tau)'$ da cui $\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)'$.

nota: dalle formule otteniamo $\gamma - C = -\frac{1}{\kappa} n + \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} b$
da cui segue ①'.

mostriamo il viceversa, supponendo che valga ①:

definiamo $C := \gamma + \frac{1}{\kappa} n + \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau} b$ (apparentemente dipende da s)

derivando $C' = \gamma' - \frac{\kappa'}{\kappa^2} n + \frac{1}{\kappa}(-\kappa t + \tau b) + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' b + \frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}(-\tau n) = 0$

quindi C è COSTANTE, e $\|\gamma - C\|^2 = \frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2$ COSTANTE per ①',

quindi γ è contenuta nella sfera centro C e raggio R.

Supponiamo ora che γ sia curva (unitaria) sulla SFERA UNITARIA.
poniamo $J := \gamma \times \gamma' \cdot \gamma'' = |\gamma\, \gamma'\, \gamma''|$, quindi $J' = |\gamma\, \gamma'\, \gamma'''|$,
e vogliamo vedere che $k = \sqrt{1+J^2}$, $\tau = J'/1+J^2$,
e γ è determinata da J (per il teorema fondamentale).
Inoltre γ è cerchio sse J costante,
γ è cerchio massimo (della sfera) sse $J = 0$.

Qui conviene usare un riferimento ortonormale mobile che non è quello di Frénet: usiamo $\gamma, \gamma', \gamma \times \gamma'$.

sappiamo che
$\gamma \cdot \gamma = 1$ (perché $\gamma \subseteq$ sfera unitaria)
$\gamma \cdot \gamma' = 0$ ($\gamma \perp \gamma'$ perché $\|\gamma\|$ costante)
$\gamma' \cdot \gamma' = 1$ (perché γ è curva unitaria, cioè in p. d'arco)
$\gamma' \cdot \gamma'' = 0$ ($\gamma' \perp \gamma''$)

derivando $\gamma \cdot \gamma' = 0$ otteniamo $\gamma' \cdot \gamma' + \gamma \cdot \gamma'' = 0$, dunque $\gamma \cdot \gamma'' = -1$
e derivando questa otteniamo $\gamma' \cdot \gamma'' + \gamma \cdot \gamma''' = 0$, dunque $\gamma \cdot \gamma''' = 0$

possiamo scrivere
$$\gamma'' = (\gamma \cdot \gamma'')\gamma + (\gamma' \cdot \gamma'')\gamma' + (\gamma \times \gamma' \cdot \gamma'')(\gamma \times \gamma') = -\gamma + J(\gamma \times \gamma')$$

quindi
$$k = \|\gamma''\| = \sqrt{1+J^2}$$
e
$$\tau = \frac{\gamma' \times \gamma'' \cdot \gamma'''}{\|\gamma''\|^2} = \frac{\gamma' \times (-\gamma + J(\gamma \times \gamma')) \cdot \gamma'''}{\|\gamma''\|^2} = \frac{\gamma \times \gamma' \cdot \gamma'''}{\|\gamma''\|^2} = \frac{J'}{1+J^2}$$

così J determina k e τ, quindi per il teorema fondamentale determina γ a meno di isometrie dello spazio, ed è curva sferica perché si verifica che soddisfa alla equazione differenziale vista prima.

Infine: J costante $\Leftrightarrow J' = 0 \Leftrightarrow \tau = 0 \Leftrightarrow \gamma$ piana
(quindi intersezione di sfera con piano)

$J = 0 \Leftrightarrow (\tau = 0 \text{ e})\ k = 1 \Leftrightarrow$ cerchio di raggio 1
(massimo possibile, essendo su sfera unitaria!).

Per finire con le curve unitarie sulla sfera unitaria, consiglierei di esplorare alcune curve associate:

$\delta := \gamma'$ $\qquad\qquad\qquad$ $\eta := \gamma \times \gamma'$

sono curve contenute nella sfera unitaria, ma non sono in parametro d'arco usando il parametro di γ: calcolarne curvatura e torsione.

Vediamo invece cosa succede dalle loro primitive:

$\lambda := \int \gamma \, ds$

$\lambda' = \gamma$

$\lambda'' = \gamma'$, $\lambda' \times \lambda'' = \gamma \times \gamma'$

$\lambda''' = \gamma'' = -\gamma + J(\gamma \times \gamma')$

dunque $k_\lambda = 1$

$\tau_\lambda = J$

$\mu := \int \gamma \times \gamma' \, ds$

$\mu' = \gamma \times \gamma'$

$\mu'' = \gamma \times \gamma'' = -J\gamma'$, $\mu' \times \mu'' = J\gamma$

$\mu''' = -J'\gamma' - J\gamma'' = J\gamma - J'\gamma' - J^2(\gamma \times \gamma')$

dunque $k_\mu = |J|$

$\tau_\mu = 1$

Cioè troviamo curve unitarie (non sferiche, naturalmente!) di curvatura 1 e idem di torsione 1.
E' vero che tutte le curve di curvatura 1 (risp. torsione 1) si trovano in questo modo?

