Qualche considerazione sul corso e sui corsi paralleli.

Diamo una panoramica sugli argomenti che riguardano le superficie (diff. $\subseteq \mathbb{R}^3$):

① Definizioni di superficie regolari e loro spazi tangente
funzioni differenziabili tra superficie e loro differenziali
Calcoli METRICI sulle superficie: PRIMA FORMA FONDAMENTALE

② Teoria di Gauss delle curvature:
MAPPA DI GAUSS, MAPPA DI WEINGARTEN,
Definizione della SECONDA FORMA FOND. e di CURVATURE
Teorema EGREGIUM di Gauss.

③ Studio delle curve contenute nelle superficie:
rif. di Frénet e di Darboux { curvature geodetica e normale; torsione geodetica }
Linee di curvatura
asintotiche
geodetiche (eq. diff. e casi particolari)

④ Cenni su argomenti più avanzati:
Teorema di Gauss-Bonnet (triangoli su superficie)
Derivate covarianti (calcolo diff. intrinseco)
Equazioni strutturali delle sup. (Gauss e Codazzi Mainardi)
Teorema Fondam. delle superficie

⊛ Esempi classici:
(a) piano, quadriche
(b) sfera e sue proiezioni
(c) cilindri
(d) coni
(e) sviluppabili delle tg
(f) superficie di ROTAZIONE, TORI
(g) elicoidi
(h) superficie RIGATE
...

Per dare la definizione di superficie (immersa in $\mathbb{R}^3$) saremo un po' più pedanti che per le curve:

un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice <u>SUPERFICIE REGOLARE PARAMETRIZZATA</u> se esistono $D \overset{\circ}{\subseteq} \mathbb{R}^3$, $U \overset{\circ}{\subseteq} \mathbb{R}^2$, $\varphi : U \longrightarrow D$ funzione $\mathcal{C}^\infty$ con jacobiana di rango massimo $(=2)$ che induce una biezione tra U e $D \cap S$.

La funzione φ si dice parametrizzazione, l'inversa $\varphi^{-1} : D \cap S \to U$ si chiama una <u>CARTA</u>.

e si dice <u>SUPERFICIE REGOLARE</u> se per ogni $x \in S$ esiste una carta in un intorno aperto di x.

diciamo <u>ATLANTE</u> un insieme di carte che ricopre S.

Esempi ovvi:

(G) Grafici di funzioni: se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è funzione $\mathcal{C}^\infty$, allora $\Gamma(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : z = f(x,y) \right\}$ è superficie regolare con una <u>carta globale</u>.

il viceversa è falso: di solito le sup. reg <u>non hanno</u> una carta globale, né sono grafici.

(Z) Zeri di funzioni: se $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è funzione $\mathcal{C}^\infty$ con jacobiano di rango massimo $(=1)$ allora $Z(F) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : F(x,y,z) = 0 \right\}$ è sup. regolare (è localm. grafico di funzioni per Teor. Funz. Impl.)

il viceversa è falso: di solito le sup. reg. <u>non sono</u> zeri di funzioni (non hanno equazione gl.)

Tuttavia le <u>descrizioni LOCALI</u> sono equivalenti:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, Rightarrow, shift left] & Z \arrow[l, Rightarrow, shift left, "/" marking] \arrow[r, Rightarrow, shift left] & \text{Sup. Reg.} \arrow[l, Rightarrow, shift left, "/" marking] \arrow[r, Rightarrow, shift left, "\text{T.F. INVERSA}"] & \text{loc. } G \arrow[l, Rightarrow, shift left] \arrow[d, Rightarrow, shift right] \\
 & & & \text{loc. } Z \arrow[u, Rightarrow, shift right, "\text{T.F. Impl. o T. Dini}"']
\end{tikzcd}$$

loc. G: "essere LOCALMENTE grafico di funzioni"

loc. Z: "essere LOCALMENTE zeri di funzioni (con jac. di rg max)"

I passaggi da una rappresentazione all'altra usano i teoremi di funzione inversa ed implicita (DINI) e sono certamente visti in Analisi 2.

