RIASSUNTO:

FILTRI

Topologia:

<u>aperti</u> $\tau_X \subseteq P(X)$
chiuso per $\cap$ finite, $\cup$ arbitrarie

<u>chiusi</u> $\mathcal{C}_X \subseteq P(X)$ complem. aperti
chiuso per $\cap$ arb., $\cup$ finite

$\tau_X(x) = \{S : S \supseteq U \ni x\}$
τ_X

$\tau_X = \{S \subseteq X : S \in \tau_X(s)\ \forall s \in S\}$

STRUTTURA TOPOLOGICA:

$\forall x \in X$ filtro $\tau(x)$ degli intorni ($\subseteq$ f. princ x) con proprietà locale

$S^\circ := \bigcup$ aperti $\subseteq S$

$\bar{S} := \bigcap$ chiusi $\supseteq S$

aperti: $S = S^\circ$

chiusi: $S = \bar{S}$

OPERATORI DI KURATOWSKI:

$^\circ : P(X) \to P(X)$ ordinato
$\subseteq$ id
commuta $\cap$
idempotente

$\bar{\ } : P(X) \to P(X)$ ordinato
$\supseteq$ id
commuta $\cup$
idempotente

Reti, <u>limiti di filtri e reti</u>

$\mathcal{F} \to x$ sse $\mathcal{F} \supseteq \tau_X(x)$

$x_\alpha \to x$ sse filtro generato $S_\alpha \to x$
sse $\forall U \in \tau_X(x)\ \exists \alpha \in A : x_\beta \in U\ \forall \beta \geq \alpha$.

$\bar{S} = \{$limiti di reti in $S\} = \{$limiti di "filtri di S"$\}$

$S^\circ = \{$ punti di S tali che ogni rete in X convergente sta def in $S \}$

Le funzioni più importanti tra spazi topologici sono quelle CONTINUE, vediamo alcune definizioni equivalenti per $f: X \to Y$ con (X, τ_X), (Y, τ_Y) spazi topol.:

in termini di topologie:

- $f^{-1}(\tau_Y) \subseteq \tau_X$ (controimm. di aperti è aperta)
  basta per basi/prebasi su Y (non su X)
- $f^{-1}(\mathcal{C}_Y) \subseteq \mathcal{C}_X$ (controimm. di chiusi è chiusa)

in termini di strutture topologiche:

- $\forall x: f^{-1}(\tau_Y(fx)) \subseteq \tau_X(x)$ (controimm. di intorni sono intorni)
  basta per basi/prebasi su Y (non su X)
- $\forall x, \forall V \in \tau_Y(fx): \exists U \in \tau_X(x): fU \subseteq V$.
- $\forall x: \underbrace{f(\tau_X(x))} \supseteq \tau_Y(fx)$
  filtro generato in Y da $f(\tau_X(x))$.

in termini di op. Kuratowski:

- $\forall S \subseteq X: f(\bar{S}) \subseteq \overline{f(S)}$
  l'immagine della chiusura è contenuta nella chiusura dell'imm.
- $\forall T \subseteq Y: f^{-1}(T^\circ) \subseteq f^{-1}(T)^\circ$.

in termini di filtri/reti e limiti:

- $\forall \mathcal{F} \to x \Rightarrow f\mathcal{F} \to fx$
  (immagine di rete convergente a x converge a fx)
- $\forall x_\alpha \to x \Rightarrow fx_\alpha \to fx$

Si tratta delle definizioni / caratterizzazioni della continuità in Analisi: notare in particolare il passaggio da "controimmagini" a "immagini" che si vede bene con la nozione di struttura topologica

È importante notare esplicitamente alcuni esempi banali:

- se Y ha topologia BANALE allora ogni funzione (con codominio Y) è continua
- se X ha topologia DISCRETA allora ogni funzione (con dominio X) è continua

e alcune proprietà facili (da verificare a mente):

- la funzione identità $(X,\tau) \to (X,\tau')$ è continua sse $\tau \geq \tau'$
- composizione: se $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ sono continue, allora $g \circ f: X \to Z$ continua

Inoltre, usando la nozione di struttura topologica, possiamo definire la continuità in un punto:

$$f \text{ è continua in } x \in X \text{ sse } f^{-1}(\tau_Y(fx)) \subseteq \tau_X(x),$$

cosicché

$$f \text{ è continua sse } f \text{ continua in ogni } x \in X,$$

e abbiamo questa composizione:

$$f \text{ continua in } x,\ g \text{ continua in } fx \text{ implica } g \circ f \text{ continua in } x.$$

Altre definizioni per le mappe tra spazi topologici: $f: X \to Y$ (τ_X, τ_Y topol su X, Y):

f è <u>OMEOMORFISMO</u> se è biiettiva e bicontinua (significa che f è continua e anche l'inversa insiemistica f^{-1} è continua)

f è <u>APERTA</u> se manda aperti in aperti ($f(\tau_X) \subseteq \tau_Y$)

f è <u>CHIUSA</u> se manda chiusi in chiusi ($f(\mathcal{C}_X) \subseteq \mathcal{C}_Y$).

