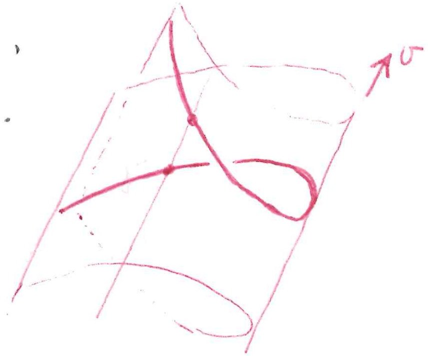
Questa settimana sarà dedicata ad alcune classi di ESEMPI, che vanno affrontati sia come esercizi, sia come parte integrante della "teoria". Vedremo con qualche dettaglio:

- cilindri, coni, sviluppabili delle tangenti (sono le sup. loc. isometriche al piano!)
- superficie di ROTAZIONE, in particolare i TORI immersi in $\mathbb{R}^3$
- superficie ELICOIDALI
- superficie RIGATE

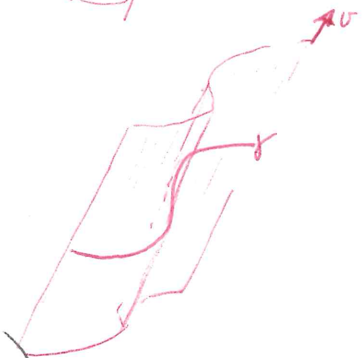
ma si potranno trovare altri esempi nelle dispense del corso, per esempio le superficie TUBULARI.

In ogni caso cercheremo di "esplicitare" tutta la nostra teoria: prima e seconda forma, Weingarten, curvature e tipi di punti, linee coordinate, asintotiche, geodetiche, eventuali isometrie o mappe interessanti ....

Data una curva $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ e un vettore $v \in \mathbb{R}^3$ definiamo il CILINDRO DI BASE γ E DIREZIONE v: unione delle rette $\gamma(s) + \langle v \rangle$, quindi con parametrizzazione $\sigma(s,t) = \gamma(s) + tv$ con $(s,t) \in I \times \mathbb{R}$.



Si vede subito che questa parametrizzazione è INIETTIVA se non esistono secanti di γ che siano parallele a v e in tal caso possiamo ottenere lo stesso cilindro usando una curva γ che sia PIANA su un piano ortogonale a v (intersezione del cilindro con quel piano).



Tuttavia è possibile svolgere i calcoli anche nella situazione generale:

$$\sigma_s = \gamma', \quad \sigma_t = v, \quad \text{quindi} \quad G_I = \begin{pmatrix} \|\gamma'\|^2 & \gamma' \cdot v \\ & \|v\|^2 \end{pmatrix} \overset{\text{se } \|\gamma'\|=1,\ \|v\|=1}{=} \begin{pmatrix} 1 & \cos\varphi \\ & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{se } \gamma' \perp v}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n = \frac{\gamma' \times v}{\|\gamma' \times v\|}, \quad \sigma_{ss} = \gamma'', \quad \sigma_{st} = 0, \quad \sigma_{tt} = 0, \quad G_{II} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma' \times \gamma'' \cdot v}{\|\gamma' \times v\|} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\|\gamma''\| \frac{\cos\theta}{\sin\varphi} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_\gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La curvatura di Gauss risulta identicamente nulla.

Il sistema delle geodetiche in generale è difficile, ma per $\|\gamma'\| = 1 = \|v\|$ e $\gamma' \perp v$ diventa facile.

Esplicitiamo meglio i conti con γ curva piana e $\gamma' \perp v$,

possiamo supporre $\gamma = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ quindi $\sigma(s,t) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ t \end{pmatrix}$, da cui:

$\sigma_s = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $G_I = \begin{pmatrix} x'^2+y'^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ supponendo γ unitaria, $\|\gamma'\|^2 = x'^2+y'^2 = 1$.

$n = \frac{\sigma_s \times \sigma_t}{\|\sigma_s \times \sigma_t\|} = \begin{pmatrix} y' \\ -x' \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_{ss} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_{st} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_{tt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $G_{II} = \begin{pmatrix} y'x''-x'y'' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_\gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

dunque $K = 0$, $H = -k_\gamma/2$, e tutti i punti sono parabolici se $k_\gamma \neq 0$.

$L = G_I^{-1} G_{II} = G_{II}$.

