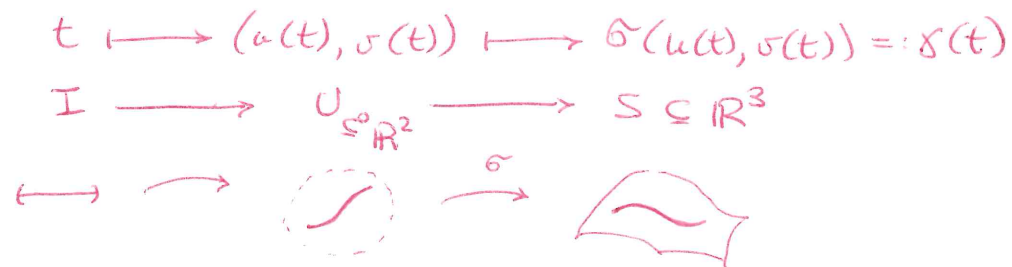


Questa settimana parleremo di CURVE contenute sulle SUPERFICIE, vedremo un rif. mobile ortogonale che tiene conto sia delle curve che delle superficie e lo confrontiamo con quello di Frenet.

Definiremo curvatura geodetica e normale e torsione geodetica (e curve costanti in una superficie, e studieremo un particolare: LINIE DI CURVATURA, LINIE ASINTOTICHE, LINIE GEODETICHE delle superficie).

Ricordiamo che una curva $\gamma(t)$ contenuta in una superficie S di p. loc. σ si rappresenta tramite composizione con σ di una curva nello spazio dei parametri:



Con tale rappresentazione calcoliamo γ' :

$$\gamma' = \sigma_u \cdot u' + \sigma_v \cdot v' \quad \text{da cui} \quad \|\gamma'\|^2 = (u' \ v') G_I \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = I \left(\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right)$$

$$e \quad \gamma'' = (\sigma_{uu} u' + \sigma_{uv} v') u' + \sigma_u \cdot u'' + (\sigma_{vu} u' + \sigma_{vv} v') v' + \sigma_v \cdot v'' = \\ = \sigma_{uu} u'^2 + 2 \sigma_{uv} u' v' + \sigma_{vv} v'^2 + \sigma_u u'' + \sigma_v v''.$$

Per una curva $\gamma \in S$ abbiamo già il sist. locale ortogonale di Frénet, ma possiamo anche definire un sistema adattato a curva e superficie insieme:

SISTEMA DI FRÉNET:

n_f : normale
 principale
 binormale

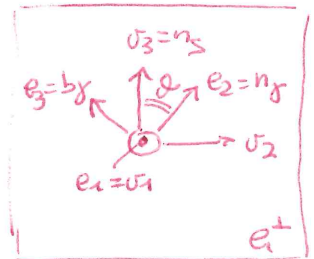
$$\left. \begin{aligned} e_1 &:= \gamma' / \|\gamma'\| && (\text{tg. curv.}, \in T_p(S)) \\ e_2 &:= e_3 \times e_1 \\ e_3 &:= \frac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma' \times \gamma''\|} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{non hanno prefissate} \\ &\text{posizioni rispetto} \\ &\text{alla sup. } S. \end{aligned}$$

SISTEMA DI DARBOUX:

$$\left\{ \begin{aligned} v_1 &:= \gamma' / \|\gamma'\| = e_1 \\ v_2 &:= v_3 \times v_1 = n_S \times v_1 \\ v_3 &:= n_S \quad \text{NORMALE ALLA SUPERFICIE} \end{aligned} \right.$$

per confrontare i due sistemi $E = (e_1 \ e_2 \ e_3)$ e $V = (v_1 \ v_2 \ v_3)$

conviene usare l'angolo ϑ tra n_f (normale principale della curva γ) e n_S (normale alla superficie S): $\cos \vartheta = n_f \cdot n_S = e_2 \cdot v_3$.



