TOPOLOGIA : converge a definizioni condivise e chiare con un articolo :

1914 F. HAUSDORFF che introduce gli assiomi usati ancora oggi, con le differenze che :

- ora distinguiamo bene tra APERTI E INTORNI,
- non imponiamo più la condizioni detta oggi T2 o Hausdorff.

nel '900 la topologia ha uno SVILUPPO IMPRESSIONANTE, esplosivo, con il risultato di generare notazioni e definizioni incompatibili, su molti punti non c'è notazione/terminologia universalmente accettata.

quindi, attenzione: su ogni libro di topologia vanno controllate le definizioni (per es. T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, T_4 e reg./compl. reg./normale possono scambiarsi!)

La topologia nasce in ambito geometrico (assiomatica scelta per generalizzare gli spazi metrici) e analitico (spec. studio degli spazi di funzioni) ma poi si è affermata come strumento di uso universale in algebra (gruppi topologici ...) logica (valori di verità possono essere assiomatizzati come aperti di sp. topologici), fisica, probabilità ....

Per questo si considera da sin. una competenza di base per matematici.

Il nostro programma riguarda le basi della TOPOLOGIA GENERALE:

(1) tre metodi principali (equivalenti) per definire topol.:

- APERTI / CHIUSI (basi e prebasi)
- OPERATORI DI KURATOWSKY (interno e chiusura)
- FILTRI di intorni dei punti (e nozione di LIMITI)

e come si passa dall'uno all'altro

(2) nozione di funzione CONTINUA e

Topologie definite da condizioni di continuità

(3) Proprietà di numerabilità (S, C_1, C_2)

e separazione (T_0, T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, T_4)

(4) Proprietà di connessione e conn. per archi

e loro versioni locali.

(5) Proprietà di COMPATTEZZA e loc. compattezza

(compattificazioni? legami con separazione!)

(6) Non parleremo di completezza, che si applica

solo a certi tipi di spazi topol. (i complet. reg.)

Finiremo dando la classificazione TOPOLOGICA delle

SUPERFICIE REALI COMPATTE (usando la caratt. di Eulero-Poincaré

o equivalentemente il GENERE topologico).

Contemporaneamente, per dare senso

alle definizioni e sviluppare queste nuove

intuizioni si devono vedere molti esempi:

(1) topol. banali / discrete
cofinite / conumerabili
includenti / escludenti
definite da pseudometriche
o FAMIGLIE di pseudometriche

(2) topol su sottospazi / quozienti
prodotti / unioni

studio della proprietà della topol. PRODOTTO

e loro proprietà (prodotti finiti, numerabili)

arbitrari, di spazi discreti ecc.).

(*) per tutte le proprietà importanti

dovremo avere precisi ESEMPI e

soprattutto CONTROESEMPI per distinguerle!

C'è un libro di SOLO CONTROESEMPI in

TOPOLOGIA!

Es. topol. di Sorgenfrey su $\mathbb{R}$,

topologie ordinate su $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$,

topologie d'ordine.

Vediamo la prima definizione possibile per la TOPOLOGIE, la più semplice:

Dato un insieme X, una TOPOLOGIA su X è $\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ <u>sottoinsieme di parti di X</u> che sia:

<u>CHIUSO PER UNIONI ARBITRARIE</u>

$$(U_\alpha \in \mathcal{T}_X \ \forall \alpha \in A \Rightarrow \bigcup_\alpha U_\alpha \in \mathcal{T}_X)$$

<u>CHIUSO PER INTERSEZIONI FINITE</u>

$$(U_i \in \mathcal{T}_X \ \forall i \in F \text{ ins. finito} \Rightarrow \bigcap_{i\in F} U_i \in \mathcal{T}_X).$$

Gli elementi di $\mathcal{T}_X$ si chiamano gli <u>APERTI di X per la topologia $\mathcal{T}_X$</u>.

<u>Nota</u>: la prima condizione con $A=\emptyset$ implica che $\emptyset \in \mathcal{T}_X$ ($\emptyset = \bigcup_\emptyset$ el. neutro unione)

e la seconda condizione con $F=\emptyset$ implica che $X \in \mathcal{T}_X$ ($X = \bigcap_\emptyset$ el. neutro intersezione).

Spesso queste due condizioni si dicono esplicitamente, anche se derivano dalle altre!

