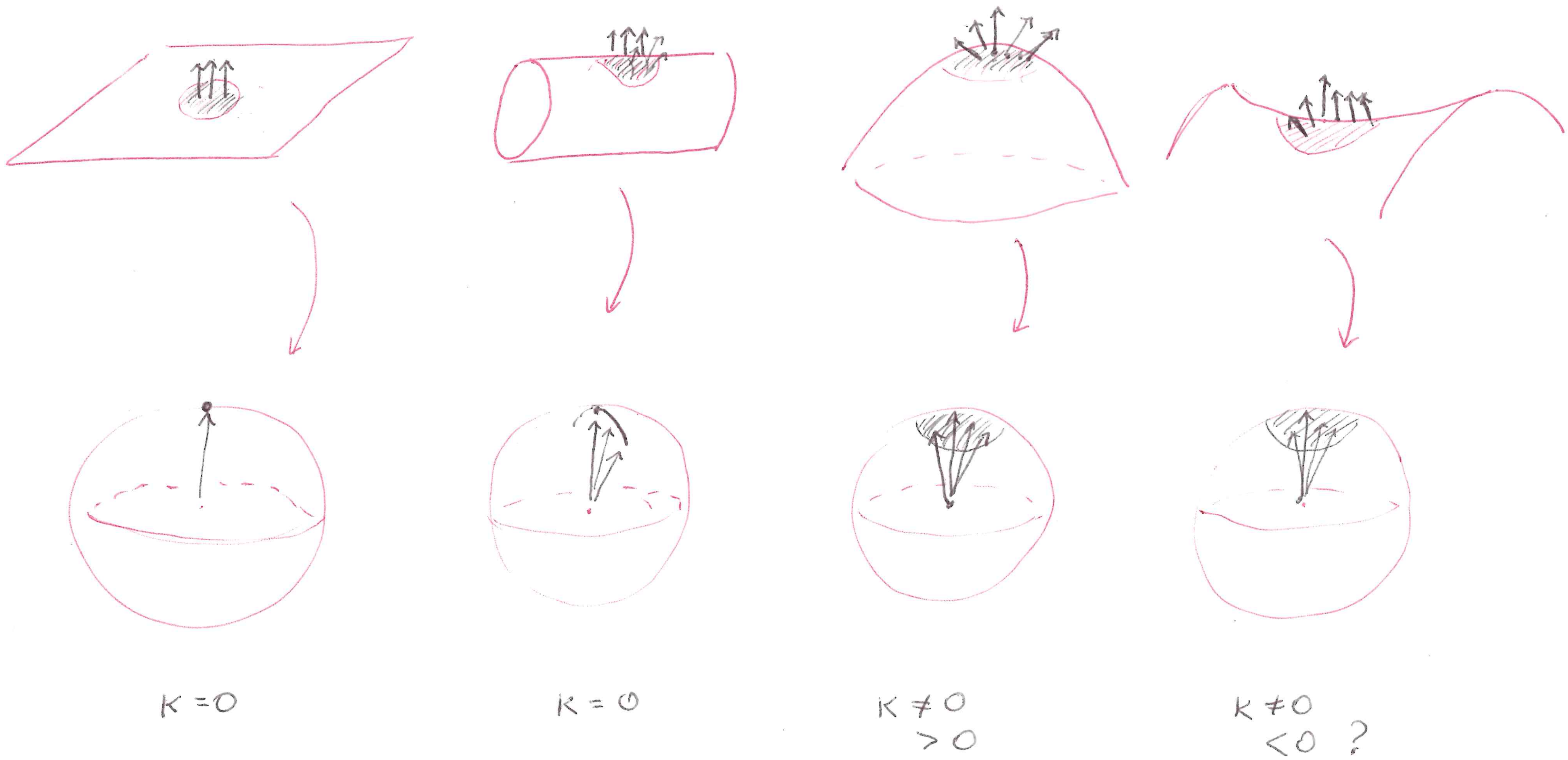
Teoria delle curvature per superficie $\subseteq \mathbb{R}^3$ (Gauss: come varia la normale?)



Riassunto sulle superficie differenziabili:

Nelle lezioni precedenti abbiamo visto:

1. Definizione di superficie regolare e sue rappresentazioni locali tramite parametrizzazioni (e carte), e localmente come grafico di funzioni o zeri di funzioni con opportune condizioni di rango (massimo) della jacobiana.

   Definizione e rappresentazione del piano tangente in ogni punto.

   Se $S \subseteq \mathbb{R}^3$ è parametrizzata da $\sigma : U \to \mathbb{R}^3$ allora $T_pS = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$.

2. Definizioni di funzioni differenziabili tra superficie regolari (funzioni continue che composte con le carte diventano funzioni C^∞ tra aperti di $\mathbb{R}^2$)

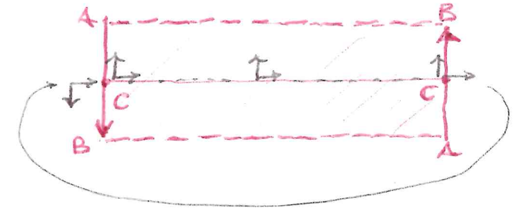
   e loro DIFFERENZIALI, che ad ogni punto $P \in S$ associano una funzione lineare tra gli spazi tangenti T_pS e $T_{f(P)}S'$: $df_p(v) = v(f)(P)$ per es. $df(\sigma_u) = f_u$.