Quindi abbiamo:

$$\begin{aligned} E &= V \mathbb{A} \\ V &= E \mathbb{A}^{-1} \end{aligned} \quad \text{dove} \quad \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \vartheta & -\cos \vartheta \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \\ 0 & -\cos \vartheta & \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che la curva sia un parametro d'arco, e definiamo i due sistemi:

$$(e_1' e_2' e_3') = (e_1 e_2 e_3) \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (v_1' v_2' v_3') = (v_1 v_2 v_3) \begin{pmatrix} 0 & -k_g & -k_n \\ k_g & 0 & -\tau_g \\ k_n & \tau_g & 0 \end{pmatrix}$$

sistema di Frenet, già noto:

k = CURVATURA (libera) di γ

τ = TORSIONE (libera) di γ

sistema di Darboux, anch'amente noto
della ortogonalità:

k_g = CURVATURA GEODETICA di γ risp. a S

k_n = CURVATURA NORMALE di γ risp. a S

τ_g = TORSIONE GEODETICA di γ risp. a S

Per vedere le relazioni tra i coefficienti dei due sistemi possiamo

usare direttamente le trasformazioni di coordinate $E = V\Theta$ da

$$E' = EK \quad \text{e} \quad V' = VH$$

e troviamo

$$E' = (V\Theta)' = V'\Theta + V\Theta' = VH\Theta + V\Theta' = V(H\Theta + \Theta')$$

ed $E'K = V\Theta K$ da cui $\Theta K = H\Theta + \Theta'$,

quindi $K = \Theta^{-1}H\Theta + \Theta\Theta'$ e $H = \Theta K \Theta^{-1} - \Theta'\Theta^{-1}$.

Ma forse conviene esplicitare i coseni in modo più semplice, ricordando che $\cos \theta = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}_3$. Allora,

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{e}_1' = \kappa \mathbf{e}_2 \\ \parallel \\ \mathbf{v}_1' = \kappa_g \mathbf{v}_2 + \kappa_n \mathbf{v}_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$$

e dunque:

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa_g = \kappa \sin \theta \\ \kappa_n = \kappa \cos \theta \\ \tau_g = \tau + \theta' \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{derivando } \cos \theta = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ -\theta' \sin \theta = \mathbf{e}_2' \cdot \mathbf{v}_3 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}_3' = \\ = \tau \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{v}_3 - \tau_g \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = \\ = (\tau - \tau_g) \sin \theta \end{array} \right\} \Rightarrow \theta' = \tau_g - \tau$$

Conclusioni:

- la curvatura libera di γ si divide in due: tangenziale e normale (rispetto alla superficie)
- la torsione libera di γ si divide in torsione tangenziale fatto il quale θ' da dice come i due sistemi Frénet / Darboux si muovono uno rispetto all'altro.

Possiamo vedere ora ulteriori significati geometrici della SFF:

deriviamo il vettore $\nu_3 = n_s$ nelle direzioni $e_1 = \nu_1 = \gamma'$ di γ :

$$\nu_1(n) = \begin{cases} dn(\nu_1) = -L(\nu_1) \\ \nu_3' = -k_n \nu_1 - \tau_g \nu_2 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad L(\nu_1) = k_n \nu_1 + \tau_g \nu_2$$

e dunque: $\text{II}(\nu_1, \nu_1) = L(\nu_1) \cdot \nu_1 = k_n$ (già noto!)

$$\text{II}(\nu_1, \nu_2) = L(\nu_1) \cdot \nu_2 = \tau_g$$

In particolare:

- $\tau_g = 0$ sse $L(\nu_1) = k_n \nu_1$ sse ν_1 è AUTOVETTORE PER L
(e allora τ è tutta dovuta a γ' , cioè al vincolo della superficie)
- $k_n = 0$ sse $\text{II}(\nu_1, \nu_1) = 0$ sse ν_1 è ISOTROPO per II
(e allora la curvatura K è tutta tangenziale, cioè sul piano tangente).

Vedremo ora alcuni tipi notevoli di curve su una superficie, in base all'annullamento di alcuni dei coefficienti del sistema di Darboux:

① LINEE DI CURVATURA: sono le curve su S in cui $\tau_g \equiv 0$, cioè le curve su S con tangente data da autovettori per L (direzioni di curvatura).

In particolare tutte le torsioni delle curve e' dovute alle variazioni di θ tra i sistemi Frénet-Darboux, da punti al solito sono in posizione variabile (lungo la curva stessa).

In generale per ogni punto possiamo due linee di curvatura, e sono ortogonali tra loro (sempre autovettori di L , ortogonali per I), e uno dei le curvature principali siano uguali.

Le linee di curvatura sono determinate dall'equazione vettoriale $L(x') \parallel x'$ cioè $G_I \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \parallel G_{II} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$, quindi dall'eq. diff $\text{dot} \left(G_I \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, G_{II} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \right) = 0$ primo ordine, secondo grado.