I complementari insiemistici degli aperti si dicono <u>CHIUSI della topol $\mathcal{T}_X$</u>, e dare la topologia $\mathcal{T}_X$ è equivalente a dare una famiglia $\mathcal{C}_X \subseteq \mathcal{P}(X)$

CHIUSA PER UNIONI FINITE

CHIUSA PER INTERSEZIONI ARBITRARIE

(quindi in particolare contiene $\emptyset$ e X).

Se $U \subseteq X$ usiamo $U^c = \complement U = X \setminus U$ per indicare il complementare insiemistico, e allora

$$\mathcal{C}_X = \{ U^c : U \in \mathcal{T}_X \}$$

$$\mathcal{T}_X = \{ C^c : C \in \mathcal{C}_X \}$$

e si verificano subito le corrispondenze usando De Morgan insiemistico:

$$\left(\bigcup_\alpha X_\alpha\right)^c = \bigcap_\alpha X_\alpha^c \quad \text{e} \quad \left(\bigcap_\alpha X_\alpha\right)^c = \bigcup_\alpha X_\alpha^c .$$

Notare l'eleganza e la semplicità della definizione: che questo codifichi importanti informazioni geometriche è l'intuizione fondamentale

Piccolo problema: mostrare che le due condizioni seguenti sono equivalenti:

- $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è chiuso per intersezioni finite cioè $X_i \in \mathcal{P}$ $\forall i \in F$ con F finito
- $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ contiene X ed è chiuso per intersezione binaria, cioè $A, B \in \mathcal{P}$ allora $A \cap B \in \mathcal{P}$.

(in un senso, usare $F = \emptyset$ e $F = \{1,2\}$; nell'altro usare induzione).

Nota bene: il fatto che una topologia sia chiusa per intersezioni FINITE non implica che sia chiusa per intersezioni infinite, nemmeno numerabili. Forse qualche esempio: in uno spazio metrico i DISCHI APERTI CENTRATI in un punto sono chiusi per intersezione finita (e c'è il disco di raggio più piccolo) ma di solito non infinite se si chiede che i raggi siano positivi (non nulli).

Dato un insieme X, vi sono tante possibili topologie su X,
e l'insieme di tutte le topologie su X è <u>ORDINATO PER INCLUSIONE</u>:

diciamo $\tau \leq \tau'$ $\left\{ \begin{array}{l} \tau' \text{ è più fine di } \tau \\ \tau \text{ è più grossolana di } \tau' \end{array} \right\}$ se $\tau \subseteq \tau'$ come sottinsiemi di $\mathcal{P}(X)$.

Vediamo subito che in questo ordine per le topologie vi sono massimo e minimo:

- topologia <u>MINIMA o BANALE o INDISCRETA</u> : $\{\emptyset, X\}$ unici aperti (e chiusi) sono $\emptyset, X$
- topologia <u>MASSIMA o CAOTICA o DISCRETA</u> : $\mathcal{P}(X)$ ogni insieme è aperto (e chiuso)

(queste due topologie coincidono sse X è $\emptyset$ oppure $\{x\}$ con un solo elemento!).

Vediamo subito anche che l'insieme delle topologie è stabile per intersezione arbitraria ($\tau_\alpha \subseteq \mathcal{P}(X)$ sono topologie $\forall \alpha \in A$, allora $\bigcap_{\alpha\in A} \tau_\alpha$ è topologia su X), quindi l'ordine tra topologie ha inf arbitrario.

Di conseguenza, per ogni $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ esiste <u>una minima topologia contenente $\mathcal{P}$</u>, si dice TOPOLOGIA GENERATA da $\mathcal{P}$ ed è l'INTERSEZIONE DI TUTTE LE TOPOLOGIE che CONTENGONO $\mathcal{P}$ (c'è almeno tutto $\mathcal{P}(X)$, quindi ne esistono!).
In particolare, l'ordine tra topologie ha anche il sup arbitrario: la topologia generata dall'unione delle topologie date (nota: unione di due topologie di solito <u>non</u> è topologia!).

ESEMPI: TOPOLOGIE COFINITE e CONUMERABILI.

Sia X un insieme, e $\mathcal{T} = \{ Y : Y = \emptyset$ OPPURE $X \setminus Y$ è FINITO $\}$

si vede subito che è una topologia, detta topologia dei COFINITI (= complementari finiti)

e che i chiusi di questa topologia sono X e tutti gli insiemi finiti ($\subseteq X$).