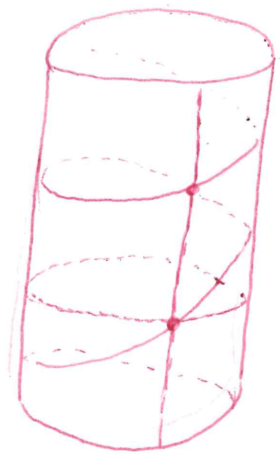
Le linee di curvatura sono le linee coordinate della parametrizzazione (L è già diagonale)

Le linee asintotiche sono quelle con direz $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi $s = s_0$ costante, sono le rette $\subseteq$ cilindro

Per le linee geodetiche otteniamo il sistema $\begin{cases} s'' = 0 \\ t'' = 0 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} s(u) = s_0 + us_1 \\ t(u) = t_0 + ut_1 \end{cases}$

e sono $\sigma(s(u), t(u)) = \begin{pmatrix} x(s(u)) \\ y(s(u)) \\ t(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s_0+us_1) \\ y(s_0+us_1) \\ t_0+ut_1 \end{pmatrix}$

e hanno la forma di "eliche" che si avvolgono sul cilindro,



notare che per due punti distinti possono passare diverse geodetiche, quindi non è detto che una geodetica per due punti sia di "minima distanza" (non è una "curva critica" per la lunghezza, cioè piccole deformazioni aumentano la lunghezza!

Vediamo infine che i cilindri sono <u>localm. isometrici al piano</u>:
usiamo per il piano parametrizzazione cartesiana; allora otteniamo una mappa dal piano al cilindro componendo con le carte:

$$\begin{tikzcd}
\text{PIANO} \arrow[r, dashed] & \text{CILINDRO} & \gamma(s)+tv \\
\text{PIANO} \arrow[u, "="] \arrow[r, "id"] & \text{PIANO} \arrow[u] & (s,t) \arrow[u, "\sigma"'] \\
(s,t) \arrow[r, mapsto] & (s,t) &
\end{tikzcd}$$

e abbiamo $G_{PIANO} = \mathbb{1}_2$, $G_{CILINDRO} = \mathbb{1}_2$, la carta è l'identità, dunque jac. del dG è $\mathbb{1}_2$, chiaramente una isometria!

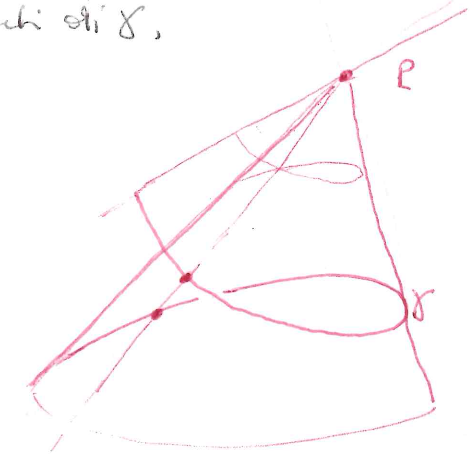
Da notare quindi che le geodetiche del cilindro sono proprio le immagini delle geodetiche del piano (cioè delle rette del piano).

<u>Problema</u>: quali sono le ISOMETRIE del cilindro in sè?

Se ne vedono alcune ovvie, per esempio le traslazioni nella direzione di v, oppure le traslazioni di parametro d'arco della curva γ.

Ma ce ne sono molte altre: perché?

Data una curva $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ e un punto $P \in \mathbb{R}^3 \setminus \gamma$ definiamo il <u>CONO DI BASE γ e VERTICE P</u> : unione delle rette da P a punti di γ, quindi con parametrizzazione $\sigma(s,t) = P + t(\gamma(s) - P)$ e <u>A PARTE IL VERTICE ($t=0$)</u> è iniettiva sse ogni retta per P contiene al più un punto della curva γ.



Allora possiamo supporre $P =$ origine, γ curva sferica unitaria sulla sfera unitaria (basta intersecare il cono con la sfera unitaria!) :

$\sigma(s,t) = t\gamma(s)$, dunque $\sigma_s = t\gamma'$, $\sigma_t = \gamma$ e $G_I = \begin{pmatrix} \|\gamma\| & t\gamma\cdot\gamma' \\ & t^2\|\gamma'\| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$

$n = \dfrac{t\gamma\times\gamma'}{\|t\gamma\times\gamma'\|} = \gamma\times\gamma'$, $\sigma_{tt} = 0$, $\sigma_{ts} = \gamma'$, $\sigma_{ss} = t\gamma''$, e $G_{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t\,\gamma\times\gamma'\cdot\gamma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & tJ \end{pmatrix}$

e $L = G_I^{-1} G_{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & J/t \end{pmatrix}$.

Dunque abbiamo $K = 0$, $H = J/2t$, dunque punti parabolici se $J \neq 0$, linee di curvatura sono quelle coordinate (dipende dalle ipotesi su γ), linee asintotiche: sono le rette $\sigma(t, s_0)$ per s_0 costante.