3. La PRIMA FORMA FONDAMENTALE della superficie: ad ogni punto P, sullo spazio tangente definiamo $I_p : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ la forma bil. simm. def > 0 data dalla restrizione del prodotto scalare di $\mathbb{R}^3$ a $T_pS \subseteq \mathbb{R}^3$, e sua matrice Gram $G_I = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$

   Questa nozione codifica in termini dei PARAMETRI tutte le informazioni metriche su S: lunghezze, angoli, aree.

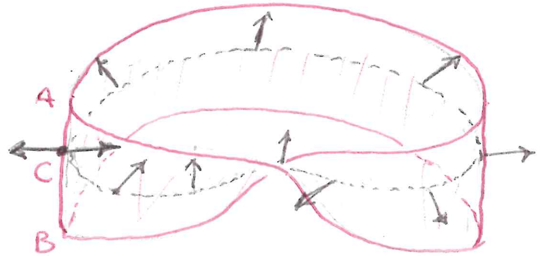
   Abbiamo anche definito trasformazioni isometriche, conformi, isoareali.

Per le superfici immerse in $\mathbb{R}^3$ la principale nozione estrinseca (dipendente dall'ambiente) è quella di NORMALE.



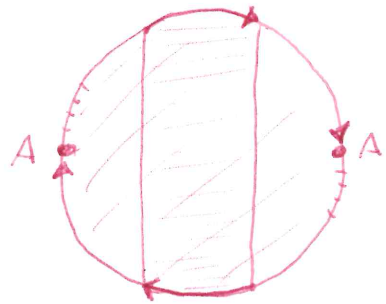
Nel dominio di una carta possiamo usare una param. σ e usare come VERSORE NORMALE $n = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ che è C^∞.

Ma GLOBALMENTE non è detto che esista un campo di vettori normali continuo.



Definizione: una sup. S è ORIENTABILE se ammette un CAMPO CONTINUO DI VERSORI NORMALI. Non orientabile altrimenti.

Per esempio, un NASTRO DI MOEBIUS non è orientabile, perché contiene cammini chiusi che invertono l'orientamento.



Piano proiettivo reale e otre di Klein non sono orientabili perché contengono nastri di Moebius

D'ora in poi nella parte di geometria differenziale supponiamo sempre che le superfici che studiamo siano orientabili. Diremo ATLANTE ORIENTATO un atlante in cui si passa da una parametrizzazione all'altra conservando l'orientamento (cioè con jacobiano di determinante positivo)

Sia S una superficie orientabile (e supponiamo scelto un atlante orientato).

Diciamo MAPPA DI GAUSS la funzione $g: S \to S^2$ (sfera unitaria $\subseteq \mathbb{R}^3$) che ad ogni $P \in S$ associa $g(P) := n_P$ normale a S definita da $\frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|}$ per una carta intorno a P.
Si tratta di un CAMPO CONTINUO DI VERSORI NORMALI A S.

Idea: capire come cambia la superficie studiando come varia la normale: questo dovrà dare una misura della curvatura di una superficie vicino a un punto.

Una definizione ingenua può essere questa:

$$K(P) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\text{Area}(g(D(P,\varepsilon) \cap S))}{\text{Area}(D(P,\varepsilon) \cap S)} = \lim_{U \to P} \frac{\text{Area}(g(U))}{\text{Area}(U)}$$

dove U è un intorno del punto P, per esempio $D(P,\varepsilon) \cap S$ (intersezione con S di un disco di raggio ε in $\mathbb{R}^3$).

Si vede subito che questa definizione dà 0 per il piano (normale costante) e dà $1/R$ per una sfera di raggio R (in qualsiasi punto P).
D'altra parte ha il difetto di essere sempre ≥ 0.

E in ogni caso, per studiare la VARIAZIONE di g (cioè della normale a S) conviene studiarne il differenziale dg che ad ogni punto $P \in S$ dà una funzione lineare $dg_P : T_P(S) \to T_{gP}(S^2) = n_P^{\perp} = T_P(S)$: endomorfismo di $T_P(S)$.

DEFINIAMO allora la MAPPA DI WEINGARTEN per ogni punto $P \in S$:

$\mathcal{L}_P := -dG_P$ è endomorfismo lineare di $T_P(S)$, il segno - si capirà poi!,

e per ogni $v \in T_P(S)$ si ha $\mathcal{L}_P(v) = -dG_P(v) = -v(G)_P = -v(n)_P$.

Sul dominio di una carta, con parametrizzazione σ, abbiamo $T_P(S) = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$

e $\mathcal{L}(\sigma_u) = -n_u \left(= \frac{\partial}{\partial u} n\right)$ e sono ortogonali a n perché $\|n\| = 1$.

$\mathcal{L}(\sigma_v) = -n_v \left(= \frac{\partial}{\partial v} n\right)$

In questa base possiamo scrivere la matrice di $\mathcal{L}$ che si indica con $L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

ed è definita da $(\mathcal{L}(\sigma_u) \ \mathcal{L}(\sigma_v)) = (\sigma_u, \sigma_v) L$.