Usando linee di curvatura come linee coordinate di una proiezione ortogonale, abbiamo vettori ortogonali per I, II, L .

② LINIE ASINTOTICHE: sono le curve su S con $K_n \equiv 0$,
 cioè le curve su S con tangente isotropa per S ,
 è che dà immediatamente l'equazione differenziale $(u' v')_{\text{II}} = 0$.

Esistono nei punti non ellittici (altrimenti le S è definite e non ho isotropi),
 due per i punti iperbolici, una per quelli parabolici.

lungo queste curve i riferimenti di Frénet e di Darboux coincidono (vedere sist. diff.)

cioè $e_2 = n_f \in T_p(S)$, $k_f = k_g$, $\tau_f = \tau_g$ ($v' = 0$),

e possiamo anche calcolare la curvatura K della superficie lungo le curve:

$$K = \det(\mathcal{L}) = \det(\text{II}) = -\text{II}(\sigma_1, \sigma_2)^2 = -\tau^2 < 0.$$

PROBLEMA: cosa si può dire di una curva $\subset S$ che sia di curvatura
 e anche asintotica?

(ci furono i ideali per linee di curvatura e geodetiche,
 e linee asintotiche e geodetiche ...).

- ③ LINEE GEODETICHE: sono le curve γ su S con $k_g \equiv 0$ e $\|\dot{\gamma}\| = 1$,
 cioè curve unitarie senza ~~torzi~~ curvatura geodetica,
 cioè senza proiezione di k_g su $T_p(S)$ lungo le curve: $n_\gamma \perp S$, ovvero $n_\gamma \parallel n_S$.
 Significato intuitivo: tutta la CURVATURA libera (accelerazione) è
 lungo la normale alla superficie, cioè è TUTTA REAZIONE VINCOLARE:
 sul piano tangente viene vista come "curva a velocità costante",
 sono le traiettorie se non agisce nessuna "forza" lungo il piano tangente,
 e la curvatura è tutta dovuta al vincolo di stare sulla superficie.
 Sono "traiettorie di punti liberi" per chi sta sulla superficie!
 Che posizioni reciproche hanno i vettori Frénet / Darboux lungo le geodetiche?

Per determinare equazioni differenziali che determinano le geodetiche si sono usate possibilità:

- approccio ESTRINSECO: si impone $n_\gamma \parallel n_S$ se $\gamma = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}$ e $F(x, y, z) = 0$ equo locale, $n_S = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$,
 quindi $\frac{x''}{F_x} = \frac{y''}{F_y} = \frac{z''}{F_z}$ (equo diff. second'ordine, difficili!).
- approccio INTRINSECO: si impone per γ che $\dot{\gamma} \perp TS$ (si ogni punto di γ): vedremo.
- approccio VARIAZIONALE: minimizzazione lunghezza o energia di γ (vincolata su S col estremi fissati).
- approccio con le DERIVATE COVARIANTI (calcolo differenziale intrinseco delle superficie)

e danno tutti lo stesso sistema di equazioni diff. del second'ordine!

Vediamo l'espressione differenziale delle LINEE GEODETICHE usando l'approccio intrinseco: per $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ con $\gamma' = \sigma_u u' + \sigma_v v'$ imponiamo $\gamma'' \perp T(S)$:

$$\begin{cases} \gamma'' \cdot \sigma_u = 0 \\ \gamma'' \cdot \sigma_v = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sigma_u u' + \sigma_v v')' \cdot \sigma_u = 0 \\ (\sigma_u u' + \sigma_v v')' \cdot \sigma_v = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} ((\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot \sigma_u)' = (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot \sigma_u' = (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot (\sigma_{uu} u' + \sigma_{uv} v') \\ ((\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot \sigma_v)' = (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot \sigma_v' = (\sigma_u u' + \sigma_v v') \cdot (\sigma_{uv} u' + \sigma_{vv} v') \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\sigma_u \cdot \sigma_u u' + \sigma_u \cdot \sigma_v v')' = \sigma_u \cdot \sigma_{uu} u'^2 + (\sigma_u \cdot \sigma_{uv} + \sigma_v \cdot \sigma_{uu}) u' v' + \sigma_v \cdot \sigma_{uv} v'^2 \\ (\sigma_u \cdot \sigma_v u' + \sigma_v \cdot \sigma_v v')' = \sigma_u \cdot \sigma_{uv} u'^2 + (\sigma_u \cdot \sigma_{vv} + \sigma_v \cdot \sigma_{uv}) u' v' + \sigma_v \cdot \sigma_{vv} v'^2 \end{cases}$$