Cerchiamo le geodetiche: ricordiamo $G_I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & t^2\end{pmatrix}$,

quindi il sistema $\begin{cases}(t')' = \frac{1}{2}(2ts'^2)\\ (t^2 s')' = 0\end{cases}$ e usiamo: $s'=0 \Rightarrow t''=0$ (rette per VERTICE)

altrimenti $s' \neq 0$ e procediamo con CLAIRAUT:

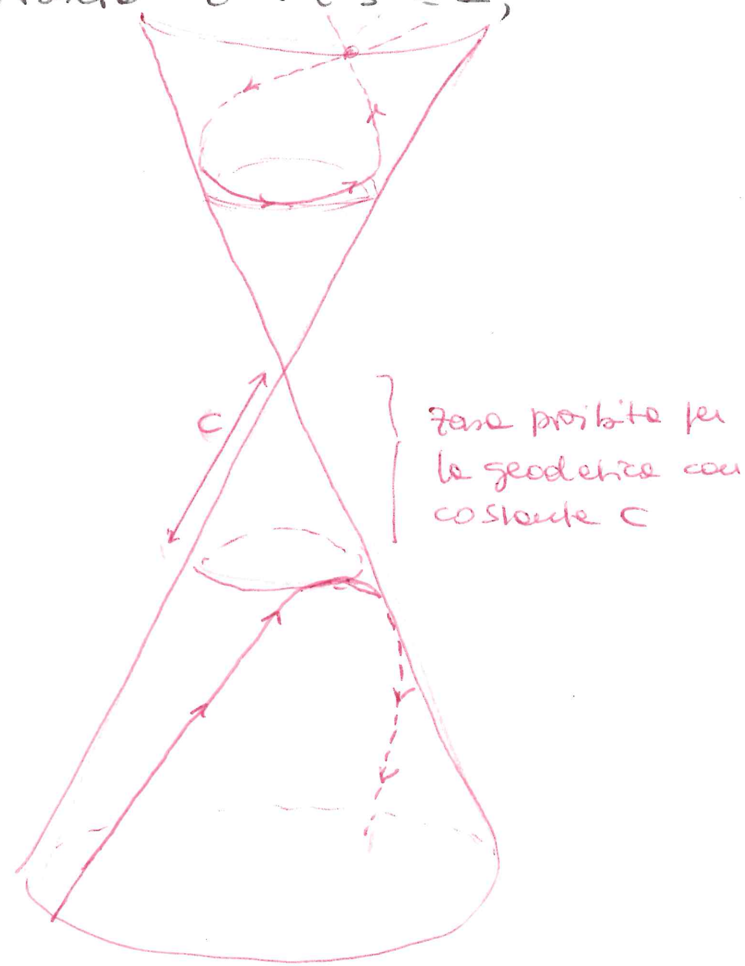
$t^2 s' = c$, quindi $s' = c/t^2$, e sostituiamo nella unitarietà $t'^2 + t^2 s'^2 = 1$,

quindi $t'^2 + c^2/t^2 = 1$, cioè $t' = \frac{\sqrt{t^2-c^2}}{t}$,

$\frac{ds}{dt} = \frac{s'}{t'} = \frac{c}{t\sqrt{t^2-c^2}}$, che si integra subito:

$s(t) = \int \frac{c}{t\sqrt{t^2-c^2}}\,dt = \arccos\left(\frac{c}{|t|}\right) + s_0$

e le altre geodetiche sono $t \cdot \gamma\left(s_0 + \arccos\left(\frac{c}{|t|}\right)\right)$.



Vediamo lo studio "qualitativo":

la limitazione $\frac{c^2}{t^2} \le 1$ dà $t^2 \ge c^2$,

e (siccome $|t|$ è la distanza dal VERTICE)

la GEODETICA non può avvicinarsi troppo al vertice! e ribalta indietro:

solo le rette, tra le geodetiche, possono arrivare al vertice.

Anche i coni sono localmente isometrici al piano, ma conviene usare coordinate polari del piano, visto G_I del ~~cilindro~~ cono:

$$\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \end{pmatrix} & \text{PIANO} \setminus \{0\} \arrow[r, dashed, "\varphi"] & \text{CONO} \setminus \{\text{vertice}\} & t\gamma(s) \\
\left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = (\rho,\theta) \arrow[u] & \text{PIANO} \arrow[u] \arrow[r] & \text{PIANO} \arrow[u] & (t,s) \arrow[u] \\
 & (\rho,\theta) \arrow[r, mapsto] & (\rho,\theta) &
\end{tikzcd}$$

otteniamo $G_{PIANO} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$, φ = identità sulle param., $G_{CONO} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix}$

quindi chiaramente una ISOMETRIA (che è $(x,y) \longmapsto \sqrt{x^2+y^2}\,\gamma\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$).

Possiamo ritrovare allora le geodetiche del ~~piano~~ cono facendo l'immagine delle rette del piano.

Problema: quali sono le isometrie del cono in sé?

Data una curva biregolare $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ definiamo la <u>SVILUPPABILE delle TANGENTI di γ</u>: è l'unione delle rette tangenti a γ, parametrizzata da $\sigma(u,s) = \gamma(s) + u\gamma'(s)$.

