Dedichiamo una puntata alla GEOMETRIA DELLA SFERA

Vedremo:

- CARTE, FORME, CURVATURE
- GEODETICHE
- PROIEZIONI SU SUPERFICIE DI CURVATURA NULLA:
  - Stereografica, centrale, ortogonale sul piano
  - Assiale e centrale su cilindro
- CURVE LOSSODROMICHE e "PROIEZIONE" DI MERCATORE
- GEOMETRIA DEI TRIANGOLI GEODETICI SULLA SFERA:
  - Area e relazioni con gli angoli
  - Relazioni tra lati e angoli:
    - Teorema di Carnot (o dei coseni) sferico
    - Teorema di Pitagora sferico
    - Teorema dei seni sferico
  - e loro duali!

Usiamo (ovviamente!) una <u>parametrizzazione in coordinate sferiche</u>:

$$\sigma(\vartheta,\varphi) = R\begin{pmatrix}\cos\vartheta\cos\varphi\\ \cos\vartheta\sin\varphi\\ \sin\vartheta\end{pmatrix},\quad \sigma_\vartheta = R\begin{pmatrix}-\sin\vartheta\cos\varphi\\ -\sin\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\end{pmatrix},\quad \sigma_\varphi = R\begin{pmatrix}-\cos\vartheta\sin\varphi\\ \cos\vartheta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow G_I = R^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos^2\vartheta\end{pmatrix}$$

$$n = -\frac{1}{R}\sigma \qquad \sigma_{\vartheta\vartheta} = R\begin{pmatrix}-\cos\vartheta\cos\varphi\\ -\cos\vartheta\sin\varphi\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix},\quad \sigma_{\vartheta\varphi} = R\begin{pmatrix}\sin\vartheta\sin\varphi\\ -\sin\vartheta\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix},\quad \sigma_{\varphi\varphi} = R\begin{pmatrix}-\cos\vartheta\cos\varphi\\ -\cos\vartheta\sin\varphi\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow G_{II} = R\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \cos^2\vartheta\end{pmatrix}$$

da cui $L = G_I^{-1}G_{II} = \frac{1}{R}\mathbb{1}_2$ e curvature $k_{1,2} = \frac{1}{R}$ (tutti punti ombelicali), $K = \frac{1}{R^2}$, $H = \frac{1}{R}$.

<u>Troviamo le geodetiche</u> con un ragionamento geometrico, senza conti:

il gruppo $SO_3(\mathbb{R})$ agisce sulla sfera $R\mathbb{S}^2$ tramite le <u>isometrie di $\mathbb{R}^3$</u>, quindi isometrie di $R\mathbb{S}^2$, e questa azione è <u>transitiva</u> sulle coppie (P,v) con $P\in R\mathbb{S}^2$, $v\in T_P(R\mathbb{S}^2)$ versore:

se (Q,w) altra coppia: una rotazione di centro O porta P su Q,

e ulteriore rotazione di ~~centro~~ asse OQ porta v su w.

Quindi basta descrivere le geodetiche con P nell'equatore e v tangente all'equatore (e poi spostare queste per isometrie), ma per simmetria tale geodetica deve essere l'equatore stesso.

Conclusione: le geodetiche della sfera sono i <u>CIRCOLI MASSIMI della sfera</u>, cioè intersezioni della sfera con i piani per il centro.