e si vedono emergere i coefficienti di G_I e loro derivate:

$$\begin{cases} (e u' + f v')' = \frac{1}{2} (e_u u'^2 + 2 f_u u' v' + g_u v'^2) \\ (f u' + g v')' = \frac{1}{2} (e_v u'^2 + 2 f_v u' v' + g_v v'^2) \end{cases}$$

COE' EQUAZIONI che DIPENDONO SOLO DALLA PRIMA FORMA FONDAMENTALE!

Scritte in modo più compatto:

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (u' v') \begin{pmatrix} e_u & f_u \\ f_u & g_u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \\ \frac{1}{2} (u' v') \begin{pmatrix} e_v & f_v \\ f_v & g_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Sviluppando è primo termine e invertendo G_I possiamo scrivere a forma normale

$$\begin{pmatrix} u'' \\ v'' \end{pmatrix} = \dots$$

Prima di passare agli esempi conviene fare una osservazione sulle unitarietà:

Sommando le prime equazioni moltiplicate per u' con la seconda moltiplicata per v' otteniamo 0

$$\begin{aligned} u'(eu' + fv')' + v'(fu' + gv')' &= \frac{1}{2} \left[(e_u u' + e_v v') u'^2 + 2(f_u u' + g_v v') u'v' + (g_u u' + g_v v') v'^2 \right] \\ \parallel &= \frac{1}{2} \left[e' u'^2 + 2f' u'v' + g' v'^2 \right] \end{aligned}$$

$$(e' u'^2 + 2f' u'v' + g' v'^2) + (e u' u'' + f u' v'' + f u'' v' + g v' v'')$$

da cui

$$(e' u'^2 + 2f' u'v' + g' v'^2) + 2(e u' u'' + f u' v'' + f u'' v' + g v' v'') = 0$$

da cui

$$(e u'^2 + 2f u'v' + g v'^2)' = 0$$

cioè $e u'^2 + 2f u'v' + g v'^2 = \text{costante} \neq 0$ (ed è Prop 11.8').

Conclusione: le linee geodetiche vengono automaticamente a velocità costante (quasi saranno d'altro ...) e inoltre:

se $u'v' \neq 0$ l'equazione di unitarietà può sostituire una delle equazioni del sistema delle geodetiche, dando un sistema equivalente!

Vediamo come esempio le geodetiche del piano usuale.

In coordinate cartesiane è facile

$$\sigma(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{yy} = 0, \quad G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G_{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

equazioni geodetiche:
$$\begin{cases} (x')' = 0 \\ (y')' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + s x_1 \\ y = y_0 + s y_1 \end{cases} \quad \text{sono le RETTE nel piano, ovviamente!}$$

In coordinate polari è un esercizio un po' complicato:

$$\sigma(\rho, \vartheta) = \begin{pmatrix} \rho \cos \vartheta \\ \rho \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_\rho = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_\vartheta = \begin{pmatrix} -\rho \sin \vartheta \\ \rho \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\rho\rho} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\rho\vartheta} = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \begin{pmatrix} -\rho \cos \vartheta \\ -\rho \sin \vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}, \quad G_{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

equazioni geodetiche:
$$\begin{cases} (\rho')' = \frac{1}{2} (2\rho \vartheta'^2) \\ (\rho^2 \vartheta')' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho'' = \rho \vartheta'^2 \\ 2\rho\rho' \vartheta' + \rho^2 \vartheta'' = 0 \end{cases}$$

quindi
$$\begin{cases} \rho'' = \rho \vartheta'^2 \\ \rho^2 \vartheta'' + 2\rho\rho' \vartheta' = 0 \end{cases}$$

Si vedono subito le soluzioni con $\vartheta' = 0$ (risolve la seconda) e $\rho'' = 0$ (per la prima) e questo ci dà le rette per l'origine (ϑ costante e ρ lineare).