Abbiamo che $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$, cioè è la top. discreta, sse X è finito (insiemisticamente).

Per esempio, la topologia cofinita su $\mathbb{R}$ è (molto) più grossolana della topologia metrica usuale su $\mathbb{R}$.

La topologia cofinita su X è la più piccola topologia su X tale che ogni $x \in X$ si ha $\{x\}$ è chiuso, cioè $X \setminus \{x\}$ è aperto.

Sempre X insieme, definiamo $\mathcal{T} = \{ Y : Y = \emptyset$ OPPURE $X \setminus Y$ è al più numerabile $\}$

anche qui si vede subito che è topologia, detta dei conumerabili,

ed è la più piccola tale che ogni sottinsieme numerabile sia chiuso.

La topol. conumerabile è discreta ($= \mathcal{P}(X)$) sse X stesso è numerabile (o finito).

Per esempio la topologia conumerabile su $\mathbb{R}$ è più fine di quella cofinita, e non è comparabile con quella metrica usuale (per esempio: $\mathbb{Q}$ è chiuso per la top. conumerabile, ma non per quella metrica, mentre $[0,1]$ è chiuso per la topologia metrica e non per la conumerabile)

ESEMPI: TOPOLOGIE INCLUDENTI ed ESCLUDENTI.

Sia X un insieme e $A \subseteq X$; definiamo:

LA TOPOLOGIA includente rispetto ad A:

$$\mathcal{I}_A = \{ Y \in \mathcal{P}(X) : Y = \emptyset \text{ OPPURE } Y \supseteq A \}$$

LA TOPOLOGIA escludente rispetto ad A

$$\mathcal{E}_A = \{ Y \in \mathcal{P}(X) : Y = X \text{ OPPURE } Y \cap A = \emptyset \}$$

Si vede subito che sono entrambe topologie su X, e anzi sono entrambe chiuse sia per unioni arbitrarie che per intersezioni arbitrarie, quindi possono anche essere usate come CHIUSI (invece che APERTI) per una topologia!

Vengono spontanee alcune osservazioni:

$\mathcal{I}_\emptyset = \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{I}_X = \{\emptyset, X\}$

$\mathcal{I}_{A \cap B} = \mathcal{I}_A \cap \mathcal{I}_B$

i chiusi di $\mathcal{I}_A$ sono gli elementi di $\mathcal{E}_A$

che relazioni ci sono tra $\mathcal{I}_A$ e $\mathcal{I}_B$?

$\mathcal{E}_\emptyset = \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{E}_X = \{\emptyset, X\}$

$\mathcal{E}_A \cap \mathcal{E}_B = \mathcal{E}_{A \cup B}$

i chiusi di $\mathcal{E}_A$ sono gli elementi di $\mathcal{I}_A$.

che relazioni ci sono tra $\mathcal{E}_A$ e $\mathcal{E}_B$?

Qual è la topologia intersezione $\mathcal{I}_A \cap \mathcal{E}_A$?

Qual è la più piccola topologia contenente sia $\mathcal{I}_A$ sia $\mathcal{E}_A$?

Spesso è difficile dire esplicitamente chi sono TUTTI gli aperti (o i densi)
di una topologia, e d'altra parte <u>per definire univocamente</u> una topologia non serve elencare tutti gli elementi: vediamo cosa sono <u>BASI</u> e <u>PREBASI</u>.

se $\mathcal{T}_X$ è topologia su X, diciamo che <u>$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}_X$ è BASE per $\mathcal{T}_X$</u> se
ogni $U \in \mathcal{T}_X$ è unione (arbitraria) di elementi di $\mathcal{B}$.

per esempio l'unione dei singoletti è una base per la topologia discreta $\mathcal{P}(X)$.
per esempio gli aperti $A \cup \{x\}$ con $x \in X$ è una base per la topol. $\mathcal{T}_A$ includente di A.

<u>Piccolo esercizio Teorico:</u>

dato $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ consideriamo $\mathcal{T} :=$ topologia generata da $\mathcal{B}$ (minima top che $\supseteq \mathcal{B}$)
allora $\mathcal{B}$ è una base per $\mathcal{T}$ <u>sse</u> le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{B}$ si scrivono come unioni di elementi di $\mathcal{B}$.