Comunque, per esercizio, studiamo il sistema differenziale delle geodetiche:

$$\begin{cases} (\vartheta')' = -\cos\vartheta \sin(\vartheta)\, \varphi'^2 \\ (\cos^2(\vartheta)\, \varphi')' = 0 \end{cases}$$

che è un caso di Clairaut con equazione unitaria

$$\vartheta'^2 + \cos^2(\vartheta)\varphi'^2 = 1.$$

si ha $\cos^2\vartheta\, \varphi' = c$, $\varphi' = \frac{c}{\cos^2\vartheta}$, $\vartheta'^2 = 1 - \cos^2(\vartheta)\varphi'^2 = 1 - \frac{c^2}{\cos^2\vartheta} = \frac{\cos^2\vartheta - c^2}{\cos^2\vartheta}$

e dobbiamo risolvere l'eq. diff. ord. $\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{\varphi'}{\vartheta'} = \frac{c}{\cos\vartheta\sqrt{\cos^2\vartheta - c^2}}$ che si integra direttamente:

$$\varphi = \int \frac{c}{\cos\vartheta\sqrt{\cos^2\vartheta - c^2}}\, d\vartheta = \int \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{\cos^2\vartheta}}} \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} =$$

$$= \int \frac{c/\sqrt{1-c^2}}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{1-c^2}\, tg^2\vartheta}} \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta}$$

$$= \arcsin\left(\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\, tg\vartheta\right) + d$$

Nota: da $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(x)$

usando $x = a\, tg(\vartheta)$, $dx = a\frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta}$

si ha $\int \frac{1}{\sqrt{1-a^2 tg^2\vartheta}} \frac{a\, d\vartheta}{\cos^2\vartheta} = \arcsin(a\, tg(\vartheta))$

cioè

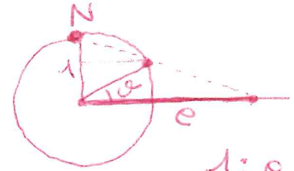
$$\sin(\varphi - d) = \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}$$

$$\sin(\varphi)\cos(d) - \cos(\varphi)\sin(d) - \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = 0$$

$$\underbrace{\cos(\vartheta)\sin(\varphi)}_{Y} \cos(d) - \underbrace{\cos(\vartheta)\cos(\varphi)}_{X} \sin(d) - \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \underbrace{\sin\vartheta}_{Z} = 0$$

Quindi sono punti della sfera che stanno su un piano per l'origine.

Naturalmente, per il T.E.Gauss, non possono esistere isometrie tra sfera (curvatura $\neq 0$) e piano, tuttavia rappresentare la sfera sul piano nei vari modi è problema centrale della GEOGRAFIA: vediamo alcune proiezioni e le loro proprietà.



$1 : \rho = (1-\sin\vartheta) : \cos\vartheta$

PROIEZIONE STEREOGRAFICA: $\pi_S : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \Pi\ (z=0)$

$P \longmapsto \pi_S(P) = (N \vee P) \wedge \Pi$

che nei coord sferiche/polari diventa: $\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\vartheta/(1-\sin\vartheta) \\ \varphi \end{pmatrix}$

con differenziale $d\pi_S = \begin{pmatrix} 1/(1-\sin\vartheta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Abbiamo $d\pi_S{}^t\, G_\Pi\, d\pi_S = d\pi_S{}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho(\vartheta,\varphi)^2 \end{pmatrix} d\pi_S = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\sin\vartheta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\cos^2\vartheta}{(1-\sin\vartheta)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{1-\sin\vartheta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{(1-\sin\vartheta)^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\vartheta \end{pmatrix} = \frac{1}{(1-\sin\vartheta)^2}\, G_{S^2}$$

e quindi π_S è CONFORMITÀ con rapporto di conformità $\frac{1}{(1-\sin\vartheta)^2}$ dipendente dal punto.

