Riassunto :

- abbiamo introdotto le topologie in termini di aperti (e di chiusi) in un insieme X, e abbiamo visto che queste determinano due operatori di P(X) in sé (interno e chiusura) che soddisfano alle proprietà di Kuratowski
- viceversa, abbiamo mostrato che operatori di Kuratowski determinano in modo unico una topologia sull'insieme

Questa settimana introduciamo un altro punto di vista, più tecnico ma anche più "geometrico". Diremo cosa sono i FILTRI su un insieme X e poi useremo i filtri per due scopi:

(1) caratterizzare le topologie in termini di FILTRI DEGLI INTORNI dei punti: dare una topologia è la stessa cosa che dare per ogni punto la famiglia (filtro) di certi suoi sottoinsiemi, MA CON UNA CONDIZIONE DI COMPATIBILITÀ LOCALE.

(2) definire la nozione di LIMITE in uno spazio topologico qualsiasi, sia in termini di filtri, sia per le RETI che generalizzano le successioni usate negli spazi metrici.

Dato un insieme X, un filtro su X è un sottoinsieme $\mathcal{F}$ di $\mathcal{P}(X)$ tale che: è $\neq \emptyset$, $\not\ni \emptyset$, chiuso per intersezioni finite e per sovrainsiemi.
($\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\mathcal{F} \not\ni \emptyset$, $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$, $A \supseteq B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$).

L'idea intuitiva è che un filtro "si stringe" attorno a "qualcosa" tramite l'intersezione finita: più piccoli sono i suoi elementi, e meglio descrivono il "qualcosa" (ma l'intersezione di tutti gli elementi del filtro può essere vuota!).

Esempi:

(1) i sovrainsiemi di un fissato punto $x \in X$ formano un FILTRO (si chiama "FILTRO PRINCIPALE DI x")

(2) le semirette $(x, +\infty)$ di $\mathbb{R}$ per $x \in \mathbb{R}$ formano un filtro, ma l'intersezione di tutte è vuota.

(3) $\{X\}$ è un filtro (inutile!), ed è il più piccolo possibile perché ogni filtro contiene X.

(-1) $\mathcal{P}(X)$ non è un filtro!

(-2) un filtro non può contenere insiemi disgiunti!

(-3) dato $P \subseteq \mathcal{P}(X)$ non è detto che esista un filtro contenente P.

L'insieme di tutti i filtri su X è ordinato per inclusione,
è stabile per intersezioni arbitrarie (intersezione di filtri è un filtro),
ma $P(X)$ non è filtro, quindi in generale non esistono i filtri generati da qualsiasi $p \subseteq P(X)$.
Esiste il filtro minimo per l'ordine, ed è $\{X\}$.

Diciamo <u>ULTRAFILTRI</u> i filtri massimali per l'inclusione
per esempio i filtri principali di elementi di X sono ultrafiltri.
(se aggiungiamo un sottoinsieme che non contiene x, per intersezione otteniamo il $\emptyset$)

Gli ultrafiltri si caratterizzano facilmente: $\mathcal{F}$ è ultrafiltro se e solo se per ogni $S \subseteq X$ si ha $S \in \mathcal{F}$ oppure $S^c = X \setminus S \in \mathcal{F}$, cioè per ogni insieme contiene lui o il complementare.
Il "se" è ovvio: aggiungendo un insieme si aggiungerebbe il $\emptyset$ per intersezione
Il "solo se" si può vedere osservando che se $\mathcal{F}$ è filtro e $\mathcal{F} \not\ni S$, $\mathcal{F} \not\ni S^c$, allora $\{Y : Y \cup S \in \mathcal{F}\}$ è filtro ed è $\supsetneq \mathcal{F}$ (perché contiene S^c).

Si dimostra che OGNI FILTRO è contenuto in qualche ULTRAFILTRO, ma per fare questo serve il lemma di Zorn.
Come conseguenza: esistono ultrafiltri che <u>non</u> sono principali.

Questo è una pagina di supplementi se non avete visto prima filtri/ultrafiltri.