Risultato fondamentale è il seguente TEOREMA:

$\mathcal{L}$ è AUTOAGGIUNTA per I, ovvero per ogni P: $I_P(\mathcal{L}_P v, w) = I_P(v, \mathcal{L}_P w)$

per ogni $v, w \in T_P(S)$.

Vediamo una verifica astratta di questo (ne vedremo una coi conti poi):

da $v \cdot n = 0$ otteniamo $w(v \cdot n) = 0$ dunque $w(v) \cdot n + v \cdot w(n) = 0$

e da $w \cdot n = 0$ otteniamo $v(w \cdot n) = 0$ dunque $v(w) \cdot n + w \cdot v(n) = 0$

e facendo la differenza, ricordando $[v, w] = v(w) - w(v)$ otteniamo

$[v, w] \cdot n + v \cdot w(n) - w \cdot v(n) = 0$ ma $[v, w] \perp n$, e $v \cdot w(n) = I(v, -\mathcal{L}(w))$

$w \cdot v(n) = I(w, -\mathcal{L}(v))$

da cui $I(v, \mathcal{L}(w)) - I(w, \mathcal{L}(v)) = 0$

$$I(w, \mathcal{L}(v)) = I(\mathcal{L}(v), w)$$

come si voleva.

Ora sappiamo che $\mathcal{L}$ è autoaggiunta per I (forma quadratica def >0), quindi abbiamo due strumenti importanti di algebra lineare da usare:

(1) la corrispondenza "funzioni autoaggiunte" $\longleftrightarrow$ "forme bilin. simmetriche"

(2) il teorema spettrale che dice "$\mathcal{L}$ è I-ortogonalmente diagonalizzabile".

Vediamo intanto il piano, e ricordiamo la situazione algebrica:

Sia (V, g) spazio normato (cioè g forma bil simm. non degenere) e $\varphi: V \to V$ ~~auto~~morfismo autoaggiunto per g (cioè $g(\varphi v, w) = g(v, \varphi w)$ $\forall v, w$) allora la forma $g_\varphi(v,w) := g(\varphi(v), w)$ è bilineare SIMMETRICA e questo dà una biezione tra

"endomorfismi autoaggiunti per g" e "forme bilineari simmetriche"

la cui inversa si costruisce così: data una forma bil. simm. h su V, definiamo φ_h tramite $g(\varphi_h(v), w) := h(v,w)$, e si verifica essere autoaggiunta per g.

Scelta una base di V e dette G, A, H le matrici di g, φ, g_φ abbiamo la relazione ~~que~~ $H = A^t G$ ovvero $H = GA$ (trasponendo).

Ricordando che G è invertibile risulta $A = G^{-1}H$, ma notate che A di solito non è matrice simmetrica (anche se prodotto di simmetriche!).

Applichiamo allora al nostro caso: I è def >0, quindi non degenere, $\mathcal{L}$ autoaggiunta per I,
DEFINIAMO la **SECONDA FORMA FONDAMENTALE** di S: $II_p(v,w) := I_p(\mathcal{L}_p v, w)$
per ogni $p \in S$, $v, w \in T_p(S)$, e naturalmente $= I_p(v, \mathcal{L}_p w)$ per simmetria (autoagg di $\mathcal{L}_p$).
Nella solita base σ_u, σ_v di $T_p(S)$ la matrice di Gram di II sarà indicata con

$$G_{II} = \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \quad \text{ed è} \quad G_{II} = L^t G_I = G_I L, \quad \text{da cui} \quad L = G_I^{-1} G_{II}.$$

Vediamo come calcolare la matrice G_{II}:

$$\ell = II(\sigma_u, \sigma_u) = I(-\mathcal{L}(\sigma_u), \sigma_u) = -\sigma_u(n) \cdot \sigma_u = -n_u \cdot \sigma_u = n \cdot \sigma_{uu}$$

(l'ultima uguaglianza perché $n \cdot \sigma_u = 0$ e derivando con σ_u:
$0 = (n \cdot \sigma_u)_u = n_u \cdot \sigma_u + n \cdot \sigma_{uu}$).

analogamente si calcolano $II(\sigma_u, \sigma_v) = II(\sigma_v, \sigma_u)$ e $II(\sigma_v, \sigma_v)$
e si trova

$$G_{II} = \begin{pmatrix} n \cdot \sigma_{uu} & n \cdot \sigma_{uv} \\ n \cdot \sigma_{vu} & n \cdot \sigma_{vv} \end{pmatrix}$$

nota: per avere questo si usa $\mathcal{L} = -dG$, altrimenti otteniamo questa matrice con $-$.

In particolare si tratta di una matrice simmetrica, quindi II è simmetrica,
e questa è verifica diretta che $\mathcal{L}$ era autoaggiunta per I.
Infine, è da notare che la matrice G_{II} è più facile da calcolare di L,
e poi possiamo trovare $L = G_I^{-1} G_{II}$.

