Facciamo una panoramica su alcuni argomenti più avanzati:

① TEOREMA DI GAUSS - BONNET

② CALCOLO DIFFERENZIALE INTRINSECO DELLE SUPERFICIE:

DERIVATE COVARIANTI, simboli di Chrystoffel

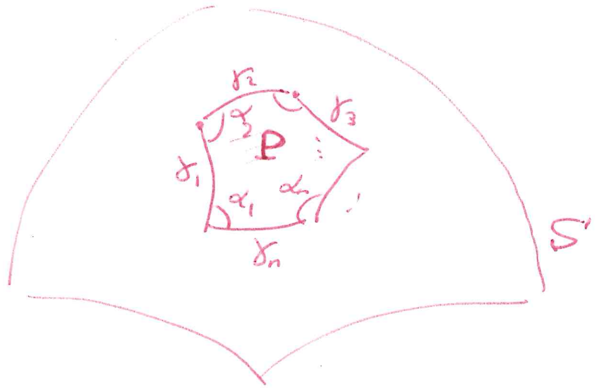
EQUAZIONI FONDAMENTALI DELLE SUPERFICIE: GAUSS (tangenziali)

CODAZZI - MAINARDI (normali)

TEOREMA FONDAMENTALE ($\exists!$ / isometrie) PER LE SUPERFICIE $\subset \mathbb{R}^3$.

Il teorema di GAUSS - BONNET riguarda i poligoni sulle superficie:

- la parte di Gauss (teorema elegantissimus) riguarda i poligoni GEODETICI, cioè con lati geodetici:



$$\sum_i \alpha_i = (n-2)\pi + \iint_P K$$

in particolare per K costante (oppure P piccolo)

$$\sum \alpha_i = (n-2)\pi + K\,\text{Area}(P)$$

e dà un modo per stimare K facendo misure (di angoli) su triangoli geodetici.

- il contributo di Bonnet riguarda i poligoni qualsiasi, con lati non necessariamente geodetici (cioè con γ_i con curvatura geodetica k_{g_i} non necessariamente nulle):

$$\sum_i \alpha_i = (n-2)\pi + \sum_i \int_{\gamma_i} k_{g_i} + \iint_P K.$$

La dimostrazione di queste formule richiede l'integrazione di 2-forme differenziali.

Il CALCOLO DIFFERENZIALE INTRINSECO (O COVARIANTE) consiste essenzialmente nel distinguere componente tangenziale e componente normale rispetto a S del calcolo differenziale dell'ambiente:

se X, Y sono campi vettoriali tangenti, $X(Y)$ di solito non è tangente e possiamo decomporlo in parte tangente denotata $\nabla_X(Y)$ e normale:

$$
\begin{aligned}
X(Y) &= \nabla_X(Y) + (X(Y)\cdot n)\,n \\
&= \nabla_X(Y) - (Y\cdot X(n))\,n \\
&= \nabla_X(Y) + \mathrm{II}(X,Y)\,n
\end{aligned}
$$

cioè $\nabla_X(Y) = \underbrace{X(Y)}_{\text{derivazione nell'ambiente}} - \underbrace{\mathrm{II}(X,Y)n}_{\text{parte normale alla superficie}}$

L'operazione ∇_X ha le usuali proprietà di linearità e Leibniz.

Inoltre si determina in base al valore su una base dello sp. tangente, sia ∂_i, tramite coefficienti $\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$

dove i Γ_{ij}^k sono detti simboli di Christoffel e sono intrinseci, cioè si calcolano solo in base alla pff di S.