Problema: un filtro $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro sse $\forall A \subseteq X : A \cap B \neq \emptyset \ \forall B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \in \mathcal{F}$.

Osservazione: se X è un insieme infinito (per es. $\mathbb{N}$, numeri naturali) allora l'insieme dei COFINITI $\mathcal{F} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ finito}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è un filtro (se X è esso stesso finito, no, perché allora sarebbe $\mathcal{P}(X)$ che $\ni \emptyset$), e l'intersezione di tutti gli elementi di $\mathcal{F}$ è $\emptyset$.

Però $\mathcal{F}$ non è un ultrafiltro: perché?

D'altra parte esistono ultrafiltri che contengono $\mathcal{F}$, ma per dimostrarlo è necessario usare il lemma di Zorn o l'assioma della scelta: provate ad immaginarne uno! In realtà si tratta di insiemi "non costruibili" in qualche senso preciso.

Questi ultrafiltri, in opposizione a quelli "principali" che hanno un elemento minimo, si dicono "liberi" e sono di importanza essenziale in molti campi della matematica.

Come per le topologie, è difficile descrivere tutti gli elementi di un filtro, e per questo si definiscono BASI e PREBASI dei filtri:

Se $\mathcal{F}$ è un filtro, un suo sottoinsieme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ si dice BASE del filtro $\mathcal{F}$ se ogni elemento di $\mathcal{F}$ è SOVRAINSIEME di qualche elemento di $\mathcal{B}$:
$\forall S \in \mathcal{F} \quad \exists B \in \mathcal{B} : B \subseteq S$. E allora $\mathcal{F}$ è l'insieme dei sovrainsiemi di $\mathcal{B}$.

Osservazione: un sottoinsieme $\mathcal{B}$ di $\mathcal{P}(X)$ è base PER un filtro se e solo se è $\neq \emptyset$, $\not\ni \emptyset$ e intersezioni finite di elementi di $\mathcal{B}$ contengono elementi di $\mathcal{B}$
($\mathcal{B} \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \not\ni \emptyset$, $A, B \in \mathcal{B} \Rightarrow \exists C \in \mathcal{B} : C \subseteq A \cap B$).
In questo caso il filtro generato da $\mathcal{B}$ è l'insieme dei sovrainsiemi di elementi di $\mathcal{B}$.

Un sottoinsieme $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}$ si dice PREBASE del filtro $\mathcal{F}$ se l'insieme delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{P}$ è una base del filtro $\mathcal{F}$.

Osservazione: un sottoinsieme $\mathcal{P}$ di $\mathcal{P}(X)$ è prebase PER un filtro se e solo se è $\neq \emptyset$ e le intersezioni finite di suoi elementi è sempre $\neq \emptyset$.
In tal caso, il filtro generato da $\mathcal{P}$ è il filtro generato dalle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{P}$.

Proponiamo un problema che ci sarà utile in futuro:
come si comportano i filtri attraverso funzioni $X \xrightarrow{f} Y$?

Se $\mathcal{F}$ è un filtro su X, allora
$$\{ f(A) \mid A \in \mathcal{F} \} \subseteq \mathcal{P}(Y)$$
di solito non è un filtro:
per esempio non contiene Y (a meno
che f non sia suriettiva).
Però è sempre prebase per un filtro,
perché è $\neq \emptyset$ e
$$f(A) \cap f(B) \underset{\uparrow}{\supseteq} f(A \cap B) \neq \emptyset \quad (\text{perché } A \cap B \neq \emptyset)$$
di solito è $\neq$: forni esempi.

e il filtro generato si dice FILTRO
IMMAGINE di $\mathcal{F}$ tramite f.
Quando è una base?
Quando è già un filtro?

Se $\mathcal{G}$ è un filtro su Y, allora
$$\{ f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{G} \} \subseteq \mathcal{P}(X)$$
in generale non è un filtro:
potrebbe anche essere $\emptyset$, e quindi
nemmeno generare un filtro.
Quando genera un filtro?
Quando è già un filtro?