Per finire questa lezione, vediamo o più due significati geometrici della sff:

(1) sviluppando σ alla Taylor in P abbiamo:

$$\sigma(u+du, v+dv) = \underbrace{\sigma(u,v)}_{\text{punto } P} + \underbrace{\sigma_u\, du + \sigma_v\, dv}_{\text{piano } T_P(S)} + \frac{1}{2}\left(\sigma_{uu}\, du^2 + 2\sigma_{uv}\, du\, dv + \sigma_{vv}\, dv^2\right) + \dots$$

notare $\sigma_u = \sigma_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}\sigma(u,v)$, ecc.

e facendo il prodotto scalare con n:

$$\left(\sigma(u+du, v+dv) - \sigma(u,v)\right) \cdot n = \frac{1}{2}\left(n\cdot\sigma_{uu}\, du^2 + 2\, n\cdot\sigma_{uv}\, du\, dv + n\cdot\sigma_{vv}\, dv^2\right) + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G_{II} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\, \mathrm{II}\left(\text{calcolata in } \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}\right) + \dots$$

quindi: la sff descrive come S si allontana dal piano tg $T_P(S)$ attorno ~~al~~ punto P nella forma di quadrica parabolica (se la seconda forma fond è identicamente nulla, allora bisognerebbe studiare i termini successivi di Taylor, altrimenti l'approssimazione sarà o un cilindro parabolico, o un paraboloide ellittico o iperbolico)

(2) Sia $P \in S$, γ curva $\subseteq S$ con $\gamma(0) = P$ e <u>VERSORE TANGENTE</u> $v = \gamma'(0) \in T_P(S)$, allora:

$$\mathrm{II}_P(v,v) = \mathrm{I}_P(\mathcal{L}_P(v), v) = -v(n)\cdot v = n \cdot v(v) = n \cdot v' = n \cdot \gamma''$$

$$= k_\gamma \frac{n\cdot\gamma''}{\|\gamma''\|} = k_\gamma \cos\vartheta(n, n_\gamma)$$

saputo:
$n \cdot v = 0$
$v(n\cdot v) = 0$
$v(n)\cdot v + n \cdot v(v) = 0$

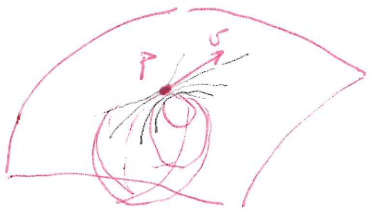
chi è $v(v)$?
usando la curva γ,
si deriva risp. t la funzione $v(t)$

quindi: $\mathrm{II}_P(v,v)$ misura la COMPONENTE NORMALE ALLA SUPERFICIE S della CURVATURA k_γ DELLE CURVE passanti per P con versore tg v (questa si chiamerà CURVATURA <u>NORMALE</u> di $\gamma \subseteq S$ nel punto P) e quindi E' LA STESSA per tutte quelle curve ($\subseteq S$, $\ni P$, tg v in P).

<u>ATTENZIONE</u>: non confondere n = normale alla superficie
e n_γ = normale principale della curva γ.

<u>In particolare</u> usando la <u>sezione piana</u> $\gamma = (P + \langle v, n\rangle) \cap S$ abbiamo $\mathrm{II}(\gamma', \gamma') = k_\gamma$.

<u>PROBLEMA</u>: mostrare che <u>i CERCHI OSCULATORI</u> delle curve $\gamma \subseteq S$, $\ni P$ con versore tg in $P = v$ <u>FORMANO UNA SFERA</u> (detta di MEUSNIER).



Riassunto: stiamo studiando le SUPERFICIE ORIENTABILI $\subset \mathbb{R}^3$, e visto:

(1) prima forma fondam. I (e calcoli metrici sulla superficie)

(2) mappa di Gauss: $S \xrightarrow{g} \mathbb{S}^2$ che è un campo di VERSORI normali a S

(3) mappa di Weingarten: $\mathcal{L} := -dg : T_p(S) \longrightarrow T_{g(p)}(\mathbb{S}^2) = n_p^\perp = T_S(P)$
(per studiare come cambia la normale di S)

(4) $\mathcal{L}$ è AUTOAGGIUNTA rispetto a I: $I_p(\mathcal{L}_p v, w) = I_p(v, \mathcal{L}_p w) \quad \forall P \in S,\ \forall v,w \in T_p(S)$

(5) seconda forma fond. $II_p(v,w) := I_p(\mathcal{L}_p v, w) = I_p(v, \mathcal{L}_p w)$
(e i suoi primi significati geometrici)

Ricordiamo anche le matrici in una base σ_u, σ_v di $T_p(S)$ data param. $\sigma(u,v)$:

$$G_I = \begin{pmatrix} \sigma_u \cdot \sigma_u & \sigma_u \cdot \sigma_v \\ & \sigma_v \cdot \sigma_v \end{pmatrix}, \qquad G_{II} = \begin{pmatrix} n \cdot \sigma_{uu} & n \cdot \sigma_{uv} \\ & n \cdot \sigma_{vv} \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = G_I^{-1} G_{II}$$

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ & g_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ & h_{22} \end{pmatrix} \qquad (\text{che } G_{II} = L^t G_I = G_I L.)$$

Oggi vediamo le conseguenze del teorema spettrale su $\mathcal{L}$ e I.