Vediamo la nozione di SPAZIO (piano!) TANGENTE:

sia S sup. reg., $P \in S$ punto: il piano tg a S in P è il sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$ passante per P e con spazio direttore $T_pS := \{\gamma'(0) : \gamma \text{ CURVE} \subseteq S, \gamma(0) = P\}$.

come si verifica che T_pS è sottosp. vettoriale di $\mathbb{R}^3$?

come si rappresentano le curve $\subseteq S$?

A seconda di come rappresentiamo la superficie, abbiamo diversi modi per calcolare T_pS:

(P) se $\sigma: U \to \mathbb{R}^3$ parametr.: $T_pS = \mathrm{im}(d\sigma_p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3)$ (immagine del differenziale) $= \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$

(LG) piano tangente al grafico $= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix} \right\rangle$

(LZ) se $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con $S = Z(F)$: $T_pS = \ker(dF : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R})$ (nucleo del differenziale di equaz.)

Nozioni di FIBRATO TANGENTE (e CAMPI TANGENTI):

$T(S) := \bigsqcup_{P \in S} T_p(S) \xrightarrow{\pi} S$, $\pi(P, v) = P$ da cui $\pi^{-1}(P) = T_p(S)$

chiameremo CAMPI VETTORIALI le sezioni di π, cioè le funzioni che ad ogni $P \in S$ associano un $v \in T_p(S)$, e saranno C^∞ se v è funzione C^∞ di P.

Nota sulla struttura di $T(S)$.

CURVE SU SUPERF. (PARAMETR.):

$$I \underset{\subseteq^\circ \mathbb{R}}{\longrightarrow} U \underset{\subseteq^\circ \mathbb{R}^2}{\xrightarrow{\sigma}} \mathbb{R}^3 \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \sigma(u,v)$$

PARAMETRIZZ. LOCALE DI S

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \longmapsto \gamma(t) \equiv \sigma(u(t), v(t))$$

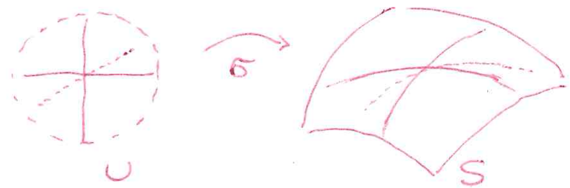
e LOCALMENTE ogni curva sulla sup. si rappresenta così per composizione con una CURVA NELLO SPAZIO DEI PARAMETRI u, v.

Il vettore tangente è

$$\gamma' = \frac{d}{dt} \sigma(u(t), v(t)) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u(t), v(t)) \frac{du}{dt} + \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u(t), v(t)) \frac{dv}{dt} = \sigma_u \cdot u' + \sigma_v v'$$

Quindi al variare di γ, cioè di u', v', i vettori tangenti descrivono $\langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$.

Nota: tutte le γ con stessi u', v' danno la stessa tangente γ', quindi possiamo usare le rette nello spazio dei parametri!



Definiamo ora le funzioni differenziabili tra superfici: una funzione $f: S \to S'$ (superficie in $\mathbb{R}^3$) è differenziabile se localmente attorno ad ogni punto $P \in S$ (e $f(P) \in S'$) abbiamo carte tali che

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] & S' \\ U \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, dashed] & V \arrow[u, "\sigma'"'] \end{tikzcd}$$

la composizione $\sigma'^{-1} f \sigma$ sia $\mathcal{C}^\infty$ (tra aperti $\mathbb{R}^2$).

Data una tale $f: S \to S'$, il suo differenziale $df: T(S) \to T(S')$ associa ad ogni punto $P \in S$ una funzione lineare (e continua) $df_P: T_P(S) \to T_{f(P)}(S')$ che è l'"approssimazione lineare di f vicino a P" definita per ogni $v \in T_P(S)$, se $v = \gamma'(0)$ per una curva $\gamma: I \to S$ (con $\gamma(0) = P$) come

$$df_P(v) := (f \circ \gamma)'(0) \quad \text{che per definizione} \in T_{f(P)}(S')$$

perché $f \circ \gamma: I \to S \to S'$ è curva con $(f\circ\gamma)(0) = f(P)$.