Usiamo ora i filtri per definire una <u>STRUTTURA TOPOLOGICA su X</u>:

è una funzione $X \longrightarrow$ Insieme dei filtri su X

$x \longmapsto \mathcal{F}(x)$ (detto il filtro degli intorni di $x \in X$)

tale che:

(1) $\forall x \in X$: $\mathcal{F}(x)$ è filtro contenuto nel filtro principale di x,

cioè $V \in \mathcal{F}(x) \Rightarrow V \ni x$.

(2) Condizione di LOCALITÀ:

$\forall U \in \mathcal{F}(x)$, $\exists V \subseteq U$ con $x \in V$ e $\underline{V \in \mathcal{F}(y)\ \forall y \in V}$

Questa condizione si legge: "V è intorno di ogni suo punto"

o equivalentemente:

$\forall U \in \mathcal{F}(x)$, $\exists W \in \mathcal{F}(x)$: $\underline{U \in \mathcal{F}(y)\ \forall y \in W}$

Questa condizione si legge: "U è intorno di ogni punto di W"

Intuitivamente la condizione di località dice che "punti vicini" nel senso dei filtri hanno filtri di intorni compatibili tra loro.

per vedere l'equivalenza delle due condizioni di località:

in un senso basta usare $W := V$

nell'altro, <u>più sottile</u>, si definisce $V := \{y \in X : U \in \mathcal{F}(y)\}$.

G2B 19/20 T24

Ora possiamo costruire una corrispondenza biunivoca tra

$\{$ topologie su $X \}$ e $\{$ strutture topologiche su $X \}$

così:

($\rightarrow$) se $\mathcal{T}_X$ è topologia su X, definiamo la struttura topologica che ad ogni $x \in X$ associa il filtro $\mathcal{T}_X(x)$ generato da $\underline{U \in \mathcal{T}_X \text{ con } x \in U}$ (APERTI CHE CONTENGONO x), cioè il filtro di tutti gli insiemi che contengono un aperto contenente x.

(problema: controllare che rispetta le due condizioni...)

($\leftarrow$) se $x \mapsto \mathcal{F}(x)$ è una struttura topologica, definiamo la topologia associata come $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} := \{U \subseteq X : U \in \mathcal{F}(x) \text{ per } \forall x \in U\}$, cioè diciamo che gli APERTI sono i sottinsiemi di X che sono intorno di ogni loro punto.

(problema: controllare che è una topologia, cioè contiene $\emptyset$, X, ed è chiusa per $\cup$ arbitrarie e $\cap$ finite: nella verifica si vedrà che non si usa la condizione di località dei filtri della struttura topol.!).

($\circlearrowleft$) È facile vedere che partendo da una topologia $\mathcal{T}_X$, costruendo la struttura topologica $x \mapsto \mathcal{F}(x) := \mathcal{T}_X(x)$ associata, e poi trovando la topologia associata a $\mathcal{F}$ si trova $\mathcal{T}_{\mathcal{F}} = \mathcal{T}_X$ (quella di partenza)

($\circlearrowright$) per l'altra composizione?

Preso $x \mapsto \mathcal{F}(x)$ una struttura topologica, abbiamo $\tau_{\mathcal{F}}$ la topologia associata,
e costruendo $x \mapsto \tau_{\mathcal{F}}(x)$ si vede subito che $\tau_{\mathcal{F}}(x) \subseteq \mathcal{F}(x)$ per ogni $x \in X$
(infatti i generatori di $\tau_{\mathcal{F}}(x)$ sono particolari elementi di $\mathcal{F}(x)$).
Per dimostrare l'inclusione opposta (e quindi la biiezione tra topol. e strutt. top.)
serve la condizione di località delle str. top. di partenza.
<u>Problema</u>: verificatelo!