Definizioni di CURVATURE per una superficie orientabile $S \subseteq \mathbb{R}^3$

Siccome $\mathcal{L}$ è autoaggiunta per I (che è def >0) applichiamo il teorema spettrale: $\mathcal{L}$ è ortogonalmente (per I) diagonalizzabile, cioè esistono basi v_1, v_2 di $T_p(S)$ ortonormali per I_p ($G_I = \mathbb{1}_2$) con $L = G_{II} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$

e definiamo:

$v_1, v_2 \in T_p(S)$ DIREZIONI DI CURVATURA (in P)

k_1, k_2 CURVATURE PRINCIPALI (in P)

$K = \det(\mathcal{L}) = k_1 \cdot k_2$ CURVATURA DI GAUSS (in P)

$H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathcal{L}) = \frac{k_1 + k_2}{2}$ CURVATURA MEDIA (in P)

naturalmente il pol. caratt. di $\mathcal{L}$ è $X^2 - 2HX + K$, da cui si trovano

$$k_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$$

e $H^2 - K \geq 0$ perché $K \leq H^2$ (sono medie geometrica e aritmetica di k_1, k_2).

Vediamo il significato di k_1 e k_2:

se $v = v_1 \cos\vartheta + v_2 \sin\vartheta$ è versore in $T_P(S)$, allora:

$$\mathrm{II}(v,v) = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} = k_1 \cos^2\vartheta + k_2 \sin^2\vartheta$$

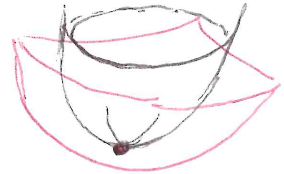
e quindi k_1 e k_2 sono MINIMO E MASSIMO DI CURVATURE NORMALI in P (di curve nella superficie passanti per P).

Vediamo la relazione di K (curvatura di Gauss) con l'idea intuitiva (variazione della normale attorno ad ogni punto):

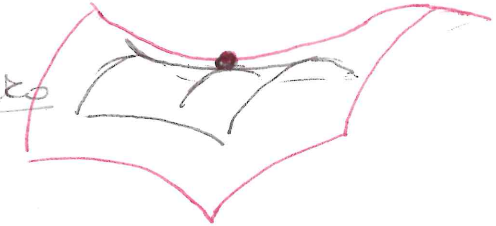
$$\lim_{U\to P} \frac{\mathrm{Area}(g(U))}{\mathrm{Area}(U)} = \lim_{U\to P} \frac{\iint_{\sigma^{-1}U} \|n_u \times n_v\|\, du\, dv}{\iint_{\sigma^{-1}U} \|\sigma_u \times \sigma_v\|\, du\, dv} = \lim_{U\to P} |\det(\mathcal{L})| = |\det(\mathcal{L}_P)| = |K(P)|$$

Nel terzo passaggio bisogna sapere qualcosa sugli integrali multipli.

In base alle curvature, si definiscono alcuni TIPI DI PUNTI sulle superfici:
un punto $P \in S$ si dice:

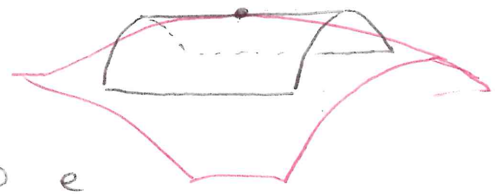


(1) ELLITTICO se $K(P) > 0$, cioè k_1, k_2 CONCORDI,
e allora vicino a P la sup. è approssimata da PARAB. ELLITTICO,



(2) IPERBOLICO se $K(P) < 0$, cioè k_1, k_2 DISCORDI,
e allora vicino a P la sup. è appross. da PARABOLOIDE IPERBOLICO

(3) PARABOLICO se $K(P) = 0 \neq H(P)$, cioè $k_1 \neq 0 = k_2$,
e allora vicino a P la sup. è approssimata a CILINDRO PARABOLICO



(4) OMBELICALE se $k_1 = k_2$ e si dicono:
PROPRI se le curvature sono $\neq 0$ (quindi punto ellittico)
PLANARE se le curvature sono nulle (allora $II_p \equiv 0$, $\mathcal{L} = 0$ e
vicino a P la sup. è approssimata da termini superiori di Taylor)

Vediamo due risultati classici su questo:

(a) se S ha SOLO PUNTI OMBELICALI allora è regione di PIANO (se $K=0$) o di SFERA (se $K>0$)
infatti: per ipotesi abbiamo $v(n) = \lambda v$ $\forall v \in T_pS$, $\forall P \in S$ (ma l'autovalore λ potrebbe dipendere da P)
in particolare $\begin{cases} n_u = \lambda \sigma_u \\ n_v = \lambda \sigma_v \end{cases}$ quindi $\begin{cases} n_{uv} = \lambda_v \sigma_u + \lambda \sigma_{uv} \\ n_{vu} = \lambda_u \sigma_v + \lambda \sigma_{vu} \end{cases}$ (abbiamo derivato risp. u, v),
e sottraendo $0 = \lambda_v \sigma_u - \lambda_u \sigma_v$, da cui $\lambda_u = 0 = \lambda_v$ (perché σ_u, σ_v sono lin. indip.)
e quindi λ è COSTANTE INDIPENDENTE DAL PUNTO P. Conclusione:

- se $\lambda = 0$ abbiamo $n_u = n_v = 0$, dunque n COSTANTE, e $S \subseteq$ piano ortogonale a n,
- se $\lambda \neq 0$ allora $C := \sigma - \frac{1}{\lambda} n$ è costante (derivando: $C_{u,v} = \sigma_{u,v} - \frac{1}{\lambda} n_{u,v} = 0$)
  e $\|\sigma - C\| = \|\frac{1}{\lambda} n\| = \frac{1}{\lambda}$ costante, dunque $S \subseteq$ sfera centro C raggio $\frac{1}{\lambda}$.