Supponiamo γ unitaria e ricordiamo che $\quad \gamma' = t_\gamma, \; \gamma' \perp \gamma''$

$\gamma'' = k_\gamma n_\gamma \quad (n_\gamma = \gamma''/\|\gamma''\|)$

$\gamma''' = k_\gamma' n_\gamma + k_\gamma n_\gamma' = -k_\gamma^2 t_\gamma + k_\gamma' n_\gamma + k_\gamma \tau_\gamma b_\gamma$

Allora:

$\sigma_u = \gamma' = t_\gamma, \quad \sigma_s = \gamma' + u\gamma'' = t_\gamma + u k_\gamma n_\gamma,$

<u>nota</u>: lungo $u=0$ (la curva originale!) i due vettori sono dipendenti, quindi lì la sup non è regolare!

quindi $\quad G_I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+u^2k_\gamma^2 \end{pmatrix}$ (notare che dipende da u e anche da s tramite k_γ).

$n_\sigma = \dfrac{\sigma_u \times \sigma_s}{\|\sigma_u \times \sigma_s\|} = b_\gamma, \quad \sigma_{uu} = 0, \quad \sigma_{us} = \gamma'' = k_\gamma n_\gamma, \quad \sigma_{ss} = \gamma'' + u\gamma''' = -uk_\gamma^2 t_\gamma + (k_\gamma + uk_\gamma') n_\gamma + uk_\gamma\tau_\gamma b_\gamma$

quindi $\quad G_{II} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uk_\gamma\tau_\gamma \end{pmatrix}$

e $\quad L = G_I^{-1} G_{II} = \dfrac{1}{u^2k_\gamma^2} \begin{pmatrix} 1+u^2k_\gamma^2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & uk_\gamma\tau_\gamma \end{pmatrix} = \dfrac{\tau_\gamma}{uk_\gamma} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

dunque $K = 0$, $H = \tau_\gamma / 2uk_\gamma$ e i punti sono parabolici o planari.

Le linee asintotiche hanno direzione $\binom{1}{0}$ e sono le rette $\sigma(u, s_0)$

Le linee di curvatura hanno direzioni $\binom{1}{0}$ e $\binom{1}{-1}$, cioè le curve $\sigma(u,-u)$.

Le sviluppabili delle tangenti di una curva sono superficie isometriche al piano, scrivere una isometria esplicita è complicato, ma si può ragionare così:
la pff della sviluppabile dipende solo da k_γ e non da τ_γ,
quindi sviluppabili di curve con la stessa curvatura saranno isometriche,
e possiamo trovare CURVE PIANE con quella curvatura k_γ,
naturalmente la sviluppabile di una curva piana è una REGIONE DI PIANO.

Esercizio: provare a scrivere le sviluppabili in modo che le pff diventi diagonale, usando le linee di curvatura che abbiamo trovato, dovrebbe venire la parametrizzazione $\sigma(u,s) = \gamma(s) + (u-s)\gamma'(s)$,
e provare a scrivere il sistema delle geodetiche

E' un risultato classico, ma non facilissimo da mostrare, che:
LE UNICHE SUPERFICIE (immerse in $\mathbb{R}^3$) isometriche (localm.) al piano sono i cilindri, i coni e le sviluppabili delle tangenti -

Studiamo ora le SUPERFICIE DI ROTAZIONE: per definizione sono le superficie descritte da una curva piana che viene fatta ruotare attorno ad una retta del piano che non la interseca.

Usando come asse la retta $<\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}>$,

e come profilo la curva $\gamma(s) = \begin{pmatrix}x(s)\\0\\z(s)\end{pmatrix}$

otteniamo una parametrizzazione del tipo

$$\sigma(s,\vartheta) = \begin{pmatrix}x(s)\cos\vartheta\\x(s)\sin\vartheta\\z(s)\end{pmatrix}$$

e se la curva γ ha equazione cartesiana $f(x,z)=0$ possiamo trovare una equazione cartesiana per σ della forma $f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$.

Vediamo i calcoli standard con la parametrizzazione $\sigma(s,\vartheta) = \begin{pmatrix} x(s)\cos\vartheta \\ x(s)\sin\vartheta \\ z(s) \end{pmatrix}$:

$$\sigma_s = \begin{pmatrix} x_s \cos\vartheta \\ x_s \sin\vartheta \\ z_s \end{pmatrix}, \quad \sigma_\vartheta = \begin{pmatrix} -x\sin\vartheta \\ x\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dunque} \quad G_I = \begin{pmatrix} x_s^2+z_s^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

se $\|\gamma'\| = x_s^2+z_s^2 = 1$.

da notare che meridiani e paralleli sono ortogonali,

$$n = \frac{\sigma_s \times \sigma_\vartheta}{\|\sigma_s\times\sigma_\vartheta\|} = \frac{1}{\sqrt{x_s^2+z_s^2}}\begin{pmatrix} -z_s\cos\vartheta \\ -z_s\sin\vartheta \\ x_s \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ss} = \begin{pmatrix} x_{ss}\cos\vartheta \\ x_{ss}\sin\vartheta \\ z_{ss} \end{pmatrix}, \quad \sigma_{s\vartheta} = \begin{pmatrix} -x_s\sin\vartheta \\ x_s\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \begin{pmatrix} -x\cos\vartheta \\ -x\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi
$$G_{II} = \frac{1}{\sqrt{x_s^2+z_s^2}}\begin{pmatrix} -z_s x_{ss} + x_s z_{ss} & 0 \\ 0 & x z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_\gamma & 0 \\ 0 & x z_s \end{pmatrix}$$

se $\|\gamma'\| = 1$.

$$L = G_I^{-1} G_{II} = \begin{pmatrix} -k_\gamma & 0 \\ 0 & z_s/x \end{pmatrix}$$

$K = -\dfrac{k_\gamma z_s}{x}$ (se $z_s > 0$, allora i punti sono ellittici/iperbolici asc k_γ sia negativo/positivo)

Siccome L è diagonale, le linee coordinate sono le linee di curvatura.