Questa definizione è ben posta, cioè $df_P(v)$ dipende solo da v e non dalla curva γ scelta:

$$df_P(v) = (f\circ\gamma)'(0) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)\frac{\partial \gamma_i}{\partial t}(0) = \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \left(\sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)(f)(P)$$

e confondendo il vettore v con la derivata direzionale $\partial_v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ possiamo scrivere

$$df(v) = v(f).$$

NOTA: non è evidente, ma la definizione è equivalente a chiedere che vicino ad ogni punto f si "estende" ad una funzione $\mathcal{C}^\infty$ in intorni aperti di $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] \arrow[d, hook] & S' \arrow[d, hook] \\ T \arrow[r, dashed] & T' \end{tikzcd}$$

Ricordiamo la corrispondenza tra vettori di $\mathbb{R}^n$ e derivazioni direzionali che agiscono sulle funzioni $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \longleftrightarrow \partial_v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \curvearrowright \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

che noi restringiamo agli spazi tg.

$$T_P(S) \ni v \longleftrightarrow \partial_v \curvearrowright \mathcal{C}^\infty(S, \mathbb{R})$$

e $df(v) = \partial_v(f)$ ($= v(f)$ per semplicità) significa che "il differenziale di f calcolato nel vettore v è la derivata direzionale di f nella direzione v" (tutto calcolato nel punto P)

Intermezzo: applicazione di campi vettoriali tangenti.

Se abbiamo due campi vettoriali (tangenti), cioè vettori (tangenti) funzione del punto, possiamo pensarli come operatori differenziali (di ordine 1, cioè derivazioni) e comporli:

se $\xi = \sum_i \xi_i \partial_i$ e $\eta = \sum_j \eta_j \partial_j$ (abbreviamo $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, e ξ_i, η_i sono funzioni del punto)

allora $\xi \circ \eta = (\sum_i \xi_i \partial_i) \circ (\sum_j \eta_j \partial_j) = \sum_{i,j} \xi_i \partial_i(\eta_j) \partial_j + \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \partial_i \partial_j$

e $\eta \circ \xi = (\sum_j \eta_j \partial_j) \circ (\sum_i \xi_i \partial_i) = \sum_{i,j} \eta_j \partial_j(\xi_i) \partial_i + \sum_{i,j} \eta_j \xi_i \partial_j \partial_i$

non sono campi vettoriali, perché sono operatori differenziali di ordine > 1,

ma supponendo le funzioni ξ_i, η_j almeno C^1, e applicando gli operatori a funzioni almeno C^1 possiamo commutare le derivazioni $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$,

e allora $[\xi, \eta] := \xi \circ \eta - \eta \circ \xi = \sum_i \left(\sum_j \xi_j \partial_j(\eta_i) - \eta_j \partial_j(\xi_i) \right) \partial_i$

è campo vettoriale, e diciamo prodotto o crochet di Lie.

Questa operazione $[-,-]$ è quindi interna ai campi vettoriali o di derivazioni, e ha alcune facili proprietà:

(1) bilineare

(2) alternante: $[\xi, \xi] = 0$, ovvero $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$

(3) Lie: $[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0$

In qualche caso ci sarà utile usarla, ma avremo anche metodi elementari per fare dimostrazioni, quindi non ci servirà davvero la struttura di ALGEBRA DI LIE, che però ad un certo punto diventa indispensabile.

vanno pensati come operatori sulle funzioni $f \in C^\infty(-, \mathbb{R})$:

$(\xi \circ \eta)(f) = \xi(\eta(f)) =$

$= (\sum_i \xi_i \partial_i)(\sum_j \eta_j \partial_j(f)) =$

$= \sum_i \xi_i \partial_i (\sum_j \eta_j \partial_j(f)) =$

$= \sum_i \xi_i \sum_j (\partial_i(\eta_j) \partial_j(f) + \eta_j \partial_i(\partial_j(f))) =$

$= \sum_{i,j} \xi_i \partial_i(\eta_j) \partial_j(f) + \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j \partial_i \partial_j (f) =$

$= \left(\sum_{i,j} \xi_i \partial_i(\eta_j) \partial_j + \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \partial_i \partial_j \right)(f)$

e si usa fare il calcolo senza scrivere la f ...