Vediamo invece un esempio per vedere cosa succede per "strutt. top. <u>non</u> locali":
per $X = \mathbb{R}$, definiamo $x \mapsto \mathcal{F}(x) := \{$sovrainsiemi di $(x-1, x+1)\}$
(chiaro che sono filtri, e anche che non verificano la località).
La topologia associata è $\tau_{\mathcal{F}} = \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ quella banale
(perché l'unico insieme che è nel filtro di ogni suo punto è tutto $\mathbb{R}$).
Quindi il filtro associato è $x \mapsto \tau_{\mathcal{F}}(x) = \{\mathbb{R}\}$,
chiaramente molto più piccolo di quello di partenza!
(e chiaramente ha la proprietà di località).

<u>Notare</u>: l'analogia con il caso della proprietà di idempotenza per il rapporto tra topologie e operatori di Kuratowski.

Piccolo argomento tecnico: abbiamo ora una corrispondenza tra <u>topologie</u> e <u>strutture topologiche</u>, e sia per le topologie sia per i filtri abbiamo parlato di <u>basi</u> e <u>prebasi</u> (che sono diverse: controllare le definizioni!) La terminologia che usiamo è coerente in questo senso:

se $\mathcal{B}$ è una base per la topologia $\mathcal{T}_X$, allora la funzione

$$x \longmapsto \mathcal{B}(x) := \{B \subseteq X : x \in B \in \mathcal{B}\}$$

dà per ogni x una base per il filtro $\mathcal{T}_X(x)$ associato a $\mathcal{T}_X$.

idem sostituendo "base" con "prebase".

se $x \longmapsto \mathcal{F}(x)$ è struttura topologica, e per ogni x $\mathcal{B}(x)$ è base per filtro $\mathcal{F}(x)$, allora l'insieme

$$\{V \subseteq X : V \in \mathcal{B}(x) \ \forall x \in V\} \subseteq \mathcal{P}(X)$$

è una base per la topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{F}}$ associata alla struttura topologica

idem sostituendo "base" con "prebase".

Entrambi i fatti sono facili ma non banali: fate una verifica per esercizio!

Conviene vedere negli esempi semplici la corrispondenza top/strutt. top.:

top. banale $\{\emptyset, X\}$	str. top. minima: $x \longmapsto \{X\}$ per ogni x
top. discreta $\mathcal{P}(X)$	str. top. massima: $x \longmapsto \{U \subseteq X : U \ni x\}$ filtro principale!
top. cofinita $\{U \subseteq X : X \setminus U \text{ finito}\}$	$x \longmapsto \{U \subseteq X : x \in U,\ X \setminus U \text{ finito}\}$
top. includente di A	$x \longmapsto$ soprainsiemi di $A \cup \{x\}$
top. escludente di A	$x \longmapsto \begin{cases} \{X\} & \text{se } x \in A \\ \text{soprainsiemi di } x \text{ in } X \setminus A & \text{altrimenti.} \end{cases}$
top. p/metrica: base $D(x,\varepsilon)$ per $x \in X$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.	base per filtro degli intorni di $x \in X$: $D(x,\varepsilon)$ per $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$.
top. definita da famiglia p/metriche $\mathcal{D}$: prebase $D_d(x,\varepsilon)$ per $x \in X$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $d \in \mathcal{D}$.	prebase per il filtro degli intorni di $x \in X$: $D_d(x,\varepsilon)$ per $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, $d \in \mathcal{D}$.

Abbiamo visto finora che dare una topologia (nel senso degli aperti, o dei chiusi) è lo stesso che definire per ogni punto un filtro (dei suoi intorni) con una condizione di compatibilità locale tra questi filtri.
Questo ci dà anche un significato geometrico per la nozione di topologia: per ogni punto si considerano gli insiemi da considerare "vicini al punto", i filtri di intorni permettono di "approssimare il punto" usando la topologia.

Ora vedremo la seconda applicazione dei filtri nel contesto degli spazi topologici per definire in generale la nozione di PUNTI LIMITE e PUNTI ADERENTI (a filtri e a reti, in particolare successioni).
Otteniamo in questo modo una generalizzazione del concetto di limite usato in Analisi.