Per una mappa biiettiva otteniamo f^{-1} continua sse f aperta sse f chiusa,

quindi OMEOMORFISMO $\Rightarrow$ APERTA, CHIUSA

$\Leftrightarrow$ BIIETTIVA, CONTINUA, APERTA

$\Leftrightarrow$ BIIETTIVA, CONTINUA, CHIUSA.

Ma non ci sono altre implicazioni:

biiettiva, continua $\not\Rightarrow$ omeomorfismo perché l'inversa può non essere continua (per esempio $(X, \text{discreta}) \to (X, \text{banale})$ con identità)

continua (e chiusa) $\not\Rightarrow$ aperta (per esempio $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x,0)$, inclusione asse x $(y=0)$ in $\mathbb{R}^2$ con topol. usuale)

continua (e aperta) $\not\Rightarrow$ chiusa (per esempio $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x$, proiezione sull'asse delle x: l'iperbole $xy=0$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$, con immagine $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ non chiuso)

aperta o chiusa $\not\Rightarrow$ continua.

Un modo naturale per costruire nuove topologie è di chiedere che rendano continue fissate funzioni o famiglie di funzioni.
Vediamo prima il caso di <u>una funzione</u> $f : X \to Y$

Se X è uno spazio topologico, allora ESISTE UNA UNICA <u>MASSIMA TOPOLOGIA su Y</u> tale che f sia continua:

TOPOLOGIE FORTI

$V \subseteq Y$ aperto <u>sse</u> $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$

(e $V \subseteq Y$ t.c. $f^{-1}(V) \in$ basi/prebasi di $\mathcal{T}_X$ danno basi/prebasi per questa topologia).

Per questa topologia su Y risulta:
$g : Y \to Z$ continua <u>sse</u> $g \circ f$ continua per <u>qualsiasi sp. topologico Z.</u>

Infatti
$g^{-1}(W)$ aperto sse $f^{-1}g^{-1}(W)$ aperto in X
sse $(g \circ f)^{-1}(W)$ aperto in X.

Se Y è uno spazio topologico, allora ESISTE UNA UNICA MINIMA TOPOLOGIA su X tale che f sia continua:

TOPOLOGIE DEBOLI

$U \subseteq X$ aperto <u>sse</u> $U = f^{-1}(V)$ con $V \in \mathcal{T}_Y$

(e $f^{-1}(V)$ con $V \in$ basi/prebasi per $\mathcal{T}_Y$ danno basi/prebasi per questa topologia).

Per questa topologia su X risulta:
$h : Z \to X$ continua <u>sse</u> $f \circ h$ continua per <u>qualsiasi Z spazio topologico</u>.

Infatti la continuità di h si controlla sugli insiemi del tipo $f^{-1}(V)$ per $V \in \mathcal{T}_Y$:
h continua sse $h^{-1}(f^{-1}V)$ aperto $\forall V \in \mathcal{T}_Y$
sse $(f \circ h)^{-1}(V)$ aperto $\forall V \in \mathcal{T}_Y$.

Vediamo i casi di topologie banali e discrete come esempio:

Se X ha la topologia DISCRETA, allora la top. forte di f su Y è quella <u>discreta</u> (rende f continua ed è la più grande possibile).

Se X ha la topologia banale $\{\emptyset, X\}$, allora la topologia forte su Y ha come aperti $f(X)$ e tutti gli elementi di $P(Y \setminus f(X))$ (che hanno controimmagine $\emptyset$, quindi sono aperti).

È la top. banale di Y <u>sse</u> f è SURIETTIVA.

Se Y ha la topologia banale, allora la topologia debole di f su X è quella <u>banale</u> (rende f continua ed è la più piccola possibile).

Se Y ha la topologia discreta, allora la top. debole su X è generata dagli elementi della partizione $f^{-1}(y) \subseteq X$ al variare di $y \in Y$.

È la topol. discreta di X <u>sse</u> f è INIETTIVA.

Ci sono due casi particolari importanti: quozienti e sottoinsiemi:

Se X è spazio topologico e $\sim$ rel. eq. su X, allora al quoziente $Y := X/\sim$ diamo la topologia forte della proiezione

$\pi : X \longrightarrow X/\sim$

che si dice topologia quoziente:

$V \subseteq X/\sim$ aperto sse $\pi^{-1}(V) = \bigcup_{v \in V} [v]_\sim$ aperto in X

(unione classi equivalenza!)

Con questa topologia π è continua per definizione, ed è

chiusa sse $\pi^{-1}(\pi C)$ chiuso $\forall C$ chiuso in X,

sse i saturati di chiusi sono chiusi

aperta sse $\pi^{-1}(\pi U)$ aperto $\forall U$ aperto in X,

sse i saturati di aperti sono aperti.

Se Y è spazio topologico e $X \subseteq Y$ (sottoinsieme) diamo a X la topologia debole dell'inclusione

$i : X \hookrightarrow Y$

che si dice topologia indotta:

U aperto in X sse $U = V \cap X$ con V aperto di Y.