(b) se S è superficie COMPATTA in $\mathbb{R}^3$ allora esiste $P \in S$ con $K(P) > 0$.
(cioè non esistono superf. COMPATTE in S con $K < 0$ ovunque).

infatti: siccome S è compatta, è "contenuta" in una sfera,
e diminuendo il raggio della sfera possiamo supporre che esiste $P \in S \cap$ sfera.
Usando la proprietà del massimo vediamo che ogni curva $\gamma \subseteq S$ passante per P
ha nel punto P curvatura $> 1/$raggio, in particolare le curvature principali
sono concordi.

Vediamo alcuni esempi classici:

(1) Superficie con un punto planare t.c. la superficie sta da un lato del piano tg:

studiamo il punto O per la sup. di ROTAZIONE di $z=x^4$ attorno all'asse z:

$$\sigma=\begin{pmatrix} x\cos\vartheta \\ x\sin\vartheta \\ x^4\end{pmatrix},\quad \sigma_x=\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\\ 4x^3\end{pmatrix},\quad \sigma_\vartheta=\begin{pmatrix}-x\sin\vartheta\\ x\cos\vartheta\\ 0\end{pmatrix},\quad \text{dunque } G_I=\begin{pmatrix}1+16x^6 & 0\\ 0 & x^2\end{pmatrix}$$

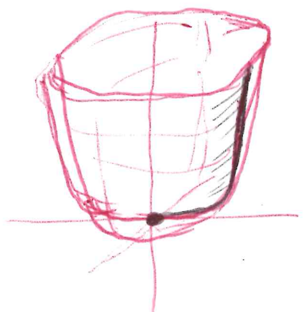
$$n=\frac{\sigma_x\times\sigma_\vartheta}{\|\sigma_x\times\sigma_\vartheta\|}=\frac{1}{\sqrt{1+16x^6}}\begin{pmatrix}-4x^3\cos\vartheta\\ -4x^3\sin\vartheta\\ 1\end{pmatrix},\quad \sigma_{xx}=\begin{pmatrix}0\\0\\12x^2\end{pmatrix},\quad \sigma_{x\vartheta}=\begin{pmatrix}-\sin\vartheta\\ \cos\vartheta\\ 0\end{pmatrix},\quad \sigma_{\vartheta\vartheta}=\begin{pmatrix}-x\cos\vartheta\\ -x\sin\vartheta\\ 0\end{pmatrix},$$

dunque $$G_{II}=\frac{1}{\sqrt{1+16x^6}}\begin{pmatrix}12x^2 & 0\\ 0 & 4x^4\end{pmatrix}=\frac{4x^2}{\sqrt{1+16x^6}}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & x^2\end{pmatrix},$$

infine $$L=G_I^{-1}G_{II}=\frac{4x^2}{\sqrt{1+16x^6}^{\,3}}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 1+16x^6\end{pmatrix}$$ e $$K=\frac{|G_{II}|}{|G_I|}=\frac{48x^4}{(1+16x^6)^2}$$

e si vede che K è positivo tranne per $x=0$ in cui è nullo,

e in quel caso si annullano L e G_{II}. Cosa succede per G_I?



(2) <u>SELLA DELLA SCIMMIA</u>: punto planare con sp. da entrambi i lati del ptg:

studiamo O per il grafico di $z = x^3 - 3xy^2$

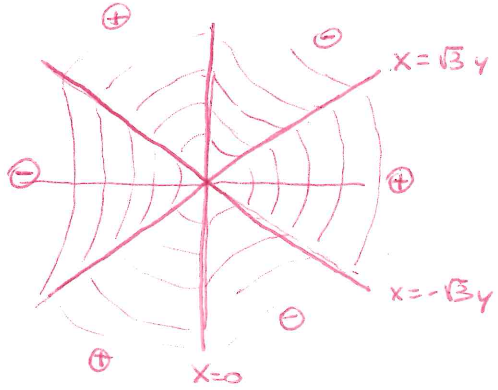
$$\sigma = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x^3-3xy^2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3x^2-3y^2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6xy \end{pmatrix}, \text{ dunque } G_I = \begin{pmatrix} 1+9(x^2-y^2)^2 & -18xy(x^2-y^2) \\ & 1+36x^2y^2 \end{pmatrix}$$