La definizione di FILTRO e l'uso in questo contesto sono dovute a H. CARTAN e subito utilizzate da N. BOURBAKI nelle sua opera collettiva di sistematizzazione della Matematica.

Sia (X, τ_X) uno spazio topologico e sia $\mathcal{F}$ un filtro su X.

(1) diremo che $x \in X$ è limite di $\mathcal{F}$, oppure che $\mathcal{F}$ converge a $x \in X$ (e scriviamo $\mathcal{F} \to x$) se: $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{T}_X(x)$, cioè se $\mathcal{F}$ contiene il filtro degli intorni di x per la topologia τ_X.

Intuitivamente: "$\mathcal{F}$ si stringe attorno a x almeno quanto il filtro di intorni"

(2) diremo che $x \in X$ è ADERENTE a $\mathcal{F}$ (e scriviamo $\mathcal{F} \succ x$, non c'è notazione standard)

se $\forall V \in \mathcal{F} : x \in \overline{V}$ (x appartiene alla chiusura per τ_X di ogni elemento di $\mathcal{F}$)

sse $\forall V \in \mathcal{F}, \forall U \in \mathcal{T}_X(x) : V \cap U \neq \emptyset$ (per definizione di chiusura)

sse esiste un filtro $\mathcal{G}$, $\mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}$, $\mathcal{G} \to x$ (sse x è LIMITE DI SOVRAFILTRI di $\mathcal{F}$).

Nota che i punti aderenti ad un filtro $\mathcal{F}$ sono esattamente i punti dell'insieme

$\bigcap_{V \in \mathcal{F}} \overline{V}$ (intersezione delle chiusure degli elementi del filtro).

E' immediato vedere che: x limite di $\mathcal{F}$ $\Rightarrow$ x aderente ad $\mathcal{F}$.

Il viceversa in generale è falso, ma vale il $\Leftrightarrow$ per $\mathcal{F}$ ULTRAFILTRO

(se x è aderente ad un ultrafiltro, è limite di un sovrafiltro, che è lui stesso per massimalità)

Alcune osservazioni facili:

(1) più fine la topologia più difficile la convergenza:

se $\tau_X = \{\emptyset, X\}$ allora OGNI FILTRO converge a OGNI PUNTO!

se $\tau_X = \mathcal{P}(X)$ allora solo i filtri principali convergono (e solo al loro punto!)

$\tau \leq \tau'$ sse $\forall x \in X$: $\tau'(x) \supseteq \tau(x)$ sse $\forall x \in X$: $\tau'(x) \to x$ (convergenza per topol. τ).

(2) per ogni $x \in X$ tra i filtri convergenti a x c'è un minimo ($\tau_X(x)$) e un massimo (il filtro principale di x).

(3) se un filtro converge a due punti, intorni dei due punti si intersecano sempre:

$\mathcal{F} \to x,\ \mathcal{F} \to y \Rightarrow \mathcal{F} \supseteq \tau_X(x), \tau_X(y) \Rightarrow \forall V \in \tau_X(x), \forall W \in \tau_X(y) : V \cap W \neq \emptyset$ (perché $\in \mathcal{F}$).

quindi se punti distinti hanno intorni disgiunti (condizione hausdorff o T2) allora i limiti, se esistono, sono unici.

(4) I sovrainsiemi di $(0,1)$ in $\mathbb{R}$ formano un filtro che, per la topologia metrica usuale, hanno come punti aderenti quelli di $[0,1]$ e nessun punto limite

(5) Si consideri su un insieme X la topologia includente di $A \subseteq X$;

per $B \subseteq X$ si discutano punti aderenti e punti limite del filtro dei sovrainsiemi di B.

Introduciamo ora la <u>NOZIONE di RETE (e limite di esse)</u> che è più vicina dell'intuizione, ma meno intrinseca della nozione di filtro.