Dove esistono e come trovare le linee asintotiche?

devono essere curve $\sigma(s(u), \vartheta(u))$ tali che γ' sia isotropo per II,

quindi $-k_\gamma s'^2 + x z_s \vartheta'^2 = 0$, equazione differenziale (qui $s' = \frac{\partial s}{\partial u}$, $\vartheta' = \frac{\partial \vartheta}{\partial u}$,

per non fare confusione con questi abbiamo scritto $x_s = \frac{d}{ds}x(s)$ invece di x'....).

Studiamo le geodetiche: si tratta di un caso di CLAIRAUT perché G_I dipende da s e non da ϑ (nota: chiaramente le rotazioni sono isometrie per queste superficie!)

da $G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x(s)^2 \end{pmatrix}$ otteniamo il sistema $\begin{cases} (s')' = \frac{1}{2}(2xx_s\vartheta'^2) = xx_s\vartheta'^2 \\ (x^2\vartheta')' = 0 \end{cases}$

e vediamo subito alcune soluzioni facili:

① $\vartheta' = 0$ dà $\vartheta = \vartheta_0$ costante e $s'' = 0$: questi sono i MERIDIANI (profili ruotati)

② $s' = 0$ impone $x_s = 0$, cioè tangente del profilo parallela all'asse, quindi sono i punti critici, minimi e massimi, del profilo con $\vartheta'' = 0$ dà i PARALLELI di MINIMO e MASSIMO del profilo. (gli altri paralleli quindi NON sono geodetiche!).

in generale poi:

③ $x^2\vartheta' = c$ costante lungo la geodetica cercata, quindi $\vartheta' = c/x^2$ e vediamo che ϑ' ha sempre lo stesso segno, quindi la geodetica ruota sempre nello stesso VERSO attraverso la superficie

Sostituendo nella unitarietà $s'^2 + x^2\vartheta'^2 = 1$ si trova $s'^2 + c^2/x^2 = 1$

da cui $s' = \frac{\sqrt{x^2-c^2}}{x}$ e $\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\vartheta'}{s'} = \frac{c}{x\sqrt{x^2-c^2}}$

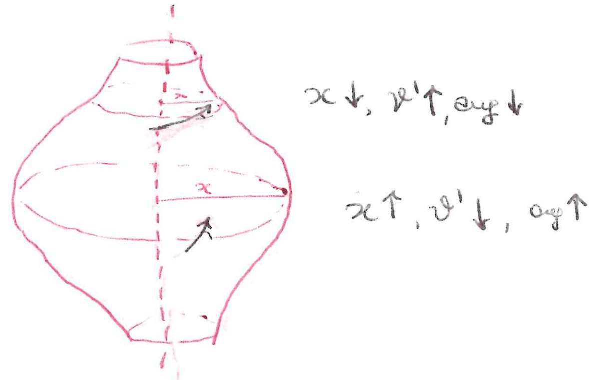
e dovremmo integrare $d\vartheta = \frac{c\,ds}{x(s)\sqrt{x(s)^2-c^2}}$, che di solito è piuttosto difficile.

Passiamo allo studio qualitativo:

abbiamo $\frac{c^2}{x^2} \le 1$, cioè $x^2 \ge c^2$ (quindi la geodetica non può avvicinarsi troppo all'asse)

e cos angolo geod. parall $= \dfrac{(s' \ \vartheta')\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & x^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}{|x|} = \dfrac{x^2\vartheta'}{x} = \dfrac{c}{x}$, quindi:

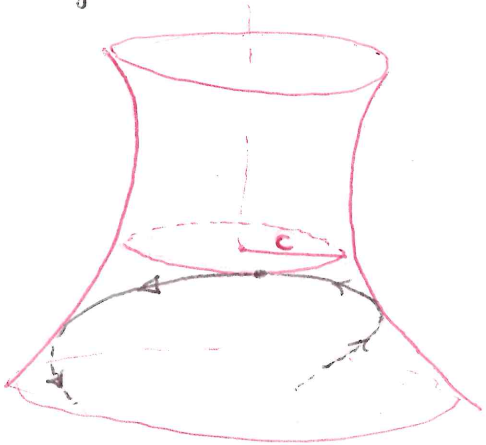
<u>cioè</u>: se x aumenta (allontanamento dall'asse),
allora ϑ' diminuisce (si ruota più lentamente)
e l'angolo geod. par. aumenta:



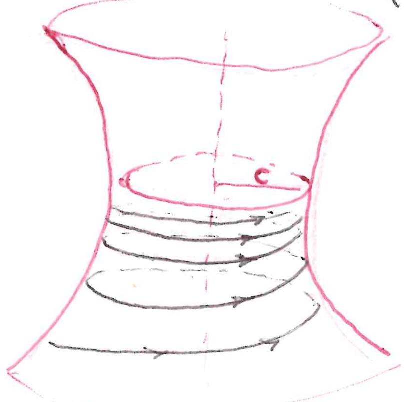
Cosa succede quando ci si avvicina al limite $x^2 \ge c^2$?

Vi sono due casi possibili:

- se $x = c$ non è minimo del profilo allora quel parallelo non è geodetica, e la nostra geodetica rimbalza dopo aver toccato il parallelo con angolo 0, tangente:



- se $x = c$ è minimo del profilo, allora è geodetica, e la nostra geodetica <u>NON</u> può raggiungerla (altrimenti sarebbe tangente, e ci sarebbero 2 geodetiche per quel punto con stesse tangente) quindi tende asintoticamente a quel parallelo:

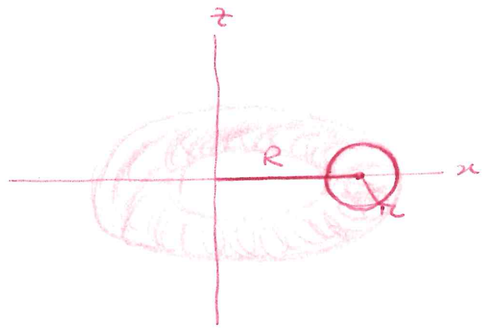


aumenta ϑ' e <u>non</u> ritorna indietro!

Studiamo in particolare i TORI:

rotazione attorno all'asse z del profilo $z^2+(x-R)^2=r^2$

quindi di equazione $z^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2=r^2$



L'equazione parametrica del profilo è $\begin{pmatrix} R+r\cos\varphi \\ 0 \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

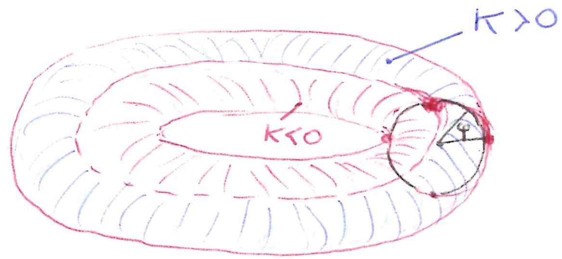
e quindi una parametrizzazione del toro immerso è $\sigma(\vartheta,\varphi)=\begin{pmatrix} (R+r\cos\varphi)\cos\vartheta \\ (R+r\cos\varphi)\sin\vartheta \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$.

Si calcola velocemente (!):

$$G_I=\begin{pmatrix} (R+r\cos\varphi)^2 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

$$G_{II}=\begin{pmatrix} -(R+r\cos\varphi)\cos\varphi & 0 \\ 0 & -r \end{pmatrix}$$

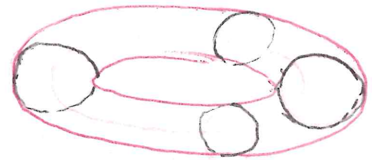
$$L=G_I^{-1}G_{II}=\begin{pmatrix} -\dfrac{\cos\varphi}{(R+r\cos\varphi)} & 0 \\ 0 & -1/r \end{pmatrix}$$



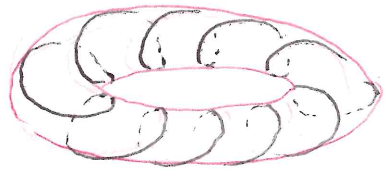
$$K=\frac{\cos\varphi}{r(R+r\cos\varphi)}$$ che è ≥ 0 sse $\cos\varphi\geq 0$, ≤ 0 sse $\cos\varphi\leq 0$

Lasciamo per esercizio scrivere esplicitamente le equazioni delle geodetiche e la loro riduzione a una equazione del prim'ordine.
Usiamo invece la limitazione: $R + r\cos\varphi \geq c$ per vedere i diversi tipi:

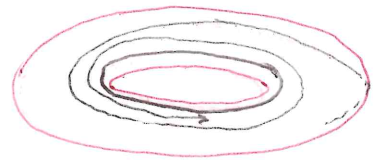
(1) se $c = 0$ otteniamo $\vartheta' = 0$, $\vartheta = \vartheta_0$ costante: MERIDIANI



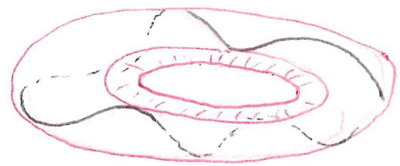
(2) se $0 < |c| < R - r$ non ci sono limitazioni effettive, le geodetiche girano sul toro intersecando gli equatori



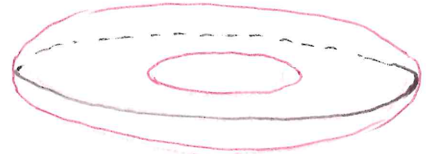
(3) se $c = R - r$ hanno limite sull'equatore interno che è una geodetica: gli sono asintotiche



(4) se $R - r < |c| < R + r$ la limitazione è effettiva: non possono avvicinarsi all'equatore interno, rimbalzando sul parallelo limite



(5) se $c = R + r$ è l'equatore esterno.