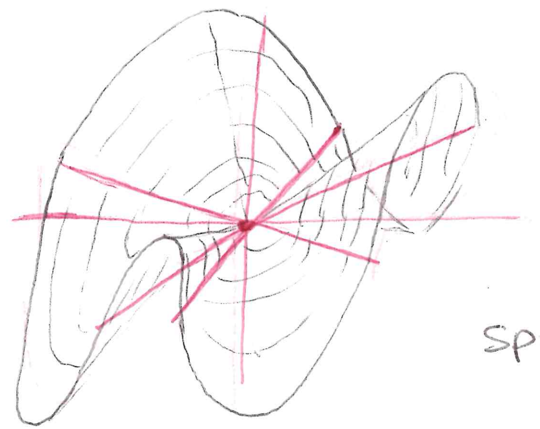
$$n = \frac{1}{\sqrt{1+9(x^2+y^2)^2}} \begin{pmatrix} -3x^2+3y^2 \\ 6xy \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{xx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6x \end{pmatrix}, \quad \sigma_{xy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6y \end{pmatrix}, \quad \sigma_{yy} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6x \end{pmatrix},$$

$$\text{dunque } G_{II} = \frac{6}{\sqrt{1+9(x^2+y^2)}} \begin{pmatrix} x & -y \\ -y & -x \end{pmatrix}, \quad L = G_I^{-1} G_{II}, \quad K = \frac{|G_{II}|}{|G_I|} = \frac{-36(x^2+y^2)}{*} \leq 0$$

quindi tutti i punti sono <u>iperbolici</u> tranne per $x=0=y$ in cui

$$G_I(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_{II}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ punto planare}$$





Spiegazione del nome?

(3) punti parabolici con superficie da contrarsi i lati del piano tangente: quelli di altezza 0 per la sup di rotazione di $x = z^3+1$ (≥ 0) attorno all'asse z

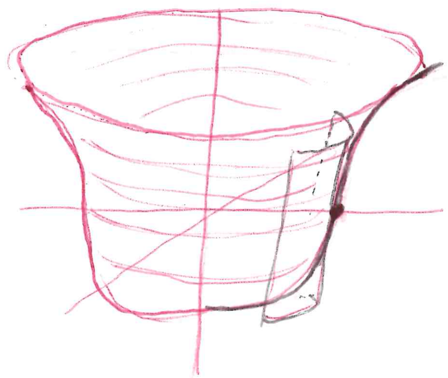
$$\sigma = \begin{pmatrix} (z^3+1)\cos\vartheta \\ (z^3+1)\sin\vartheta \\ z \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 3z^2\cos\vartheta \\ 3z^2\sin\vartheta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_\vartheta = \begin{pmatrix} -(z^3+1)\sin\vartheta \\ (z^3+1)\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ dunque } G_I = \begin{pmatrix} 1+9z^4 & 0 \\ 0 & (1+z^3)^2 \end{pmatrix}$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{1+9z^4}} \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \\ 3z^2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{zz} = \begin{pmatrix} 6z\cos\vartheta \\ 6z\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{z\vartheta} = \begin{pmatrix} -3z^2\sin\vartheta \\ 3z^2\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \begin{pmatrix} -(z^3+1)\cos\vartheta \\ -(z^3+1)\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{dunque } G_{II} = \frac{1}{\sqrt{1+9z^4}} \begin{pmatrix} -6z & 0 \\ 0 & 1+z^3 \end{pmatrix}, \quad L = G_I^{-1} G_{II}, \quad K = |L| = \frac{|G_{II}|}{|G_I|} = -\frac{6z}{*}$$

e i punti sono ellittici per $z<0$, iperbolici per $z>0$, mentre per $z=0$ abbiamo

$$G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } G_{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ punti parabolici:}$$



Arriviamo al risultato fondamentale di Gauss:
le curvature sono definite usando la normale, quindi nozione che dipende dall'ambiente, ma la curvatura di Gauss è intrinseca, cioè si può determinare tramite calcoli (metrici locali) sulla superficie:

TEOREMA EGREGIUM: $K = \det(\mathcal{L})$ dipende solo dalla prima forma fondam.

quindi un esserino bidimensionale che vive sulla superficie può tramite misure SULLA SUPERFICIE capire se vive in un mondo di curvatura non nulla!
Motivazione di Gauss, per le carte un risultato del genere non è possibile!
ma noi possiamo accorgerci se il nostro universo non è "piatto"?

Conseguenza immediata del T. E. di Gauss:
se due superfici sono LOCALM. ISOMETRICHE allora hanno la stessa curvatura
Attenzione: il viceversa è falso, vedremo per esempio che
la sup. di "rotazione del logaritmo" e l'"elicoide delle rette" hanno stesse curvature ma non sono loc. isometriche.

Nota: invece vedremo che curvatura media e curvature principali non sono intrinseche alla superficie ma dipendono dall'immersione (negli esempi).

Vi sono varie dimostrazioni possibili del T.E.,

vediamone una con conti espliciti che può portare anche a FORMULE esplicite per K in funzione di I.

$$K = \frac{\det(\mathrm{II})}{\det(\mathrm{I})} = \frac{1}{\det(\mathrm{I})^2} \cdot \det\begin{pmatrix} \sigma_{uu}\cdot\sigma_u\times\sigma_v & \sigma_{uv}\cdot\sigma_u\times\sigma_v \\ & \sigma_{vv}\cdot\sigma_u\times\sigma_v \end{pmatrix}$$

perché $\mathrm{II} = \begin{pmatrix} \sigma_{uu} & \sigma_{uv} \\ & \sigma_{vv} \end{pmatrix} \cdot \frac{\sigma_u\times\sigma_v}{\|\sigma_u\times\sigma_v\|}$

e $\|\sigma_u\times\sigma_v\|^2 = \det(\mathrm{I})$ (LAGRANGE)

quindi:

$$\det(\mathrm{I})^2 K = \det\begin{pmatrix} \det(\sigma_{uu}\ \sigma_u\ \sigma_v) & \det(\sigma_{uv}\ \sigma_u\ \sigma_v) \\ & \det(\sigma_{vv}\ \sigma_u\ \sigma_v) \end{pmatrix} =$$

$$= \det(\sigma_{uu}\ \sigma_u\ \sigma_v)\det(\sigma_{vv}\ \sigma_u\ \sigma_v) - \det(\sigma_{uv}\ \sigma_u\ \sigma_v)^2 =$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} \sigma_{uu}^t \\ \sigma_u^t \\ \sigma_v^t \end{pmatrix}(\sigma_{vv}\ \sigma_u\ \sigma_v)\right) - \det\left(\begin{pmatrix} \sigma_{uv}^t \\ \sigma_u^t \\ \sigma_v^t \end{pmatrix}(\sigma_{uv}\ \sigma_u\ \sigma_v)\right) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \sigma_{uu}\cdot\sigma_{vv} & \sigma_{uu}\cdot\sigma_u & \sigma_{uu}\cdot\sigma_v \\ \sigma_u\cdot\sigma_{vv} & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\mathrm{I}}} \\ \sigma_v\cdot\sigma_{vv} & & \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} \sigma_{uv}\cdot\sigma_{uv} & \sigma_{uv}\cdot\sigma_u & \sigma_{uv}\cdot\sigma_v \\ \sigma_u\cdot\sigma_{uv} & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\mathrm{I}}} \\ \sigma_v\cdot\sigma_{uv} & & \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} \sigma_{uu}\cdot\sigma_{vv} - \sigma_{uv}\cdot\sigma_{uv} & \boxed{\sigma_{uu}\cdot\sigma_u} & \boxed{\sigma_{uu}\cdot\sigma_v} \\ \sigma_u\cdot\sigma_{vv} & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\mathrm{I}}} \\ \sigma_v\cdot\sigma_{vv} & & \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{uv}\cdot\sigma_u & \sigma_{uv}\cdot\sigma_v \\ \sigma_u\cdot\sigma_{uv} & \multicolumn{2}{c}{\boxed{\mathrm{I}}} \\ \sigma_v\cdot\sigma_{uv} & & \end{pmatrix}$$

e per mostrare il T.E. basta vedere che i termini mostrati in ROSSO dipendono dalle pff (gli altri termini sono già coefficienti di I).

Ricordiamo le pff: $\mathrm{I} \begin{cases} e = \sigma_u \cdot \sigma_u \\ f = \sigma_u \cdot \sigma_v \\ g = \sigma_v \cdot \sigma_v \end{cases}$

Deriviamo:

$$\mathrm{I}_u \begin{cases} e_u = 2\sigma_u \cdot \sigma_{uu} \\ f_u = \sigma_{uu} \cdot \sigma_v + \sigma_u \cdot \sigma_{uv} \\ g_u = 2\sigma_{uv} \cdot \sigma_v \end{cases} \qquad \mathrm{I}_v \begin{cases} e_v = 2\sigma_{uv} \cdot \sigma_u \\ f_v = \sigma_{uv} \cdot \sigma_v + \sigma_u \cdot \sigma_{vv} \\ g_v = 2\sigma_v \cdot \sigma_{vv} \end{cases}$$

e troviamo:

$$\begin{cases} \sigma_{uu} \cdot \sigma_u = \frac{1}{2} e_u, \quad \sigma_{uu} \cdot \sigma_v = f_u - \frac{1}{2} e_v \\ \sigma_{uv} \cdot \sigma_u = \frac{1}{2} e_v, \quad \sigma_{uv} \cdot \sigma_v = \frac{1}{2} g_u \\ \sigma_{vv} \cdot \sigma_u = f_v - \frac{1}{2} g_u, \quad \sigma_{vv} \cdot \sigma_v = \frac{1}{2} g_v \end{cases}$$

quindi basta trovare $\sigma_{uu} \cdot \sigma_{vv} - \sigma_{uv} \cdot \sigma_{uv}$,

e per questo deriviamo ancora le pff:

$$\mathrm{I}_{uu} \begin{cases} e_{uu} = \\ f_{uu} = \\ g_{uu} = 2\sigma_{uuv} \cdot \sigma_v + 2\sigma_{uv} \cdot \sigma_{uv} \end{cases} \qquad \mathrm{I}_{uv} \begin{cases} e_{uv} = \\ f_{uv} = \sigma_{uuv} \cdot \sigma_v + \sigma_{uu} \cdot \sigma_{vv} \\ \qquad + \sigma_{uv} \cdot \sigma_{uv} + \sigma_u \cdot \sigma_{uvv} \\ g_{u,v} = \end{cases} \qquad \mathrm{I}_{vv} \begin{cases} e_{vv} = 2\sigma_{uvv} \cdot \sigma_u + 2\sigma_{uv} \cdot \sigma_{uv} \\ f_{vv} = \\ g_{vv} = \end{cases}$$

da cui si deduce $f_{uv} - \frac{1}{2} g_{uu} - \frac{1}{2} e_{vv} = \sigma_{uu} \cdot \sigma_{vv} - \sigma_{uv} \cdot \sigma_{uv}$, che si voleva!

Da queste espressioni, con qualche conto!, si possono ottenere formule esplicite classiche per K a partire da I (vedere le dispense!).