Usando questo calcolo si possono esplicitare le geodetiche come le curve γ con $\gamma' = \sum_i \gamma_i' \partial_i$ tali che $\nabla_{\gamma'}(\gamma') = 0$, che diventa:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\gamma'}(\gamma') &= \nabla_{\gamma'}\left(\textstyle\sum_i \gamma_i' \partial_i\right) \\
&= \sum_i \gamma_i'' \partial_i + \sum_i \gamma_i' \nabla_{\gamma'}(\partial_i) \\
&= \sum_i \gamma_i'' \partial_i + \sum_i \gamma_i' \sum_j \gamma_j' \nabla_{\partial_j}(\partial_i) \\
&= \sum_k \gamma_k'' \partial_k + \sum_k \left(\textstyle\sum_{i,j} \gamma_i' \gamma_j' \Gamma_{ij}^k\right) \partial_k
\end{aligned}$$

da cui si deduce il sistema di equazioni differenziali

$$\gamma_k'' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \gamma_i' \gamma_j' = 0 \qquad \underline{\underline{\forall k}}$$

che è il sistema da noi trovato e portato in forma normale

Per trovare le equazioni strutturali delle superfici si parte dai commutatori:

$$XY - YX = [X,Y] \qquad \left(\text{da cui } \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = [X,Y] \text{, ma } \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X \neq \nabla_{[X,Y]} \dots\right)$$

e si calcolano parte tangenziale e normale dei termini:

$$XY(Z) = X\left(\nabla_Y(Z) + \mathrm{II}(Y,Z)n\right) = X(\nabla_Y(Z)) + X(\mathrm{II}(Y,Z)n) =$$

$$= \nabla_X(\nabla_Y(Z)) + \mathrm{II}(X,\nabla_Y(Z))n + X(\mathrm{II}(Y,Z))n + \mathrm{II}(Y,Z)X(n)$$

$$YX(Z) = \nabla_Y(\nabla_X(Z)) + \mathrm{II}(Y,\nabla_X(Z))n + Y(\mathrm{II}(X,Z))n + \mathrm{II}(X,Z)Y(n)$$

$$[X,Y](Z) = \nabla_{[X,Y]}(Z) + \mathrm{II}([X,Y],Z)n$$

Confrontando le parti tangenziali si ottengono le equazioni di GAUSS:

$$\left(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right)(Z) = \mathrm{II}(Y,Z)L(X) - \mathrm{II}(X,Z)L(Y)$$

e facendo il prodotto scalare con un campo W si trova a destra

$$\mathrm{II}(Y,Z)\,\mathrm{II}(X,W) - \mathrm{II}(X,Z)\,\mathrm{II}(Y,W)$$

che per $Z=Y$, $W=X$ dà il determinante della sff:

siccome il termine di sinistra dipende solo dalla ∇,

quindi solo dalla pff, abbiamo un'altra dimostrazione del T. Egregium!

Confrontando le parti normali otteniamo le equazioni di CODAZZI - MAINARDI :

$$\mathrm{II}(X, \nabla_Y(Z)) + X(\mathrm{II}(Y,Z)) - \mathrm{II}(Y, \nabla_X(Z)) - Y(\mathrm{II}(X,Z)) = \mathrm{II}([X,Y], Z)$$

Entrambe le equazioni possono essere scritte esplicitamente in termini dei coefficienti di Christoffel e dei coefficienti di pff e sff (le equazioni di Gauss dipendono in effetti solo dalla pff).

La difficoltà nel dare un teorema di esistenza (e unicità modulo isometrie) per le superficie rispetto alle curve è la seguente: mentre per le curve si doveva risolvere un sist. diff. ORDINARIO (c'è con meno derivabile), per le superficie il problema si presenta come un sistema di equazioni alle derivate parziali nei due parametri.

PER ESEMPIO, VOLENDO RISOLVERE IL SEGUENTE SISTEMA con φ incognita:

$$\begin{cases} \partial_x \varphi = f \\ \partial_y \varphi = g \end{cases}$$ ove f, g sono funzioni delle variabili x, y

E' CONDIZIONE NECESSARIA per l'esistenza di φ che si abbia

$\partial_y f = \partial_x g$ (perché entrambe coinciderebbero con $\partial_y \partial_x \varphi = \partial_x \partial_y \varphi$)

e se questa condizione di integrabilità è soddisfatta, allora una soluzione φ esiste localmente.