Dopo questi preliminari generali,
arriviamo alla prima definizione importante per le superfici:
la PRIMA FORMA FONDAMENTALE che codifica tutti i CALCOLI METRICI sulle superfici.

Sia S superficie in $\mathbb{R}^3$, $\sigma : U \to S$ parametrizzazione locale che scriviamo $(u,v) \mapsto \sigma(u,v)$
(oppure $(u_1,u_2) \mapsto \sigma(u_1,u_2)$),
diciamo PRIMA FORMA FOND. di S nel punto $P \in S$ la RESTRIZIONE del PRODOTTO SCALARE di $\mathbb{R}^3$ a $T_P(S)$,
quindi la pff I associa ad ogni $P \in S$ una forma bilineare definita positiva

$$I_P : T_P(S) \times T_P(S) \to \mathbb{R} \quad \text{data da} \quad I_P(\xi,\eta) := \xi \cdot \eta .$$

Data la parametrizzazione locale σ, una base di $T_P(S)$ è data da σ_u, σ_v (vettori di $\mathbb{R}^3$)

e la matrice di I è $G_I = \begin{pmatrix} \sigma_u \cdot \sigma_u & \sigma_u \cdot \sigma_v \\ \sigma_v \cdot \sigma_u & \sigma_v \cdot \sigma_v \end{pmatrix}$ che indicheremo con $\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$

e spesso viene anche indicata come $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$. Ovviamente è matrice 2×2, simmetrica, def > 0.
(in ogni punto P).

Questa forma da tutte le informazioni metriche su S.

E' importante osservare che G_I è funzione dei parametri u,v, e permette di calcolare tutto quello che interessa di S in termini dello spazio dei parametri (2 variabili):

per esempio se ξ è vettore tangente a S, allora $\xi = x\sigma_u + y\sigma_v$ (perché $\in \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle \subset \mathbb{R}^3$)

e quindi $\xi \cdot \xi = (x\,y)\, G_I \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = I\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$;

se $\gamma = \sigma(u(t), v(t))$ è curva $\subset S$, allora $\gamma' = u'\sigma_u + v'\sigma_v$ e $\|\gamma'\| = I\left(\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}\right) = (u', v')\, G_I \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$
$= eu'^2 + 2fu'v' + gv'^2$

e tutto si calcola in termini dello spazio dei parametri.

Siano S, S' superficie ($\subseteq \mathbb{R}^3$), $f: S \to S'$ funzione diff.

(1) LUNGHEZZA DI CURVA $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t)) \subseteq S$:

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\gamma'\| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{I\binom{u'}{v'}}\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{e u'^2 + 2f u' v' + g v'^2}\, dt$$

perché $\|\gamma'\| = \|\sigma_u u' + \sigma_v v'\| = (u' \; v') G_I \binom{u'}{v'}$

talvolta si usa esprimere il "quadrato della lunghezza infinitesima" come differenziale:

$$ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 .$$

e la funzione f si dice isometria (locale) se df_p è isometria rispetto a I_p e $I'_{f(p)}$ per ogni P,

sse $I'_{f(p)}(df_p \xi, df_p \eta) = I_p(\xi, \eta)$ per $\forall P$, $\forall \xi, \eta \in T_p(S)$

sse $J_p(f)^t G'_I(p) J_p(f) = G_I(p)$ per $\forall P$

e capita sse f rispetta la lunghezza delle curve

(2) ANGOLO TRA CURVE $\gamma(t) = \sigma(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ e $\delta = \sigma(\delta_1(t), \delta_2(t))$ passanti per $P \in S$ comune:

$$\cos \vartheta_p(\gamma, \delta) = \frac{\gamma' \cdot \delta'}{\|\gamma'\| \|\delta'\|} = \frac{I_p\left(\binom{\gamma_1'}{\gamma_2'}, \binom{\delta_1'}{\delta_2'}\right)}{\sqrt{I_p\binom{\gamma_1'}{\gamma_2'}} \sqrt{I_p\binom{\delta_1'}{\delta_2'}}} =$$

$$= \frac{e\gamma_1'\delta_1' + f(\gamma_1'\delta_2' + \gamma_2'\delta_1') + g\gamma_2'\delta_2'}{\sqrt{} \quad \sqrt{}} .$$

per esempio tra le curve COORDINATE della parametrizzazione σ risulta $f/\sqrt{eg}$.

(sono ortogonali sse $f = 0$, sse G_I diagonale).

e la funzione f si dice una CONFORMITÀ se df_p è similitudine rispetto a I_p e I'_{fp} per ogni P,

sse $I'_{f(p)}(df_p \xi, df_p \eta) = \lambda(p) I_p(\xi, \eta)$

sse $J_p(f)^t G'_I(fp) J_p(f) = \lambda(p) G_I(p)$ con $\lambda(p)$ scalare che può dipendere dal punto P.

e capita sse f rispetta gli angoli tra le curve.

(3) aree di regioni $R \subseteq S$:

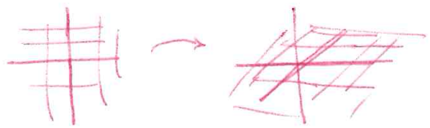
$$A(R) = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \|\sigma_u \times \sigma_v\|\, du\,dv = \iint_{\sigma^{-1}(R)} \sqrt{eg - f^2}\, du\,dv$$

$$= \iint_{\sigma^{-1}(R)} \sqrt{\det(I)}\, du\,dv$$

e la funzione f si dice ISOAREALE (!) se conserva le aree

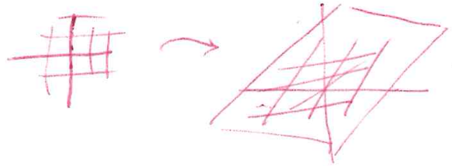
Vediamo i primi esempi facili.

(1) PIANO $z=0$, con carta $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xmapsto{\sigma} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$, abbiamo $\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



Si noti che le linee coordinate di σ sono ortogonali tra loro e unitarie

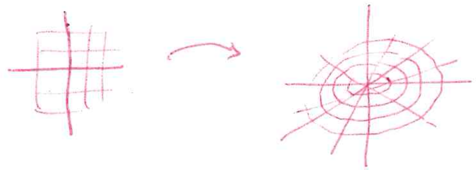
PIANO $z=ax+by$ con carta $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ ax+by \end{pmatrix}$, abbiamo $\sigma_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$ e $G_I = \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab \\ ab & 1+b^2 \end{pmatrix}$



qui le linee coordinate di σ <u>non</u> sono ortogonali, ma formano un angolo fissato; <u>non</u> sono unitarie, ma i vettori tangenti hanno lunghezza costante

PIANO $z=0$ tolta l'origine in coordinate polari:

carta $\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, abbiamo $\sigma_\rho = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_\theta = \begin{pmatrix} -\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ e $G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$

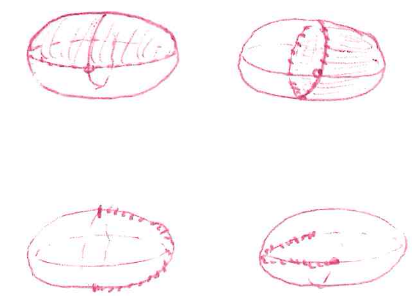


le linee coordinate di questa parametrizzazione sono le rette per l'origine e i cerchi di centro origine; sono ortogonali tra loro; qui G_I non è costante rispetto ai parametri, cambia con il punto!