Notare che le geodetiche di sfera e piano non si corrispondono:

cerchi per N (solo meridiani sono geodetiche) $\rightsquigarrow$ rette del piano (rette per origine)

altri circoli massimi (geodetiche della sfera) $\rightsquigarrow$ ellissi del piano

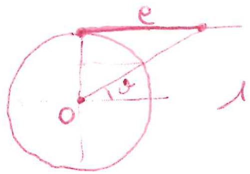
Nota: calcolo alternativo a $J^t G J$:

$$I_\Pi \circ \pi_S = (d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2) \circ \pi_S = d\left(\frac{\cos\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\cos\vartheta}{1-\sin\vartheta}\right)^2 d\varphi^2 = \dots$$

$$= \frac{1}{(1-\sin\vartheta)^2}\left(d\vartheta^2 + \cos^2\vartheta\, d\varphi^2\right) = \frac{1}{(1-\sin\vartheta)^2}\, I_{S^2}.$$

PROIEZIONE CENTRALE: $\pi_c : S^2_{>0} \longrightarrow \Pi\,(z=1)$

$$P \longmapsto (O \vee P) \wedge \Pi$$



$1 : \rho = \sin\vartheta : \cos\vartheta$

che in carte sferiche/polari è: $\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\vartheta / \sin\vartheta \\ \varphi \end{pmatrix}$

con differenziale $d\pi_c = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sin^2\vartheta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Abbiamo $d\pi_c^t\, G_\Pi\, d\pi_c = d\pi_c^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho(\vartheta,\varphi)^2 \end{pmatrix} d\pi_c = \begin{pmatrix} -1/\sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\vartheta/\sin^2\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{\sin^4\vartheta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta \end{pmatrix}$$

Quindi π_c non è (isometria né) conformità.

Tuttavia: le geodetiche di sfera (circoli massimi) corrispondono a rette del piano: ma le distanze tra punti delle geodetiche non sono rispettate.

Nota: anche qui possiamo alternativamente calcolare:

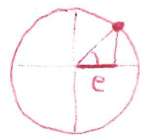
$$I_\Pi \circ \pi_c = (d\rho^2 + \rho^2 d\vartheta^2) \circ \pi_c = d\left(\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)^2 d\varphi^2 =$$

$$= \left(-\frac{1}{\sin^2\vartheta}\, d\vartheta\right)^2 + \frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}\, d\varphi^2 = \frac{1}{\sin^4\vartheta}\, d\vartheta^2 + \frac{\cos^2\vartheta}{\sin^2\vartheta}\, d\varphi^2 =$$

$$= \frac{1}{\sin^4\vartheta}\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta\, d\varphi^2\right).$$

PROIEZIONE ORTOGONALE : $\pi_\perp : S^2_{>0} \longrightarrow \Pi(z=0)$

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$\rho = \cos\vartheta$

e in coordinate sferiche/polari : $\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \varphi \end{pmatrix}$

con differenziale $d\pi_\perp = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$d\pi_\perp^{\,t}\, G_\Pi\, d\pi_\perp = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & \cos^2\vartheta \end{pmatrix}$$

e quindi non è (né isometria né) conformità.

E non ci sono corrispondenze tra geodetiche della sfera e quelle del piano:

i meridiani sono mandati nei segmenti per l'origine,

le altre geodetiche in ellissi bitangenti all'equatore nei punti antipodali.

Vediamo una proiezione interessante sul cilindro tangente all'equatore:

PROIEZIONE CILINDRICA ASSIALE o DI LAMBERT:

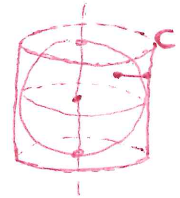
$\pi_L : S^2 \setminus \{N,S\} \longrightarrow C$

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2+y^2} \\ y/\sqrt{x^2+y^2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

C = cilindro di equazione $x^2+y^2=1$, $|z|<1$,

con parametrizzazione $C(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$

$C_\vartheta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$, $C_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, $G_C = \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$



nelle carte: $\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix}$ (identità!)