<u>preliminare</u>: un insieme ordinato $(A, \leq)$ si dice "filtrante verso l'alto" se $\forall \alpha, \beta \in A \quad \exists \gamma \in A : \gamma \geq \alpha, \gamma \geq \beta$

(dati due qualsiasi elementi possiamo trovarne almeno uno maggiore di entrambi)

<u>esempi principali</u>: <u>l'insieme $\mathbb{N}$ con l'ordine usuale</u>.

<u>un qualsiasi filtro</u> usando come ordine <u>la CONTROINCLUSIONE</u>, cioè $A \leq B$ sse $A \supseteq B$,

idea intuitiva: più grande per l'ordine significa "più preciso", cioè "più piccolo come insieme".

in particolare: <u>i filtri di intorni dei punti</u> negli spazi topologici.

<u>DEFINIZIONE di rete a valori in un insieme X</u>:

è mappa $A \longrightarrow X$ dove A è un insieme ordinato filtrante verso l'alto, e di solito scriviamo $\alpha \longmapsto x_\alpha$ (cioè α al pedice, invece di $x(\alpha)$).

Si dice <u>SUCCESSIONE</u> se $A = \mathbb{N}$ con ordine usuale

Vi è una corrispondenza tra filtri su X e reti in X.

La cosa principale è che ad ogni rete viene associato un filtro:

Se $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ è una rete in X,

definiamo le CODE della rete come gli insiemi $S_\alpha := \{x_\beta \mid \beta \geq \alpha\} \subseteq X$,

e diciamo FILTRO ASSOCIATO ALLA RETE il filtro generato dalle code S_α per $\alpha \in A$

(si vede subito che questo insieme è non vuoto, non contiene il vuoto e l'intersezione di due code è non vuota per proprietà di filtrazione di $(A, \leq)$, quindi genera un filtro, di cui è prebase).

Questo filtro quindi è formato dai soprainsiemi di intersezioni finite di code della rete di partenza.

quando $(X, \mathcal{T}_X)$ è SPAZIO TOPOLOGICO

Ora possiamo dire cosa sono punti aderenti e punti limite di una RETE!

per definizione sono i punti aderenti e i punti limite del filtro associato alla rete: se $\mathcal{F}$ è il filtro associato alla rete $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$,

scriveremo $x_\alpha \to x$ e diremo "x è limite della rete x_α"

se $\mathcal{F} \to x$ (x è limite del filtro corrispondente, cioè $\mathcal{F} \supseteq \mathcal{T}_X(x)$)

Esplicitiamo il significato di "<u>essere limite</u> di una rete":

$x_\alpha \to x$ sse "filtro generato dagli S_α" $\to x$

sse "filtro generato dagli S_α" $\geq \mathcal{T}_X(x)$

sse $\forall U \in \mathcal{T}_X(x)$: $U \in$ "filtro generato dagli S_α"

sse $\forall U \in \mathcal{T}_X(x)$ $\exists \alpha$: $S_\alpha \subseteq U$

sse $\forall U \in \mathcal{T}_X(x)$ $\exists \alpha \in A$: $x_\beta \in U$ $\forall \beta \geq \alpha$

e da questo si riconosce che stiamo generalizzando la nozione di limite di una successione studiata in Analisi.

Per esercizio si espliciti il significato di "<u>essere aderente</u> ad una rete":

x aderente $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ sse x aderente al "filtro generato dagli S_α"

⋮

sse $\forall U \in \mathcal{T}_X(x), \forall \alpha \in A$ $\exists \beta \geq \alpha$: $x_\beta \in U$.

(di nuovo si riconoscono generalizzazioni di nozioni di Analisi)

La corrispondenza filtri/reti partendo da un filtro $\mathcal{F}$:

definiamo $A_{\mathcal{F}} = \{(F,x) : x \in F \in \mathcal{F}\}$ con ordine della controinclusione:

$(F,x) \leq (F',x')$ significa $F \supseteq F'$

(si vede subito che è un insieme ordinato filtrante verso l'alto),

e allora al filtro $\mathcal{F}$ associamo la rete:

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{F}} &\longrightarrow X \\ (F,x) &\longmapsto x. \end{aligned}$$

Da notare che l'insieme di indici $A_{\mathcal{F}}$ è enorme di solito!