Per cercare le altre soluzioni possiamo supporre $\vartheta' \neq 0$, dunque ϑ' non costante ed eventualmente esprimere $\rho(\vartheta)$, vediamo:

Scegliamo $\rho(\vartheta)$: allora $\rho' = \rho_\vartheta \cdot \vartheta'$

$$\rho'' = (\rho_\vartheta \vartheta')' = \rho_{\vartheta\vartheta} \vartheta'^2 + \rho_\vartheta \vartheta''$$

quindi $\begin{cases} \rho'' = \rho \vartheta'^2 \\ \rho \vartheta'' + 2\rho' \vartheta' = 0 \end{cases}$

dividendo: $\begin{cases} \rho_{\vartheta\vartheta} \vartheta'^2 + \rho_\vartheta \vartheta'' = \rho \vartheta'^2 \\ \rho \vartheta'' + 2\rho_\vartheta \vartheta'^2 = 0 \end{cases}$

e dalle seconde: $\vartheta'' = -2 \frac{\rho_\vartheta}{\rho} \vartheta'$

e sostituiamo nelle prime:

$$\rho_{\vartheta\vartheta} \vartheta'^2 + \rho_\vartheta \left(-2 \frac{\rho_\vartheta}{\rho} \vartheta'^2\right) = \rho \vartheta'^2, \text{ cioè } \boxed{\rho_{\vartheta\vartheta} - 2 \frac{\rho_\vartheta^2}{\rho} - \rho = 0}$$

facciamo la sostituzione $u = \frac{1}{\rho}$, $\rho = \frac{1}{u}$ dunque $\rho_\vartheta = \left(\frac{1}{u}\right)_\vartheta = -\frac{u_\vartheta}{u^2}$

$$\rho_{\vartheta\vartheta} = \left(-\frac{u_\vartheta}{u^2}\right)_\vartheta = \frac{-u_{\vartheta\vartheta} u + 2u_\vartheta^2}{u^3}$$

e troviamo $\frac{-u_{\vartheta\vartheta} u + 2u_\vartheta^2}{u^3} - 2u \frac{u_\vartheta^2}{u^4} - \frac{1}{u} = 0$, cioè $\boxed{u_{\vartheta\vartheta} + u = 0}$

che dà $\frac{1}{\rho} = p \cos \vartheta + q \sin \vartheta$, cioè le RETTE non per origine.

Ricordiamo la retta del piano in coordinate polari:

$ax + by + c = 0$ con $c \neq 0$ dà $a \rho \cos \vartheta + b \rho \sin \vartheta + c = 0$

cioè $\frac{1}{\rho} = -\frac{a}{c} \cos \vartheta - \frac{b}{c} \sin \vartheta$

$\in \langle \cos, \sin \rangle$, ovvero $\left(\frac{1}{\rho}\right)_\vartheta = -\frac{1}{\rho}$.

Vediamo una alternativa:

da $\begin{cases} \rho'' = \rho \vartheta'^2 \\ (p^2 \vartheta')' = 0 \end{cases}$ vediamo che $p^2 \vartheta' = c$ è COSTANTE LUNGO LA GEOMETRICA
(costante per geodetiche diverse!)

dunque $\boxed{\vartheta' = \frac{c}{p^2}}$, e sostituendo nella prima: $\rho'' = \rho \frac{c^2}{p^4}$

da cui $\rho'' \rho' = \frac{c^2}{\rho^3} \rho'$ e integrando $\rho'^2 = -\frac{c^2}{\rho^2} + d$ (con $d=1$ per unitarietà);
($\|\gamma''\| = \rho'^2 + \rho^2 \vartheta'^2 = \rho'^2 + \frac{c^2}{\rho^2}$)

quindi $\rho'^2 = \frac{\rho^2 - c^2}{\rho^2}$

e $\boxed{\rho' = \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\rho}}$

Pensando ϑ in funzione di ρ :

$$\frac{d\vartheta}{d\rho} = \frac{\vartheta'}{\rho'} = \frac{c/\rho^2}{\sqrt{\rho^2 - c^2}/\rho} = \frac{c}{\rho \sqrt{\rho^2 - c^2}} \quad \text{e integrando} \quad d\vartheta = \frac{c d\rho}{\rho \sqrt{\rho^2 - c^2}} \quad \text{da}$$

$$\vartheta(\rho) = \operatorname{arccos}\left(\frac{c}{\rho}\right) + d = \operatorname{arccos}\left(\frac{c}{\rho}\right) + d$$

quindi $\cos(\vartheta - d) = \frac{c}{\rho}$, cioè $\rho \cos \vartheta + q \sin \vartheta = \frac{l}{e}$

che sono di nuovo le equazioni di rette non per Q .