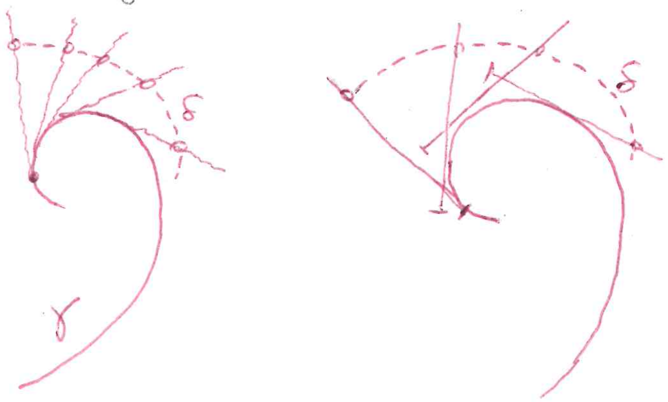
Problema: in generale si sanno caratterizzare le curve sferiche in $\mathbb{R}^n$, c'è qualche parte nelle dispense come esame passato.

(7) Vediamo una costruzione generale: date due curve γ, δ si dice che γ è EVOLUTA di δ oppure che δ è INVOLUTA (o EVOLVENTE) di γ se valgono: $\begin{cases} \delta(t) \in \text{tangente a } \gamma \text{ in } \gamma(t) & \text{per ogni } t. \\ \gamma'(t) \cdot \delta'(t) = 0 \end{cases}$

Vogliamo vedere che queste condizioni sono equivalenti a:

$$\delta(s) = \gamma(s) + (L-s)\gamma'(s) \quad \text{con } L \text{ COSTANTE opportuna.}$$

Questa formula permette una interpretazione/costruzione geometrica di involute δ della curva γ: δ è descritta dall'estremo di un filo che si avvolge su γ, oppure è la traiettoria di un punto su una retta tangente a γ che rotola su γ senza strisciare.



Mostriamo l'equivalenza delle due condizioni:

($\Leftarrow$) ovvio: se $\delta(s) = \gamma(s) + (L-s)\gamma'(s)$

allora $\delta(s) \in$ tangente $\gamma(s) + \langle \gamma'(s) \rangle$

e $\gamma'(s) \cdot \delta'(s) = \gamma'(s) \cdot \left(\cancel{\gamma'(s)} - \cancel{\gamma'(s)} + (L-s)\gamma''(s) \right) = 0$

($\gamma' \cdot \gamma'' = 0$ perché γ è in p. d'arco)

($\Rightarrow$) siccome $\delta(s) \in$ tangente

$= \gamma(s) + \ell(s)\gamma'(s)$ con $\ell(s)$ scalare

ma allora $\delta'(s) = \gamma'(s) + \ell'(s)\gamma'(s) + \ell(s)\gamma''(s)$

e l'ortogonalità con $\gamma'(s)$ dà

$$1 + \ell'(s) = 0$$

quindi $\ell'(s) = -1$, cioè $\ell(s) = L - s$ con L costante.

Vediamo la situazione di evoluta/involute nel PIANO:

① proprietà di δ note γ (unitaria con t, n, k):

$$\delta = \gamma + (L-s)\gamma'$$

$$\delta' = \gamma' - \gamma' + (L-s)\gamma'' = (L-s)\gamma'' = (L-s)\,k\,n \text{, dunque } t_\delta = n$$

$$\|\delta'\| = (L-s)k$$

$$\delta'' = -kn + (L-s)k'n + (L-s)\,k\,n' =$$

$$= -(L-s)k^2\,t + ((L-s)k' - k)\,n$$

quindi $k_\delta = \dfrac{|\delta'\ \delta''|}{\|\delta'\|^3} = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -(L-s)k^2 \\ (L-s)k & * \end{vmatrix}}{(L-s)^3 k^3} = \dfrac{1}{L-s}$

② nel piano $C_\gamma = \gamma + \frac{1}{k} n$ è EVOLUTA di γ

perché $C_\gamma' = \gamma' + \left(\frac{1}{k}\right)' n + \frac{1}{k}(-kt)$ è ortogonale a t

e $\gamma = C_\gamma - \frac{1}{k} n$ appartiene alla tangente a C_γ

nota: la condizione di ortogonalità è vera in $\mathbb{R}^n$,

ma la seconda condizione richiede di essere nel piano!

quindi nel piano:

EVOLUTA DI γ = CURVA DEI CENTRI DI γ

= inviluppo delle normali di γ

INVOLUTE DI γ = curve δ con $C_\delta = \gamma$

= curve δ tali che γ è l'inviluppo delle normali di δ

= curve δ aventi come NORMALI le tangenti di γ.