Un verso è chiaro: le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{B}$ devono essere aperti di $\mathcal{T}$, e se $\mathcal{B}$ è base devono essere unione opportuna di elementi di $\mathcal{B}$.
Per capire l'altro verso, bisogna capire che la topologia $\mathcal{T}$ si può ottenere facendo "unioni arbitrarie di intersezioni finite di elementi di $\mathcal{B}$".

se τ_X è topologia su X, diciamo che $\underline{\mathcal{P} \subseteq \tau_X \text{ è PREBASE per } \tau_X}$ se

l'insieme delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{P}$ è BASE per τ_X.

per esempio l'insieme degli $X \setminus \{x\}$ per $x \in X$ è prebase per la topol. cofinita su X.

Il piccolo esercizio teorico precedente diventa qui:

ogni $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è prebase per la topologia generata da $\mathcal{P}$.

AVVERTENZE:

- basi e prebasi per topologie non sono assolutamente uniche o in nessun modo canoniche: diverse basi e prebasi possono generare la stessa topologia
- basi e prebasi sono comunque formate da APERTI, cioè sono un sottinsieme della topologia descritta, e l'interesse è descrivere tutta la topologia a partire da genti descrivibili in modo semplice.

ESEMPI: SPAZI PSEUDOMETRICI.

se X è insieme, una <u>pseudometrica</u> su X è funzione $d: X\times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tale che

(1) $d(x,x)=0 \quad \forall x\in X$

(2) $d(x,y)=d(y,x) \quad \forall x,y\in X$

(3) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y) \quad \forall x,y,z\in X$

e si dice una <u>METRICA</u> se vale

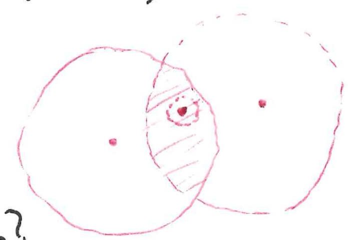
(I) $d(x,y)=0$ sse $x=y$.

Se (X,d) è un insieme dotato di pseudometrica definiamo la TOPOLOGIA associata alla pseudometrica:

è la topologia τ_d <u>GENERATA dai dischi aperti</u> $D(x,\varepsilon)=\{y : d(x,y)<\varepsilon\}$

al variare di $x\in X$, $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$.

Un facile ragionamento fatto nel corso di Analisi dice che l'insieme dei dischi aperti è <u>una BASE</u> per la topologia generata: l'intersezione di due dischi aperti <u>non</u> è un disco aperto, ma è unione di dischi aperti.



Notare anche che non servono tutti gli $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$, basta "andare nel piccolo" per es. $\varepsilon\in\mathbb{Q}_{>0}$ o $\varepsilon\in\{\frac{1}{n} \mid n\in\mathbb{Z}_{>0}\}$.

Si possono ridurre anche i centri $x\in X$?

Per esempio, nel caso $X=\mathbb{R}$ con metrica euclidea usuale, troviamo la topologia metrica usuale con base $D(x,\varepsilon)$ con $x\in\mathbb{Q}$, $\varepsilon\in\frac{1}{\mathbb{Z}_{>0}}$.

Esempi:

la pseudometrica banale $d(x,y)=0$ $\forall x,y \in X$ non è una metrica,

e la topologia associata è la topologia banale $\{\emptyset, X\}$ perché l'unico disco è X.

la (pseudo) metrica discreta $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x=y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$ è una metrica,

e la topologia associata è la topologia discreta $P(X)$ perché ogni $x \in X$

è un aperto: $\{x\} = D(x, \frac{1}{2})$.

Le topologie definite da una pseudometrica si dicono PSEUDOMETRIZZABILI.