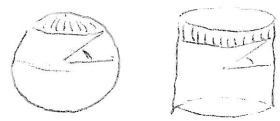
con differenziale $d\pi_L = \mathbb{1}_2$,

da cui $d\pi_L^t \, G_C \, d\pi_L = \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq G_{S^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2\vartheta \end{pmatrix}$

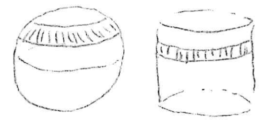
ma hanno lo stesso determinante, quindi è trasformazione ISOAREALE,

conserva le aree! In particolare possiamo vedere le aree di:

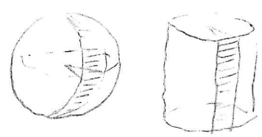
CALOTTA SFERICA: $2\pi R^2(1-\sin\vartheta)$



STRISCIA TRA DUE PARALLELI: $2\pi R^2(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2)$



LUNULA DI APERTURA α: $2R^2\alpha$



A titolo di esercizio si può studiare la

PROIEZIONE CILINDRICA CENTRALE, usando l'intero cilindro C : $x^2+y^2=1$

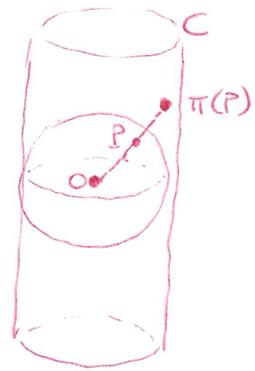
con parametrizzazione $C(z,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$

e prima forma fondam. $G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\pi : S^2 \setminus \{N,S\} \longrightarrow C$

$P \longmapsto (O \vee P) \wedge C$ cioè $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ovvero $\begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ \operatorname{tg}\vartheta \end{pmatrix}$

nelle carte: $\begin{pmatrix} \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\vartheta \\ \varphi \end{pmatrix}$



quindi $d\pi = \begin{pmatrix} 1/\cos^2\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e $d\pi^t \, G_C \, d\pi = \begin{pmatrix} 1/\cos^4\vartheta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(nessuna proprietà particolare!)

Un certo interesse storico (navigazione con la bussola) hanno le LOSSODROMICHE DELLA SFERA : sono le curve che formano angoli costanti con paralleli (e meridiani).

sono curve del tipo $L(\vartheta) = \sigma\begin{pmatrix}\vartheta \\ \varphi(\vartheta)\end{pmatrix}$ che risolvono l'equazione diff.

$$\frac{(1\ 0)\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & \cos^2\vartheta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ \varphi'\end{pmatrix}}{\sqrt{1}\ \sqrt{1+\varphi'^2\cos^2\vartheta}} = \cos V \quad \text{con } V \text{ costante}, \quad \text{cioè} \quad \varphi' = \frac{\operatorname{tg} V}{\cos\vartheta}$$

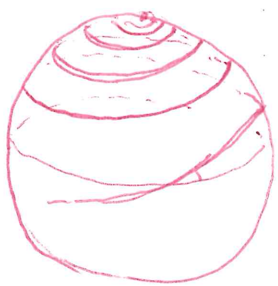
che si integra $\varphi = \operatorname{setth}(\sin\vartheta)\cdot \operatorname{tg} V = \log\left(\frac{1+\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\right)\operatorname{tg} V = \log\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{tg} V$

dove $\theta + \vartheta = \frac{\pi}{2}$, ϑ = LATITUDINE
θ = COLATITUDINE

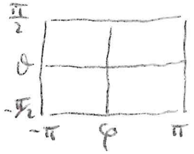
usando la proiezione stereografica sul piano dal polo nord, la lossodromica diventa

$$\begin{cases} \rho = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} \\ \varphi = \lg\left(\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\right)\operatorname{tg} V \end{cases} \qquad \text{cioè} \quad \rho = e^{\frac{\varphi}{\operatorname{tg} V}}, \quad \text{SPIRALE LOGARITMICA!}$$

Cioè le lossodromiche della sfera sono spirali che si avvicinano attorno ai poli :



Si chiamano PROIEZIONI DI MERCATORE delle carte in cui le lossodromiche sono rappresentate come rette; non sono proiezioni geometriche, ma deformazioni della carta usuale della sfera affinché diventi conforme:

carta usuale: 