Si vede subito che il filtro associato alla rete così definita è il filtro $\mathcal{F}$ di partenza.

Invece, se partiamo da una rete, costruiamo il filtro associato, e poi di questo facciamo la rete associata viene una rete apparentemente MOLTO più COMPLICATA.

Ma si può vedere, sulla definizione, che hanno gli stessi punti limite e aderenti.

Nella corrispondenza reti/filtri chiamiamo:

SOTTORETI le reti corrispondenti a SOVRAFILTRI

ULTRARETI le reti corrispondenti a ULTRAFILTRI.

Non useremo queste nozioni, ma va fatta una osservazione importante:

le sottoreti di una SUCCESSIONE di solito <u>NON SONO</u> SOTTOSUCCESSIONI!

Terminiamo mostrando la relazione tra limite generali di Kuratowski:

Se $S \subseteq X$ abbiamo

$\overline{S} = \{ x \in X :$ esiste un filtro in X generato da sottinsiemi di S avente x come limite$\}$

$= \{ x \in X :$ " " " " " x come punto aderente$\}$

$= \{ x \in X :$ esiste rete $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ in S con $x_\alpha \to x \}$

Di solito, per abuso di linguaggio, si dice "esiste una rete in S convergente a x", e (questo è l'abuso) "esiste un filtro in S convergente a x".

Si dimostra subito perché $x \in \overline{S}$ sse $\forall U \in \mathcal{G}_X(x)$ si ha $U \cap S \neq \emptyset$, quindi gli insiemi $U \cap S$ (che sono $\subseteq S$) al variare di $U \in \mathcal{G}_X(x)$ generano un filtro (in X) che chiaramente contiene $\mathcal{G}_X(x)$.

<u>È importante notare</u>, vedremo negli esempi, che invece <u>non bastano le</u> successioni: può darsi che $x \in \overline{S}$, ma che <u>non esistono successioni</u> in S convergenti a x (in X).

<u>Morale</u>: conoscere i punti limite di reti/filtri equivale a conoscere l'operatore di chiusura, quindi a conoscere la topologia

<u>Problema</u>: come caratterizzare l'interno S° in termini di limiti di reti/filtri?

Facciamo un esempio per capire che le successioni possono non bastare per descrivere la topologia:

consideriamo $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$, successioni a valori reali

con topologia i cui aperti sono dati da $\{(x_n) : x_n \in U_n \ \forall n\}$ al variare degli U_n negli aperti di $\mathbb{R}$.

Per esempio una base per gli intorni della successione nulla sono dati da

$\{(x_n) : x_n \in (-\varepsilon_n, \varepsilon_n)\}$ al variare di $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \in \mathbb{R}_{>0}$.

Consideriamo l'insieme delle successioni infinitesime mai nulle, cioè

$S = \{(x_n) : x_n \neq 0 \ \forall n, \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0$ (nella topol. usuale di $\mathbb{R}$)$\}$.

Allora la successione nulla appartiene a $\bar{S}$ perché in ogni suo intorno possiamo trovare una successione infinitesima mai nulla (per es $x_n = \min\{\frac{1}{n}, \frac{\varepsilon_n}{2}\}$).

Ma non vi è nessuna successione in S convergente a zero (successione nulla):

Sia per assurdo $s_0 = (x_{0n})$, $s_1 = (x_{1n})$, $s_2 = (x_{2m})$, $\ldots$ $s_i = (x_{in}) \ldots$ una tale successione e costruiamo un intorno della succ nulla usando $\varepsilon_i < \frac{x_{in}}{2}$, sia U.

Si vede immediatamente che $s_i \notin U$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, addirittura la successione sta SEMPRE FUORI DALL'intorno U.

Naturalmente esistono RETI in S convergenti alla successione nulla, ma come insieme di indici è naturale usare l'insieme degli intorni della succ nulla (ordinato per controinclusione).