Prima di abbandonare il toro, conviene fare questa osservazione: se definiamo il toro come $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$, siccome $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ otteniamo $\mathbb{T} = S^1 \times S^1 \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$ e viene rappresentato da una carta del tipo:

$$(\vartheta, \varphi) \longmapsto \sigma(\vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$$

con vettori tangenti $\sigma_\vartheta = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\sigma_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ e prima forma fond. $G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

e quindi $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^4$ è una superficie piatta, localmente isometrica al piano (parametrizzando un quadrato, si può vedere come quoziente algebrico $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, quoziente come gruppi additivi).

In questa immersione in $\mathbb{R}^4$ "meridiani" e "paralleli" hanno tutti la stessa lunghezza

Invece quando si immerge il toro in $\mathbb{R}^3$ lo si deforma, e i paralleli non hanno tutti la stessa lunghezza, e la curvatura non è più nulla

Gli ELICOIDI sono le superfici descritte dalle ELICHE dei punti di una fissata curva $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ (ruotando attorno ad un asse e alzandosi con la rotazione).

Supponiamo γ piana e unitaria, l'asse nel piano, e sia p il passo delle eliche:

da $\gamma = \begin{pmatrix} x(s) \\ 0 \\ z(s) \end{pmatrix}$, asse $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e passo p abbiamo $\sigma(s,\vartheta) = \begin{pmatrix} x(s)\cos\vartheta \\ x(s)\sin\vartheta \\ z(s)+p\vartheta \end{pmatrix}$

e come casi particolari abbiamo $\begin{cases} \text{per } p=0 : \text{ sup ROTAZ.} \\ \text{per } p\neq 0,\ z_s=0 \ (z \text{ COSTANTE}) : \text{ ELICOIDE SEMPLICE (o DELLA RETTA)} \end{cases}$

Vediamo i calcoli standard:

$\sigma_s = \begin{pmatrix} x_s\cos\vartheta \\ x_s\sin\vartheta \\ z_s \end{pmatrix}$, $\sigma_\vartheta = \begin{pmatrix} -x\sin\vartheta \\ x\cos\vartheta \\ p \end{pmatrix}$ quindi $G_I = \begin{pmatrix} x_s^2+z_s^2 & pz_s \\ & x^2+p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & pz_s \\ & x^2+p^2 \end{pmatrix}$ diagonale se $\begin{cases} p=0 \\ z_s=0 \end{cases}$

$n = \frac{1}{\sqrt{x^2+p^2x_s^2}} \begin{pmatrix} px_s\sin\vartheta - xz_s\cos\vartheta \\ -px_s\cos\vartheta - xz_s\sin\vartheta \\ xx_s \end{pmatrix}$, $\sigma_{ss} = \begin{pmatrix} x_{ss}\cos\vartheta \\ x_{ss}\sin\vartheta \\ z_{ss} \end{pmatrix}$, $\sigma_{s\vartheta} = \begin{pmatrix} -x_s\sin\vartheta \\ x_s\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_{\vartheta\vartheta} = \begin{pmatrix} -x\cos\vartheta \\ -x\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$G_{II} = \frac{1}{\sqrt{x^2+p^2x_s^2}} \begin{pmatrix} -x(x_{ss}z_s - x_sz_{ss}) & -px_s^2 \\ & x^2z_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x\kappa_\gamma & -px_s^2 \\ & x^2z_s \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{x^2+p^2x_s^2}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} -\kappa_\gamma & 0 \\ 0 & xz_s \end{pmatrix} & \text{per } p=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+p^2}} \begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p & 0 \end{pmatrix} & \text{per } z_s=0 \\ & (\Rightarrow x_s=1) \end{cases}$$

$L = G_I^{-1} G_{II}$ (da calcolare, e vedere nei due casi particolari)

$$K = \frac{|G_{II}|}{|G_I|} = \frac{-x^3z_s\kappa_\gamma - p^2x_s^4}{(x^2+p^2x_s^2)^2} = \begin{cases} -\kappa_\gamma z_s/x & \text{per } p=0 \\ -\frac{p^2}{(x^2+p^2)^2} & \text{per } z_s=0 \ (\Rightarrow x_s=1,\ \kappa_\gamma=0) \\ & \text{(in questo caso è sempre } <0). \end{cases}$$