(si tratta di una famiglia di CURVE PARALLELE)

La situazione nello SPAZIO è più complicata:

① se γ è unitaria con t, n, b, k, τ, e $\delta = \gamma + (L-s)\gamma'$,

mostrare che: $k_\delta = \dfrac{1}{L-s}\,\dfrac{\sqrt{k^2+\tau^2}}{k}$

$$\tau_\delta = \frac{1}{L-s}\,\frac{k\,(\tau/k)'}{k^2+\tau^2}$$

② studiare anche $C_\gamma = \gamma + \frac{1}{k} n$,

in particolare vedere che C_γ' è ortogonale a t,

ma non è multiplo di n

quindi non possiamo ragionare come nel piano!

(8) Vediamo la nozione di curve parallele:
due curve $\gamma(t)$ e $\delta(t)$ si dicono parallele se per ogni $t\in I$
si ha $n_\gamma(t) = n_\delta(t)$ e $\gamma(t)-\delta(t)$ è vettore parallelo alle normali comuni.

Da questo segue che $\delta(t) = \gamma(t) + \lambda(t)\, n_\gamma(t)$
e derivando otteniamo $\delta' = \gamma' + \lambda' n_\gamma + \lambda\, n_\gamma'$
e siccome $\delta', \gamma', n_\gamma'$ sono ortogonali a n_γ, deduciamo $\lambda' = 0$,
cioè λ costante, e quindi $\|\gamma(t)-\delta(t)\|$ è COSTANTE.

Nel piano quest'ultima condizione (e l'equugaglianza dei versori normali) è equivalente alla definizione data

Situazione nel piano: per ogni curva γ le curve che si ottengono tramite $\gamma + \lambda n =: \delta$ con λ costante sono parallele di γ perché $\delta' = \gamma' + \lambda n' = (1-\lambda\kappa)t$ e quindi $t_\delta = t$, $n_\delta = n$ (e ovviamente $\gamma - \delta$ è multiplo di n).
Calcolando $\delta'' = -\lambda\kappa' t + (1-\lambda\kappa)\kappa n$ si vede $\kappa_\delta = \dfrac{\kappa}{|1-\lambda\kappa|}$.

Situazione nello spazio: una curva $\delta = \gamma + \lambda n$ (λ costante) è parallela a γ se e solo se $n_\delta = n$, cioè ha stesse normale:

$$\delta' = \gamma' + \lambda n' = t + \lambda(-\kappa t + \tau b) = (1-\kappa\lambda)t + \lambda\tau b$$

$$\delta'' = -\kappa'\lambda t + (1-\kappa\lambda)t' + \lambda\tau' b + \lambda\tau b' = -\kappa'\lambda t + (1-\lambda(\kappa^2+\tau^2))\kappa n + \lambda\tau' b$$

e quindi $n_\delta = n$ <u>sse</u> $\begin{vmatrix} 1-\kappa\lambda & -\lambda\kappa' \\ \lambda\tau & \lambda\tau' \end{vmatrix} = 0$

<u>sse</u> $(1-\kappa\lambda)\tau' + \lambda\tau\kappa' = 0$

<u>sse</u> $\tau' + \lambda(\kappa'\tau - \kappa\tau') = 0$

<u>sse</u> $\dfrac{\tau'}{\tau^2} = -\lambda\dfrac{\kappa'\tau - \kappa\tau'}{\tau^2}$ <u>sse</u> $-\left(\dfrac{1}{\tau}\right)' = -\lambda\left(\dfrac{\kappa}{\tau}\right)'$

<u>sse</u> $\dfrac{1}{\tau} = \lambda\dfrac{\kappa}{\tau} + c$ <u>sse</u> $\lambda\kappa + c\tau = 1$
per opportune costanti λ, c.

Per esercizio si può vedere anche il viceversa:
se γ è tale che esistono λ, c costanti con $\lambda\kappa + c\tau = 1$, allora ammette curve parallele.
Queste curve si dicono CURVE DI BERTRAND