(2) **ELLISSOIDI**: definiti da equazione cartesiana $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=k$,
con ∇equazione $=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{b^2},\frac{2z}{c^2}\right)$ che è nullo solo se $x=y=z=0$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in$ ellissoide sse $k=0$

quindi abbiamo una superf reg per $k\neq 0$, ma è $\emptyset$ per $k<0$.

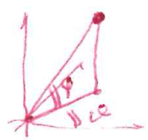
Vediamo delle possibili parametrizzazioni: non può esistere una carta globale (perché l'ellissoide è compatto, e gli aperti di $\mathbb{R}^2$ no)



(1) usando i piani coordinati con proiezione ortogonale, per es $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\overset{\sigma}{\mapsto}\begin{pmatrix}x\\y\\c\sqrt{k-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\end{pmatrix}$, servono 6 carte

(2) possiamo ricoprire l'ellissoide usando 2 carte se usiamo coordinate sferiche:
per es $(\vartheta,\varphi)\mapsto\begin{pmatrix}a\cos\varphi\cos\vartheta\\ b\cos\varphi\sin\vartheta\\ c\sin\varphi\end{pmatrix}$

$(0,2\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}^3$



(3) anche usando proiezioni stereografiche dobbiamo usare due carte (ma ciascuna carta prende tutto tranne un punto, quello di proiezione!):

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow$ Ellissoide $\setminus\{N\}$

$P \longmapsto (P\vee N)\cap$ Ellissoide

$(X\vee N)\cap\mathbb{R}^2 \longleftarrow X$

Calcoliamo la pff nelle carte sferiche: $\mathcal{E}=\begin{pmatrix}a\cos\varphi\cos\vartheta\\ b\cos\varphi\sin\vartheta\\ c\sin\varphi\end{pmatrix}$, $\mathcal{E}_\vartheta=\begin{pmatrix}-a\cos\varphi\sin\vartheta\\ b\cos\varphi\cos\vartheta\\ 0\end{pmatrix}$, $\mathcal{E}_\varphi=\begin{pmatrix}-a\sin\varphi\cos\vartheta\\ -b\sin\varphi\sin\vartheta\\ c\cos\varphi\end{pmatrix}$

da cui si trova $G_1=\begin{pmatrix}\cos^2\varphi\,(b^2\cos^2\vartheta+a^2\sin^2\vartheta) & (a^2-b^2)\cos\varphi\sin\varphi\cos\vartheta\sin\vartheta\\ & \sin^2\varphi\,(a^2\cos^2\vartheta+b^2\sin^2\vartheta)+c^2\cos^2\varphi\end{pmatrix}$

che di solito non è diagonale, a meno che non sia $a=b$ (ellissoide di rotazione): $G_1=\begin{pmatrix}a^2\cos^2\varphi & 0\\ 0 & a^2\sin^2\varphi+c^2\cos^2\varphi\end{pmatrix}$

e se poi $a=b=c$ (caso della SFERA): $G_1=\begin{pmatrix}a^2\cos^2\varphi & 0\\ 0 & a^2\end{pmatrix}$, che dipendono solo da φ e non da ϑ.

(3) IPERBOLOIDI: equaz. cartesiana $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=k$,

con ∇equazione $=\left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, -\frac{2z}{c^2}\right)$ che è nullo solo per $x=y=z=0$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\in$ iperboloide sse $k=0$

quindi otteniamo una superficie regolare per $k\neq 0$ (per $k=0$ è un cono)

e sappiamo che ha due forme diverse a seconda del valore di k positivo o negativo:

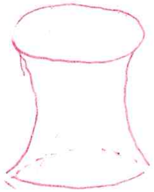
per $k>0$, supponiamo $=1$
iperboloide iperbolico (una falda)