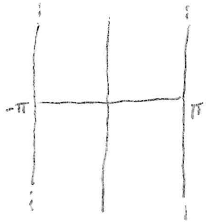
$$\binom{\varphi}{\vartheta} \longmapsto \begin{pmatrix}\cos\vartheta\cos\varphi\\ \cos\vartheta\sin\varphi\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}$$

segmenti verticali $\mapsto$ meridiani lungh. π
segmenti orizzontali (lungh. 2π) $\mapsto$ paralleli lungh $2\pi\cos\vartheta$

problema di Mercatore: deformare il rettangolo in modo che la mappa conservi gli angoli cambiando $\binom{\varphi}{\vartheta} \longmapsto \binom{\varphi}{h(\vartheta)}$ con $h'(\vartheta) = \frac{1}{\cos\vartheta}$, da cui $h(\vartheta) = \mathrm{sett\,th}(\sin\vartheta)$

cioè $\mathrm{th}(h) = \sin(\vartheta)$

e dunque usare come carta:



$$\binom{\varphi}{h} \longmapsto \begin{pmatrix}\cos\varphi / \mathrm{ch}(h)\\ \sin\varphi / \mathrm{ch}(h)\\ \mathrm{th}(h)\end{pmatrix}$$

$$(-\pi,\pi)\times\mathbb{R} \longrightarrow S^2$$

Per navigare si usavano due carte:

una PROIEZIONE CENTRALE (geodetiche = rette)

una PROIEZIONE MERCATORE (lossodromiche = rette)

e si interpolava una traiettoria breve (ma difficile da tenere con la bussola) con tratti di traiettorie facili (lossodromiche, angolo costante con la bussola)

Geometria dei TRIANGOLI GEODETICI SULLA SFERA

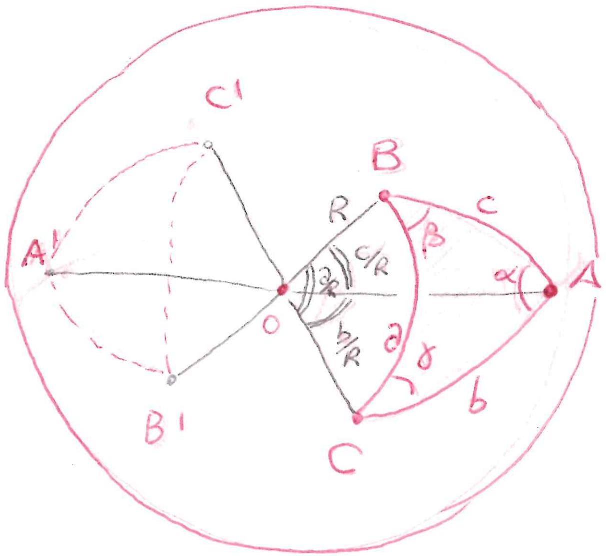
Siano $A, B, C \in RS^2$ (sfera raggio R) i vertici

A', B', C' i punti antipodali

a, b, c lunghezze archi BC, AC, AB

(a/R, b/R, c/R angoli al centro)

α, β, γ gli angoli ai vertici A, B, C



Vediamo le aree:

$$S(ABC) + S(A'BC) = 2\alpha R^2$$
$$S(ABC) + S(AB'C) = 2\beta R^2$$
$$S(ABC) + S(ABC') = 2\gamma R^2$$

perché sono LUNULE.

e sommando:

$$2\,S(ABC) = 2(\alpha+\beta+\gamma)R^2 - \overbrace{\big(S(ABC) + S(A'BC) + S(AB'C) + S(ABC')\big)}^{\text{metà sfera } = \frac{1}{2}4\pi R^2} = 2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)R^2$$

TEOREMA (elegantissimus di Gauss per triangoli sferici): $S(ABC) = (\alpha+\beta+\gamma-\pi)R^2$

in particolare: Σ angoli interni $> \pi$

Area = difetto sferico = Σ ang. int $- \pi$

Due triangoli hanno aree uguali sse hanno Σ ang int uguali

{ Questo è un metodo per distinguere piano/sfera con MISURE LOCALI SULLA SUPERFICIE!