Ora, le equazioni di Gauss e Codazzi Mainardi sono proprio quelle che codificano la relazione di commutazione delle derivazioni:

Il <u>TEOREMA FONDAMENTALE DELLE SUPERFICIE</u> dirà allora

date tre funzioni e, f, g con $e, f, eg - f^2 > 0$

e tre funzioni l, m, n

allora esiste (localmente) una superficie S con $G_I = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$ e $G_{II} = \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix}$

se e solo se tali funzioni soddisfano

le equazioni di Gauss e di Codazzi Mainardi.

Inoltre tale S è unica a meno di isometrie dello spazio.

PANORAMICA SULLE EQUAZIONI DELLE GEODETICHE : $\gamma(t) = \sigma(u_i(t))$, $\gamma' = \sum_i \sigma_i u_i'$ $(TS = \langle \sigma_i \rangle)$

① METODO INTRINSECO : $\gamma'' \perp TS$: $\{ \gamma'' \cdot \sigma_k = 0 \quad \underline{\forall k} \Rightarrow \{ (\Sigma \sigma_i u_i')' \cdot \sigma_k = 0 \quad \underline{\forall k} \Rightarrow$

$$\{ ((\Sigma_i \sigma_i u_i') \cdot \sigma_k)' = (\Sigma_i \sigma_i u_i') \cdot \sigma_k' = (\Sigma_i \sigma_i u_i') \cdot (\Sigma_j \sigma_{kj} u_j') \quad \underline{\forall k} \Rightarrow$$

$$\{ (\Sigma_i \sigma_i \cdot \sigma_k u_i')' = \Sigma_{i,j} \sigma_i \cdot \sigma_{kj} u_i' u_j' \quad \underline{\forall k}$$ e usiamo $g_{ik} = \sigma_i \cdot \sigma_k$

$(g_{ij})_k = (\sigma_i \cdot \sigma_j)_k = \sigma_{ik} \cdot \sigma_j + \sigma_i \cdot \sigma_{jk}$

$$\{ (\Sigma_i g_{ik} u_i')' = \frac{1}{2} \Sigma_{i,j} (g_{ij})_k u_i' u_j' \quad \underline{\forall k}$$

FORMA MATRICIALE : $(G\gamma')' = \frac{1}{2} (\gamma'^t G_k \gamma')$ con $G = (g_{ij})$, $G_k = ((g_{ij})_k)$.

FORMA ESPLICITA : derivando i termini sinistri :

$$\{ \Sigma_i g_{ik} u_i'' + \Sigma_i \Sigma_j (g_{ik})_j u_j' u_i' = \frac{1}{2} \Sigma_{i,j} (g_{ij})_k u_i' u_j' \quad \underline{\forall k}$$

$$\{ \Sigma_i g_{ik} u_i'' = \frac{1}{2} \Sigma_{i,j} ((g_{ij})_k - (g_{ik})_j - (g_{jk})_i) u_i' u_j' \quad \underline{\forall k}$$

e invertendo la matrice $G = (g_{ik})$ in $G = (g^{ik})$ si può scrivere :

$$u_k'' = \frac{1}{2} \Sigma_{i,j} \left(\Sigma_k g^{ik} ((g_{ij})_k - (g_{ik})_j - (g_{jk})_i) \right) u_i' u_j'$$

② CALCOLO COVARIANTE : $\nabla_{\gamma'}(\gamma') = 0$

$$\nabla_{\gamma'}(\gamma') = \nabla_{\gamma'}\left(\sum_i \gamma_i' \partial_i\right)$$
$$= \sum_i \gamma'(\gamma_i')\partial_i + \sum_i \gamma_i' \nabla_{\gamma'}(\partial_i)$$
$$= \sum_i \gamma_i'' \partial_i + \sum_i \gamma_i' \left(\sum_j \gamma_j' \nabla_{\partial_j}\right)(\partial_i)$$
$$= \sum_i \gamma_i'' \partial_i + \sum_{i,j} \gamma_i' \gamma_j' \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \qquad \text{perché } \nabla_{\partial_j}(\partial_i) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$
$$= \sum_k \left(\gamma_k'' + \sum_{ij} \Gamma_{ij}^k \gamma_i' \gamma_j'\right) \partial_k$$

e risulta

$$\begin{cases} \gamma_k'' = -\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \gamma_i' \gamma_j' \end{cases} \qquad \underline{\underline{\forall k}}$$

e confrontando con le pagine precedenti si vedono i Γ_{ij}^k funzione di g_{ij}.