(1) usando i piani coordinati per parametrizzare servono 6 carte

(2) usando coordinate "sferiche" bastano due carte

$$(\theta,\varphi)\longmapsto\begin{pmatrix}a\cosh\varphi\cos\theta\\ b\cosh\varphi\sin\theta\\ c\sinh\varphi\end{pmatrix}$$

$$(0,2\pi)\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$$



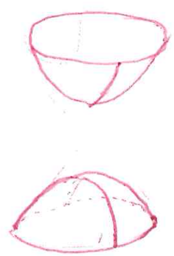
per $k<0$, supponiamo $=-1$,
iperboloide ellittico (due falde)

(1) usando il piano x,y come parametri bastano due carte, una per ciascuna falda: $z=\pm c\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}$

(2) usando coordinate "sferiche":

$$(\theta,\varphi)\longmapsto\begin{pmatrix}a\sinh\varphi\cos\theta\\ b\sinh\varphi\sin\theta\\ \pm c\cosh\varphi\end{pmatrix}$$

$$(0,2\pi)\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$$



Calcoliamo la pff usando queste param.:

$$\varphi=\begin{pmatrix}a\cosh\varphi\cos\theta\\ b\cosh\varphi\sin\theta\\ c\sinh\varphi\end{pmatrix},\quad \varphi_\theta=\begin{pmatrix}-a\cosh\varphi\sin\theta\\ b\cosh\varphi\cos\theta\\ 0\end{pmatrix},\quad \varphi_\varphi=\begin{pmatrix}a\sinh\varphi\cos\theta\\ b\sinh\varphi\sin\theta\\ c\cosh\varphi\end{pmatrix}$$

... esercizio ...

$$G_1=\begin{pmatrix}\cosh^2\varphi\,(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta) & (b^2-a^2)\cosh\varphi\sinh\varphi\cos\theta\sin\theta\\ & \sinh^2\varphi\,(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)+c^2\cosh^2\varphi\end{pmatrix}$$

che nel caso $a=b$ (rotazione) diventa $G_1=\begin{pmatrix}a^2\cosh^2\varphi & 0\\ & a^2\sinh^2\varphi+c^2\cosh^2\varphi\end{pmatrix}$ diagonale

(4) PARABOLOIDI: sono globalmente grafici di funzioni, quindi si possono vedere con una carta!

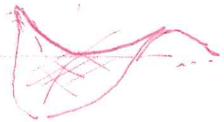
caso iperbolico: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

caso ellittico: $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

possibili parametrizzazioni:

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$



(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \end{pmatrix}$

(2) $(u,\vartheta) \longmapsto \begin{pmatrix} a u \cosh\vartheta \\ b u \sinh\vartheta \\ u^2 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

(2) $(u,\vartheta) \longmapsto \begin{pmatrix} a u \cos\vartheta \\ b u \sin\vartheta \\ u^2 \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}\times(0,2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$

(3) $(u,v) \longmapsto \begin{pmatrix} a(u+v) \\ b(u-v) \\ 4uv \end{pmatrix}$

qui si parametrizzano le rette del paraboloide come linee coordinate della parametrizzazione

... esercizio ...

Pff usando (2):

$$P_u = \begin{pmatrix} a\,ch\vartheta \\ b\,sh\vartheta \\ 2u \end{pmatrix},\quad P_\vartheta = \begin{pmatrix} au\,sh\vartheta \\ bu\,ch\vartheta \\ 0 \end{pmatrix},\quad G_1 = \begin{pmatrix} a^2ch^2\vartheta + b^2sh^2\vartheta + 4u^2 & (a^2+b^2)\,u\,ch\vartheta\, sh\vartheta \\ & u^2(a^2sh^2\vartheta + b^2ch^2\vartheta) \end{pmatrix}$$

e usando (3):

$$P_u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 4v \end{pmatrix},\quad P_v = \begin{pmatrix} a \\ -b \\ 4u \end{pmatrix},\quad G_1 = \begin{pmatrix} a^2+b^2+16v^2 & a^2-b^2+16uv \\ & a^2+b^2+16u^2 \end{pmatrix}.$$

Domanda: che angoli formano le rette delle due schiere?