Nota: diverse pseudometriche possono definire la stessa topologia,

e allora si dicono topologicamente equivalenti.

per esempio: ogni p/metrica su X è topologicamente equivalente ad una

p/metrica limitata da 1 (cioè tale che la massima distanza

tra due punti è 1).

se d è p/metrica allora $\max\{1, d\}$ è p/metrica che dà la stessa topologia

(i dischi di raggio ≤ 1 sono esattamente gli stessi!)

più difficile: se d è p/metrica, allora $\frac{d}{1+d}$ è p/metrica (come

dimostrare la proprietà triangolare?) che dà la stessa topologia

Facciamo un altro esempio per far capire che le palle aperte possono avere proprietà strane:
Usiamo $X = \mathbb{Q}$ (numeri razionali) e distanza data dalla metrica p-adica (p numero primo):

$$d_p(x,y) = p^{-n} \quad \text{se } x-y = p^n \frac{a}{b} \text{ con } a, b \text{ coprimi con } p.$$

Si verifica che è metrica in cui vale (3) $d(x,y) \le \max\{d(x,z), d(z,y)\}$ $\forall x,y,z \in \mathbb{Q}$.

QUESTE METRICHE SI DICONO SPESSO ULTRAMETRICHE!

Infatti:
$x - z = p^{n_1} \frac{a}{b}$
$z - y = p^{n_2} \frac{c}{d}$
$\Rightarrow$
$x - y = (x-z) + (z-y) =$
$= p^{n_1} \frac{a}{b} + p^{n_2} \frac{c}{d} =$ supponiamo $n_1 \le n_2$
$= p^{n_1}\left(\frac{a}{b} + p^{\ge 0} \frac{c}{d} \right)$

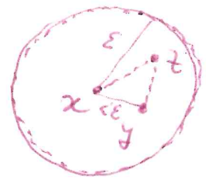
Allora $D(0, p^{-n}) = \{ \frac{r}{s} \mid p^n | r, \ p \nmid s \}$ cioè "divisibili per p^n"
è un disco aperto (dunque un aperto),
ma è anche un CHIUSO DELLA TOPOLOGIA
perché il complementare è UNIONE DI DISCHI
dello stesso raggio!

Però la topologia NON è discreta, per
esempio i punti $x \in \mathbb{Q}$ sono chiusi ma
non sono aperti.

Quindi abbiamo una BASE di aperti che
sono anche chiusi, ma non è vero
che tutti gli aperti siano chiusi della
topologia.

Osservazione: per questa metrica
due dischi dello stesso raggio sono
uguali o disgiunti:

$y \in D(x,\varepsilon) \Rightarrow D(y,\varepsilon) = D(x,\varepsilon)$



In generale: due dischi
sono disgiunti o uno contenuto nell'altro;
ogni punto di un disco è anche
centro del disco!

ESEMPIO: TOPOLOGIE DEFINITE DA FAMIGLIE DI PSEUDOMETRICHE.

Se X è insieme e d_α con $\alpha \in A$ è una famiglia di pseudometriche su X, diciamo topologia su X definita da questa famiglia di pseudometriche la topologia generata da $D_{d_\alpha}(x,\varepsilon) = \{y : d_\alpha(x,y) < \varepsilon\}$ al variare di $x \in X$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $\alpha \in A$ (cioè da tutti dischi aperti per tutte le metriche).

Nota bene: in generale l'insieme dei dischi è solo PREBASE per la topologia: l'intersezione di due dischi per metriche diverse non ha motivo di essere unione di dischi (per quali pseudometriche?)!

È abbastanza facile capire che se A è finito, cioè se abbiamo un numero finito di pseudometriche, allora ne basta una, cioè lo spazio è pseudometrizzabile, per esempio usando il max delle pseudometriche date.

Invece non è banale capire cosa succede quando abbiamo famiglie infinite di pseudometriche: studieremo in futuro questo problema.

Esempi: topologie d'ordine.

Se X è un insieme con relazione d'ordine $\leq$ (rifl., antisimm., transitiva), possiamo usare l'ordine per definire diverse topologie su X:

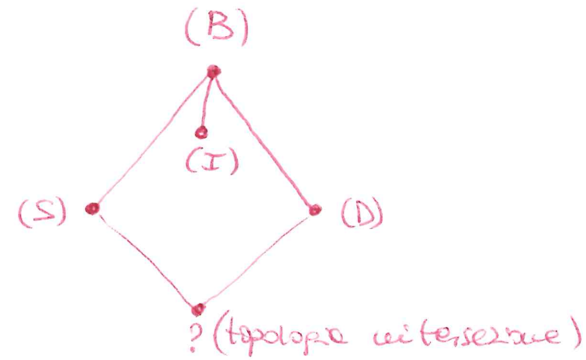
(D) la topologia generata dalle "semirette destre" $\{y \in X : y > x\}$ al variare di $x \in X$

(S) la topologia generata dalle "semirette sinistre" $\{y \in X : y < x\}$ al variare di $x \in X$

(B) la topologia generata da tutte le semirette, sia destre che sinistre, quindi in particolare contiene anche gli "intervalli" $(x_0, x_1) = \{y : x_0 < y < x_1\}$.