Problema: generalizzare ai poligoni geodetici?

Cerchiamo ora relazioni tra LATI e ANGOLI (confondiamo A, B, C con vettori OA, OB, OC)

Abbiamo
$$A\cdot C = R^2\cos(b/R) \qquad \text{e} \qquad \|A\times C\| = R^2\sin(b/R)$$
$$A\cdot B = R^2\cos(c/R) \qquad \|A\times B\| = R^2\sin(c/R)$$
$$B\cdot C = R^2\cos(a/R) \qquad \|B\times C\| = R^2\sin(a/R)$$

Calcoliamo

$\cos(\alpha)$ = cos angolo tra i vettori tangenti in A

= cos angolo tra i piani $\langle A,B\rangle$ e $\langle A,C\rangle$

= cos angolo tra i vettori $A\times B$ e $A\times C$

$$= \frac{(A\times B)\cdot(A\times C)}{\|A\times B\|\,\|A\times C\|} = \frac{(A\cdot A)(B\cdot C)-(A\cdot B)(A\cdot C)}{\|A\times B\|\,\|A\times C\|}$$

$$= \frac{\cos(a/R)-\cos(c/R)\cos(b/R)}{\sin(c/R)\,\sin(b/R)}$$

$$= \frac{\cos(a/R)-\cos(c/R)\cos(b/R)}{\sqrt{1-\cos^2(c/R)}\,\sqrt{1-\cos^2(b/R)}}$$

e $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = \dfrac{1-\cos^2(a/R)-\cos^2(b/R)-\cos^2(c/R)+2\cos(a/R)\cos(b/R)\cos(c/R)}{\sin^2(c/R)\,\sin^2(b/R)}$

(e analogamente per gli altri angoli ai vertici).

Conclusione: i lati determinano gli angoli;

due triangoli sono uguali sse hanno lati uguali sse hanno angoli uguali;

"TRIANGOLI SIMILI SONO UGUALI!".

Dalle espressioni precedenti deduciamo:

TEOREMA DI CARNOT (O DEI COSENI) SFERICO: $\cos(a/R) = \cos(b/R)\cos(c/R) - \sin(b/R)\sin(c/R)\cos(\alpha)$

che dà un lato in funzione degli altri due e dell'angolo compreso.

se $R \to \infty$ (sfera $\to$ piano) usando Taylor per $\cos(a/R) = 1 - \frac{a^2}{R^2} \dots$ e $\sin(b/R) = \frac{b}{R} \dots$

si ottiene $a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(\alpha)$, cioè il teorema euclideo.

TEOREMA DI PITAGORA SFERICO: $\cos(a/R) = \cos(b/R)\cos(c/R)$ sse $\cos(\alpha) = 0$ sse $\alpha = \frac{\pi}{2}$

che dà relazione tra i lati di un triangolo rettangolo (notare che sulla sfera possono esserci triangoli con uno, due, o anche tre angoli retti!).

se $R \to \infty$ si ottiene al limite $a^2 = b^2 + c^2$ sse $\alpha = \frac{\pi}{2}$, teorema di Pitagora euclideo.

TEOREMA DEI SENI SFERICO: $\frac{\sin(a/R)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(b/R)}{\sin\beta} = \frac{\sin(c/R)}{\sin\gamma}$

infatti basta notare che la formula per $\sin^2\alpha$ ha il numeratore che è una FUNZIONE SIMMETRICA DEI LATI, ed è lo stesso per $\sin^2\beta$ e $\sin^2\gamma$.

se poi $R \to \infty$ troviamo $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, teorema euclideo dei seni.