L'elicoide delle rette è un caso particolarmente semplice: abbiamo $z_s = 0$

$$G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2+p^2 \end{pmatrix}, \quad G_{II} = \frac{1}{\sqrt{x^2+p^2}} \begin{pmatrix} 0 & -p \\ -p & 0 \end{pmatrix}$$

quindi le linee coordinate sono le linee asintotiche!

$$L = G_I^{-1} G_{II} = \frac{1}{\sqrt{x^2+p^2}^{\,3}} \begin{pmatrix} 0 & -p(x^2+p^2) \\ -p & 0 \end{pmatrix}$$

quindi le linee di curvatura soddisfano a $\begin{vmatrix} x' & -p\vartheta' \\ (x^2+p^2)\vartheta' & -px' \end{vmatrix} = 0$

cioè $\vartheta' = \pm \dfrac{x'}{\sqrt{x^2+p^2}}$.

$$K = -\frac{p^2}{(x^2+p^2)^2} \quad \text{sempre} < 0$$

Per cercare le geodetiche si nota che è un caso di Clairaut ($x = x(s)$ funzione di s)

$$\begin{cases} (s')' = \frac{1}{2}(2 x x_s \vartheta'^2) \\ ((x^2+p^2)\vartheta')' = 0 \end{cases}$$

e l'unitarietà si scrive $s'^2 + (x^2+p^2)\vartheta'^2 = 1$.

Da $(x^2+p^2)\vartheta' = c$ COSTANTE troviamo la limitazione $\dfrac{c^2}{x^2+p^2} \leq 1$

cioè $x^2 \geq c^2 - p^2$

ie che oltre che la traiettoria della geodetica non può avere x troppo piccolo: deve stare fuori da un cilindro attorno all'asse.

Diciamo <u>SUPERFICIE RIGATE</u> le superficie che sono unioni di segmenti (rettilinei): sono le superficie occupate da bracci meccanici (rigidi) in movimento.

Per dare una sup. rigata basta dare:

una curva $\gamma \subseteq \mathbb{R}^3$ dei punti di appoggio

una curva $\delta \subseteq \mathbb{R}^3$ dei vettori direttori delle rette

e allora abbiamo una parametrizzazione $\sigma(s,u) = \gamma(s) + u\,\delta(s)$.

Risulta $\sigma_s = \gamma' + u\delta'$, $\sigma_u = \delta$

quindi è regolare (σ_s, σ_u lin. indip.) per esempio se γ' e δ sono lin. indip. e <u>u piccolo</u>,

oppure se γ' e δ sono lin. indip. e $\delta \perp \delta'$.

Possiamo inoltre supporre che δ sia una curva sferica (anche unitaria sulla sfera unitaria).

Invece normalizzare la curva γ è più difficile.

Provate a sviluppare i calcoli usuali!

(Contro)esempi di isometrie: consideriamo le seguenti tre superfici:

Ⓔ Elicoide della retta

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u \sin v \\ v \end{pmatrix}$$

$$G_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

$$G_{II} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K = -\frac{1}{(1+u^2)^2}$$

Ⓛ Superficie rotaz logaritmo:

$$\sigma(u,v) = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u \sin v \\ \lg u \end{pmatrix}$$

$$G_I = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{u^2} & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$$

$$G_{II} = \begin{pmatrix} -1/u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$K = -\frac{1}{(1+u^2)^2}$$

Ⓒ CATENOIDE = sup. rotaz catenaria

$$\sigma(z,\theta) = \begin{pmatrix} ch(z)\cos\theta \\ ch(z)\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

$$G_I = ch^2(z) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_{II} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$K = -\frac{1}{ch^4(z)}$$

Vediamo che Ⓔ ed Ⓛ hanno le stesse curvature, ma non sono isometrici:

se esistesse una isometria $(u,v) \mapsto (\bar u(u,v), \bar v(u,v))$ dovrebbe essere $\bar u = \pm u$ (da valore K),

e per rispettare le pff: $\frac{1+\bar u^2}{\bar u^2} d\bar u^2 + \bar u^2 d\bar v^2 = \frac{1+u^2}{u^2} du^2 + u^2(\bar v_u du + \bar v_v dv)^2$

e si vede che c'è il termine in $du\,dv$, che non compare nella pff di Ⓔ.

Vediamo che Ⓔ e Ⓒ sono isometrici: usiamo la pff di Ⓒ

$$ch^2(z)\, dz^2 + ch^2(z)\, d\theta^2 = d(sh\, z)^2 + (1+sh^2(z))\, d\theta^2 = du^2 + (u^2+1)\, dv^2 \quad \text{ponendo } \begin{cases} u = sh(z) \\ v = \theta \end{cases}$$

cioè $\begin{cases} z = \mathrm{sett\,sh}(u) \\ \theta = v \end{cases}$.

Controlliamo le curvature: $K = -\frac{1}{(1+u^2)^2}$ diventa $-\frac{1}{(1+sh^2(z))^2} = -\frac{1}{ch^4(z)}$.