(I) la topologia generata dai soli intervalli (x_0, x_1) al variare di $x_0, x_1 \in X$.
(questa topologia può essere più piccola della precedente)

Ci sono casi in cui le topologie così definite sono banali o discrete?



Come piccoli esercizi si considerino:

- $\mathbb{R}$ con ordine usuale (viene (B) = (I) = top. metrica usuale)
- $\mathbb{R}^2$ con ordine lessicografico:

  $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$ sse $x_1 < x_2$ oppure $x_1 = x_2$ e $y_1 < y_2$.
- $[0,1]^2$ con ordine lessicografico.
- $\mathbb{R} \times [0,1]$ con ordine lessicografico.

Sia (X, τ) uno spazio topologico.

Vediamo come la topologia può descrivere <u>le relazione tra punti e sottoinsiemi di X</u>:

un punto $x \in X$ si dice:

<u>INTERNO</u> a $S \subseteq X$ se $\exists U \in \tau$ t.c. $x \in U \subseteq S$

<u>ADERENTE</u> a S o DI CHIUSURA per S se $x \in U \in \tau$ implica $U \cap S \neq \emptyset$

<u>DI ACCUMULAZIONE</u> per S se $x \in U \in \tau$ implica $(U \cap S) \setminus \{x\} \neq \emptyset$

<u>DI FRONTIERA</u> per S se $x \in U \in \tau$ implica $U \cap S \neq \emptyset$ e $(X \setminus S) \cap U \neq \emptyset$

sse è aderente sia a S sia a $X \setminus S$.

<u>ESTERNO</u> a S se è interno a $X \setminus S$

sse $\exists U \in \tau$ t.c. $x \in U$ e $U \cap S = \emptyset$.

Gli aperti $U \in \tau$ che contengono il punto x si dicono "intorni aperti del punto" x e l'idea geometrica è di usare gli intorni aperti del punto per descrivere le relazioni geometriche del punto con altri sottoinsiemi di X.

Per esempio: <u>se U è aperto</u> allora ogni $x \in U$ è interno a U, e i punti $y \in X \setminus U$ possono essere aderenti o esterni.

<u>se C è chiuso</u> allora i punti $x \in C$ sono sempre aderenti a C (e possono essere interni o di frontiera) e i punti $y \in X \setminus C$ sono esterni a C.

Con queste definizioni, ad ogni $S \subseteq X$ possiamo associare alcuni sottoinsiemi definiti tramite la topologia:

INTERNO DI S $= S^\circ := \{x \in X : x \text{ è interno a } S\}$
$=$ Unione degli aperti $\subseteq S$
$=$ massimo aperto $\subseteq S$

CHIUSURA DI S $= \overline{S} := \{x \in X : x \text{ è aderente a } S\}$
$=$ Intersezione dei chiusi $\supseteq S$
$=$ minimo chiuso $\supseteq S$

DERIVATO DI S $= S' := \{x \in X : x \text{ è accumulazione per } S\}$

BORDO DI S $= \partial S := \overline{S} \setminus S^\circ$
$= \{x \in X : x \text{ è di frontiera per } S\}$

queste uguaglianze, per quanto facili, vanno verificate tramite $\subseteq$ e $\supseteq$, per esempio:

x interno a $S \Rightarrow$
$\exists U \in \mathcal{T}_x : x \in U \subseteq S \Rightarrow$
$x \in$ aperto $\subseteq S \Rightarrow$
$x \in$ unione degli aperti $\subseteq S$,

e si vede che sono anche $\Leftarrow$.

Poi: l'unione di aperti è aperto, quindi $\bigcup$ aperti $\subseteq S$ = max aperto $\subseteq S$.

Qui nasce un esercizio praticamente infinito:
che relazioni ci sono tra queste operazioni tra loro e con quelle insiemistiche?
per esempio $^\circ$ e $^-$ sono legati da ^{c}: $S^\circ = (\overline{S^c})^c$ e $\overline{S} = ((S^c)^\circ)^c$.
Quanti insiemi diversi si possono ottenere a partire da $S \subseteq X$ e usando $^\circ, ^-, ^c$?
(problema di Kuratowski: sono al massimo 13).