Nel caso della sfera, la simmetria delle formule lati/angoli permette di scrivere anche i TEOREMI DUALI: facciamo qui i passaggi algebrici scrivendo α, β, γ per $\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$ e a, b, c per $\cos(a/R), \cos(b/R), \cos(c/R)$:

$$\left.\begin{array}{ll}
\alpha = \dfrac{a - bc}{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}}, & 1-\alpha^2 = \dfrac{1-a^2-b^2-c^2+2abc}{(1-b^2)(1-c^2)} \\[3ex]
\beta = \dfrac{b - ac}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-c^2}}, & 1-\beta^2 = \dfrac{1-a^2-b^2-c^2+2abc}{(1-a^2)(1-c^2)} \\[3ex]
\gamma = \dfrac{c - ab}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}}, & 1-\gamma^2 = \dfrac{1-a^2-b^2-c^2+2abc}{(1-a^2)(1-c^2)}
\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll}
a = \dfrac{\alpha+\beta\gamma}{\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}}, & 1-a^2 = \dfrac{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-2\alpha\beta\gamma}{(1-\beta^2)(1-\gamma^2)} \\[3ex]
b = \dfrac{\beta+\alpha\gamma}{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\gamma^2}}, & 1-b^2 = \dfrac{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-2\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha^2)(1-\gamma^2)} \\[3ex]
c = \dfrac{\gamma-\alpha\beta}{\sqrt{1-\alpha^2}\sqrt{1-\beta^2}}, & 1-c^2 = \dfrac{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-2\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}
\end{array}\right.$$

perché basta calcolare

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta\gamma &= \frac{a-bc}{\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}} + \frac{b-ac}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-c^2}}\cdot\frac{c-ab}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}} \\
&= \frac{(a-bc)(1-a^2)+(b-ac)(c-ab)}{(1-a^2)\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}} \\
&= \frac{a-a^3-\cancel{bc}+abc+\cancel{bc}-ab^2-ac^2+a^2bc}{(1-a^2)\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-c^2}} \\
&= a\,\frac{1-a^2-b^2-c^2+2abc}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-c^2}} \\
&= a\sqrt{1-\beta^2}\sqrt{1-\gamma^2}.
\end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned}
1-a^2 &= 1-\frac{(\alpha+\beta\gamma)^2}{(1-\beta^2)(1-\gamma^2)} \\
&= \frac{(1-\beta^2)(1-\gamma^2)-(\alpha+\beta\gamma)^2}{(1-\beta^2)(1-\gamma^2)}.
\end{aligned}$$

Tornando al caso della sfera, abbiamo quindi le espressioni:

$$\cos(a/R) = \frac{\cos(\alpha)+\cos(\beta)\cos(\gamma)}{\sin(\beta)\sin(\gamma)} \quad \text{e} \quad \sin^2(a/R) = \frac{\text{espressione simmetrica in } \cos(\alpha), \cos(\beta)\cos(\gamma)}{\sin^2(\beta)\,\sin^2(\gamma)}$$

e similmente per gli altri lati.

Quindi possiamo dedurre:

TEOREMA DUALE DI CARNOT SFERICO: $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)\cos(\gamma) + \sin(\beta)\sin(\gamma)\cos(a/R)$

che dà un angolo in funzione degli altri due e del lato compreso!

TEOREMA DUALE DI PITAGORA SFERICO: $\cos(\alpha) = -\cos(\beta)\cos(\gamma)$ sse $\frac{a}{R} = \frac{\pi}{2}$ sse $a = \frac{1}{4}$ geodetica

che parla di triangoli rettilati (con un lato retto!)

Il TEOREMA DEI SENI SFERICO è invece AUTODUALE.

Problema: se facciamo il limite $R \to \infty$ (cioè $K \to 0$, sfera $\to$ piano),

che cosa diventano questi risultati?

devono dare qualche formula nota euclidea!