③ METODO VARIAZIONALE : cercare le curve γ che minimizzano lunghezza o energia delle curve, come punti critici di un funzionale:

$$E(s) = \int_{t_0}^{t_1} \|\partial_t \gamma(s,t)\|^2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{ij} g_{ij}(\gamma(s,t))\, \partial_t \gamma_i(s,t)\, \partial_t \gamma_j(s,t)\, dt$$

dove $\gamma(t)$ curva e $\gamma(s,t)$ è deformazione di $\gamma(t)$ con un parametro reale s, ad estremi fissi.

$$0 = \frac{d}{ds} E(s) = \int_{t_0}^{t_1} \partial_s \left(\sum_{ij} g_{ij} \gamma_i' \gamma_j' \right) dt$$

dove $' = \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_{ij} \left(\sum_k \partial_k (g_{ij}) \partial_s(\gamma_k) \right) \gamma_i' \gamma_j' + \sum_{ij} g_{ij} \partial_s(\gamma_i') \gamma_j' + \sum_{ij} g_{ij} \gamma_i' \partial_s(\gamma_j') \right] dt$$

integr. per parti : $\int_{t_0}^{t_1} \varphi \partial_s(\psi') dt = [\varphi \partial_s(\psi)]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \varphi' \partial_s(\psi) dt$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum_h \sum_{ij} \partial_h (g_{ij}) \gamma_i' \gamma_j' \partial_s(\gamma_h) - \sum_{ij} (g_{ij} \gamma_j')' \partial_s(\gamma_i) - \sum_{ij} (g_{ij} \gamma_i')' \partial_s(\gamma_j) \right] dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_k \underline{\left[\sum_{ij} \partial_k (g_{ij}) \gamma_i' \gamma_j' - \sum_j (g_{kj} \gamma_j')' - \sum_i (g_{ik} \gamma_i')' \right]} \partial_s(\gamma_k)\, dt$$

OGNUNO DEI TERMINI è NULLO : altrimenti si trova un $\int \neq 0$ usando funzioni che vivono solo vicino a punti di non nullità.

Dunque : $\left\{ \sum_{ij} \partial_k (g_{ij}) \gamma_i' \gamma_j' - 2 \left(\sum_j g_{kj} \gamma_j' \right)' = 0 \right. \qquad \forall k$

cioè $\left\{ \left(\sum g_{kj} \gamma_j' \right)' = \frac{1}{2} \sum_{ij} \partial_k (g_{ij}) \gamma_i' \gamma_j' \right. \qquad \forall k$

(sistema già noto!).

INFINE, vediamo in generale che le curve che soddisfano al sist. diff. sono curve a velocità costante:

dal sistema $\left\{ \left(\sum_i g_{ik} u_i' \right)' = \frac{1}{2} \sum_{ij} (g_{ij})_k u_i' u_j' \right.$ $\forall k$

moltiplicando per u_k' e $\sum_k$ otteniamo:

$$\sum_k u_k' \left(\sum_i g_{ik} u_i' \right)' = \frac{1}{2} \sum_{ij} \left[\sum_k u_k' (g_{ij})_k \right] u_i' u_j'$$

dunque:

$$\sum_{k,i} g_{ik}' u_k' u_i' + \sum_{k,i} g_{ik} u_k' u_i'' = \frac{1}{2} \sum_{ij} g_{ij}' u_i' u_j'$$

$$\sum_{k,i} g_{ik}' u_i' u_k' + 2 \sum_{k,i} g_{ik} u_k' u_i'' = 0$$

$$\left(\sum_{k,i} g_{ik} u_i' u_k' \right)' = 0$$

che dà esattamente $\|\gamma'\|' = 0$.