Due osservazioni e alcune definizioni: $S \subseteq X$ spazio topologico:

S è aperto ($\in \mathcal{T}_X$) sse $S = S^\circ$

S è chiuso (di $\mathcal{T}_X$) sse $S = \overline{S}$

dimostrazione facile:

perché S° = massimo aperto $\subseteq S$

quindi:

S aperto $\Rightarrow$ S massimo aperto $\subseteq S \Rightarrow S = S^\circ$

Siccome S° aperto, $S = S^\circ \Rightarrow$ S aperto.

Le definizioni (sono universali):

S è PERFETTO se $S = S'$

S è DENSO se $\overline{S} = X$

S è POVERO se $S^\circ = \emptyset$

S è RARO se $\overline{S}^\circ = \emptyset$

Osservazione:

S è denso sse interseca ogni aperto non vuoto

($\emptyset \neq U \in \mathcal{T}_X \Rightarrow S \cap U \neq \emptyset$).

sse il complementare è povero.

Si chiamano operatori di Kuratowski sia $\circ$ che $-$,

vediamo le proprietà fondamentali (di Kuratowski):

$\circ : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ è

ORDINATO : $S \subseteq T \Rightarrow S^\circ \subseteq T^\circ$

$\leq$ IDENTITÀ : $S^\circ \subseteq S$

COMMUTA CON INTERS. FINITE : $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$, $X^\circ = X$

IDEMPOTENTE : $S^{\circ\circ} = S^\circ$.

$- : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ è

ORDINATO : $S \subseteq T \Rightarrow \overline{S} \subseteq \overline{T}$

$\geq$ IDENTITÀ : $\overline{S} \supseteq S$

COMMUTA CON UNIONI FINITE : $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$

IDEMPOTENTE : $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$.

è tutto facile, mostriamo per es. la commutazione:

$x \in S^\circ \cap T^\circ \Rightarrow \exists U, V \in \mathcal{T} : \begin{array}{l} x \in U \subseteq S \\ x \in V \subseteq T \end{array} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$ e $x \in U \cap V \subseteq S \cap T \Rightarrow x \in (S \cap T)^\circ$.

il viceversa è ovvio : $x \in (S \cap T)^\circ \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T} : x \in U \subseteq S \cap T \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T} : \begin{array}{l} x \in U \subseteq S \\ x \in U \subseteq T \end{array} \Rightarrow x \in \begin{array}{l} S^\circ \\ T^\circ \end{array}$.

(il resto per allenamento mentale!)

Nota : questi operatori determinano completamente la topologia che li hanno definiti, perché

S aperto sse $S = S^\circ$, S chiuso sse $\overline{S} = S$

(insiemi fissi degli operatori!)

<u>Viceversa</u>: dato un operatore $\circ$ (oppure $-$) con le proprietà di Kuratowski, allora esiste una unica topologia per cui quello dato è operatore di interno (oppure di chiusura) ed è dato da:

$$\tau_X = \{S : S = S^\circ\} \qquad \text{oppure} \qquad \mathcal{C}_X = \{S : S = \overline{S}\}.$$

Dobbiamo mostrare, usando le proprietà di Kuratowski, che τ_X è topologia, cioè contiene $\emptyset, X$, è chiuso per intersezioni finite e unioni arbitrarie:

abbiamo $\emptyset^\circ \subseteq \emptyset$, quindi $\emptyset = \emptyset^\circ$

$X^\circ = X$ per ipotesi

$S = S^\circ,\ T = T^\circ \Rightarrow S \cap T = S^\circ \cap T^\circ = (S \cap T)^\circ$

e resta da mostrare che $S_\alpha = S_\alpha^\circ\ \forall \alpha \in A \Rightarrow \cup S_\alpha = (\cup S_\alpha)^\circ$

una $\supseteq$ è vera perché $^\circ \leq id$,

poi $S_\alpha \subseteq \bigcup_\alpha S_\alpha$ per ogni α

$S_\alpha^\circ \subseteq (\cup_\alpha S_\alpha)^\circ$ per ordine (per ogni α)

$\cup S_\alpha^\circ \subseteq (\cup_\alpha S_\alpha)^\circ$

$\overset{\shortparallel}{\cup S_\alpha}$ quindi abbiamo $\subseteq$, quindi $=$.