Di solito il sistema differenziale delle geodetiche è molto difficile da trattare.

Un caso in cui riusciamo a dire molto è quello di CLAIRAUT:

Supponiamo che la superficie S abbia le seguenti proprietà: $g(u, v)$ separabile, i.e.

$$g_I = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}, \quad g_{Iu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_{Iv} = \begin{pmatrix} e_v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{cioè } g \text{ dipende, indipendente da } u, \\ \text{e termine } g \text{ costante}$$

Allora il sistema differenziale delle geodetiche diventa:

$$\begin{cases} (eu')' = 0 \\ (gv')' = \frac{1}{2} e_v u'^2 \end{cases} \quad \text{da cui si deduce subito che } eu' \text{ è quantità} \\ \text{costante lungo ciascuna linea geodetica.}$$

Questo ci permette di ridurre il sistema ad una equazione diff. ordinaria:

poniamo $eu' = c$, quindi $u' = \frac{c}{e}$ e sostituendo nelle condizioni di normalità:

$$eu'^2 + gv'^2 = 1 \Rightarrow e \left(\frac{c}{e}\right)^2 + gv'^2 = 1 \Rightarrow v'^2 = \frac{1 - c^2/e}{g} = \frac{e - c^2}{eg}$$

e per $v' \neq 0$ possiamo ricavare:

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'}{v'} = \frac{c/e}{\sqrt{(e-c^2)/eg}} = \frac{c\sqrt{g}}{\sqrt{e}\sqrt{e-c^2}} \quad (\text{funzione di } v \text{ tramite } e(v))$$

che è equazione differenziale ordinaria, comunque difficile da trattare
(ma utile numericamente!)

Sempre sotto le ipotesi di CAIRAUT possiamo anche fare uno studio qualitativo delle geodetiche che ci dà qualche informazione geometrica interessante:

vediamo il significato delle costanti in $eu' = c$:

Se ϑ è l'angolo tra linea geodetica e linee coordinate $v = v_0$ costante abbiamo

$$\cos \vartheta = \frac{(w \ v') \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{e}} = \frac{eu'}{\sqrt{e}} = \frac{c}{\sqrt{e}}, \text{ quindi } c = \sqrt{e} \cos \vartheta$$

da cui si vede che (essendo $\cos^2 \vartheta \leq 1$) lungo le geodetiche si ha $c^2 \leq e$, cioè le geodetiche non può passare per punti della superficie con valore di e che siano piccoli ($\leq c^2$): si tratta di una LIMITAZIONE GEOMETRICA delle possibili traiettorie geodetiche (in funzione delle sue costanti c).

Inoltre dalle relazioni $\sqrt{e} \cos \vartheta = eu' = c$ costante lungo le geodetiche vediamo:

se e aumenta allora $\cos \vartheta$ diminuisce e u' diminuisce,
(ϑ aumenta)

se e diminuisce allora ϑ diminuisce e u' aumenta.

Questo ci permetterà di capire l'andamento delle geodetiche nei alcuni casi.

PROBLEMA: Le ipotesi di CAIRAUT sono inutilmente restrittive: provare le stesse tecniche con la sola ipotesi che la pff dipenda solo da v (e non da u):

$$G_i = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}, \quad G_{i,u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{i,v} = \begin{pmatrix} e_v & f_v \\ f_v & g_v \end{pmatrix} \dots \text{ (CASO DI MANFREDI)}$$

PRIMA DI PASSARE AGLI ESEMPI, cominciamo FARE alcune osservazioni sulle geodetiche:

- (1) Risolvendo un sistema di 2 eq del secondo ordine, otteniamo due per ogni punto e per ogni direzione tangente ci sono localmente una unica geodetica con quei dati iniziali (quanto ai problemi non è ovvio!)
- (2) non è detto che una linea geodetica sia "di minima distanza" tra due qualsiasi suoi punti (solo se sono "distanze vicine"), e tra due fissati punti possono anche passare molte (anche infinite) geodetiche.
- (3) Le linee geodetiche possono anche AUTOINTERSECCARSI o essere delle curve chiuse.

Vediamo questi fenomeni negli esempi di cilindri, coni, superfici di rotazione, tori, sfere, ecc.