<u>Nota</u>: abbiamo usato le prime tre proprietà di Kuratowski, MA NON L'IDEMPOTENZA!

Quindi anche operatori non idempotenti definiscono topologie.

A cosa serve la proprietà di idempotenza di Kuratowski?
(gli operatori provenienti da topologie hanno questa proprietà)

SERVE per mostrare che l'operatore stesso è COMPLETAMENTE DETERMINATO dai suoi sottoinsiemi fissi, e quindi dalla topologia che definisce:

$$S^\circ = \bigcup_{\substack{T\subseteq S\\ T=T^\circ}} T \qquad\qquad \overline{S} = \bigcap_{\substack{T\supseteq S\\ T=\overline{T}}} T$$

Mostriamo $\subseteq$: $T=T^\circ\subseteq S \Rightarrow T=T^\circ\subseteq S^\circ \Rightarrow \bigcup T=\bigcup T^\circ\subseteq S^\circ$

e $\supseteq$: usiamo $T=S^\circ$ perché $S^\circ\subseteq S$, $S^\circ=(S^\circ)^\circ$ per idempotenza! $\Rightarrow S^\circ\subseteq \bigcup T$ (perché è uno dei T).

Conclusione: otteniamo biiezioni tra:

{operatori di interno di Kurat.} $\leftrightarrows$ {topologie su X} $\rightleftarrows$ {operatori di chiusura di Kuratowski}

quindi possiamo definire una topologia dicendo chi sono gli operatori di interno o di chiusura (o uno solo di questi, ovviamente)

Cosa succede se abbiamo un operatore di Kuratowski, ma non nilpotente?
Lui definisce una topologia, ma l'operatore corrispondente a questa topologia non è quello di partenza:

per esempio: $X = \mathbb{Z}$ (numeri interi)

per $S \subseteq \mathbb{Z}$: $\overline{S} = \{x, x+1, x-1 \mid \forall x \in S\}$

è chiaramente operatore ordinato, $\geq$ identità, e commuta con le unioni finite,

ma non è nilpotente: $\overline{\{0\}} = \{-1, 0, 1\}$, $\overline{\{-1,0,1\}} = \{-2,-1,0,1,2\}$

la topologia definita da questo operatore ha come chiusi gli $S \subseteq \mathbb{Z}$: $S = \overline{S}$, e si vede che sono solo $\emptyset$ e $\mathbb{Z}$,

quindi la topologia è quella BANALE,

e l'operatore associato alla topologia banale è

$$\overline{S} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } S = \emptyset \\ \mathbb{Z} & \text{se } S \neq \emptyset \end{cases}$$

cioè otteniamo un operatore $\geq$ di quello di partenza!

Per finire, vediamo gli operatori di Kuratowski negli esempi facili:

topol. BANALE:
$$S^\circ = \begin{cases} \emptyset & \text{se } S \neq X \\ X & \text{se } S = X \end{cases} \qquad \overline{S} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } S = \emptyset \\ X & \text{se } S \neq \emptyset \end{cases}$$

topol. DISCRETA:
$$S^\circ = S \qquad \overline{S} = S$$
(funzioni identiche!)

topol. COFINITA (su insiemi infiniti):
$$S^\circ = \begin{cases} S & \text{se } S \text{ è cofinito } (S^c \text{ finito}) \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \overline{S} = \begin{cases} S & \text{se } S \text{ è finito} \\ X & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

topol. INCLUDENTE di A:
$$S^\circ = \begin{cases} S & \text{se } S \supseteq A \\ \emptyset & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \overline{S} = \begin{cases} S & \text{se } S \cap A = \emptyset \\ X & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

topol. ESCLUDENTE di A:
$$S^\circ = \begin{cases} X & \text{se } S = X \\ S \setminus A & \text{altrimenti.} \end{cases} \qquad \overline{S} = \begin{cases} \emptyset & \text{se } S = \emptyset \\ S \cup A & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osservazione: nelle topologie definite da (pseudo)metriche, la chiusura di un DISCO APERTO non è necessariamente il "DISCO CHIUSO" (cioè con $\leq$): pensare al caso p.adico in cui il disco aperto è già un chiuso della topologia!