(notare che U non è necess. aperto di Y!).

Con questa topologia i è continua per definizione, ed è

chiusa sse $X \in \mathcal{C}_Y$ (X è chiuso come $\subseteq Y$)

aperta sse $X \in \mathcal{T}_Y$ (X è aperto come $\subseteq Y$).

NOTA: la topologia quoziente di uno spazio (pseudo)metrico in generale non è pseudometrizzabile!

NOTA: la topologia indotta da uno spazio (pseudo)metrico è (pseudo)metrizzabile.

Piccolo intermezzo: topologie su un insieme con 2 punti:

Se $X=\{0,1\}$ ci sono 4 topologie possibili:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{discreta} \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{\emptyset,\{0\},X\} \arrow[dr, dash] & & \{\emptyset,\{1\},X\} \arrow[dl, dash] \\
 & \text{banale} &
\end{tikzcd}$$

discreta ⟵ METRIZZABILE (metrica discreta)

$\{\emptyset,\{0\},X\}$, $\{\emptyset,\{1\},X\}$ } topologie di Sierpinski: un punto è aperto e l'altro è chiuso.

banale ⟵ PSEUDOMETRIZZABILE (pseudometrica banale)

Le topologie intermedie <u>non</u> sono pseudometrizzabili

perché in uno spazio pseudometrizzabile: $\overline{S}=\{x\in X : d(x,S)=0\}$ $\quad d(x,S) = \inf_{s\in S} d(x,s)$

e dunque $x\in\overline{\{y\}}$ sse $d(x,y)=0$ sse $y\in\overline{\{x\}}$;

invece qui abbiamo, per es. a sinistra: $\overline{\{0\}}=\{0,1\}$ ma $\overline{\{1\}}=\{1\}$.

Tutte e 4 queste topologie si possono ottenere come <u>topologie quozienti</u> di spazi topologici (tramite partizione con 2 classi).

<u>Problema</u>: quante topologie ci sono su un insieme con 3 punti?

Un paio di esempi di topologie quozienti:

dei problemi di classificazione:

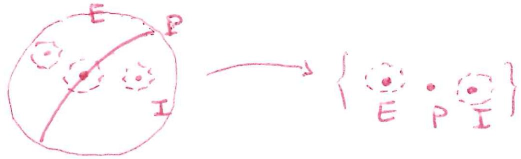
vediamo le coniche affini non degeneri come sottoinsieme di $GL_3(\mathbb{C})$ tramite matrici simm.

la classifica affine complessa (modulo affinità) dà solo due classi di equiv (a centro, parabole)

Abbiamo $\mathbb{C}^6 \supseteq GL_3^{simm}(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \text{coniche}/_{\text{affinità}} = \{C, P\}$,

e usando la topologia metrica su $\mathbb{C}^6$, la topol. quoziente ha come aperti $\{C\}, \emptyset, \{C,P\}$.

Nel caso delle coniche affini REALI otteniamo tre classi (ellissi, parab., iperbol): che topologia quoziente viene nell'insieme $\{E, P, I\}$?



$\overline{\{E\}} = \{E,P\}$

$\overline{\{I\}} = \{I,P\}$

$\overline{\{P\}} = \{P\}$

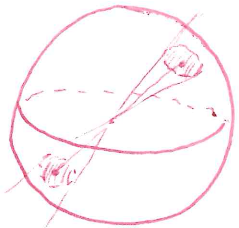
della geometria proiettiva:

gli spazi proiettivi possono essere descritti come quozienti:

$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n+1}/_{\mathbb{C}^\times}$, e otteniamo una proiezione $\mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$

quindi possiamo dare a $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ la topologia quoziente della topologia usuale metrica di $\mathbb{C}^{n+1}$ (idem per $\mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1}/_{\mathbb{R}^\times}$).

Se pensiamo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ come S^n modulo antipodia, possiamo dare a $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ la topologia indotta come sottospazio, e a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la topologia quoziente; viene quella definita sopra?



G2B 19/20 ~~T43'~~

Piccolo esercizio/problema di allenamento:

(1) supponiamo che $f: X \to Y$ sia funzione continua tra spazi topol. (top. τ_X e τ_Y)

confrontare la topologia τ_Y con la topologia su Y indotta dalla funzione f usando τ_X su X.
(che inclusione c'è? esempi in cui sono $\neq$?)

confrontare la topologia τ_X con la topologia su X indotta dalla funzione f usando τ_Y su Y.
(idem)

(2) (qui non serve che X sia sp. topol.)
confrontare la topologia τ_Y con la topologia su Y indotta dalla funzione f usando su X la topologia indotta da f stessa tramite τ_Y.

(qui non serve che Y sia sp. topol.)
confrontare la topologia τ_X con la topologia su X indotta dalla funzione f usando su Y la topologia indotta da f stessa tramite τ_X.

Trattiamo ora il caso di <u>FAMIGLIE di funzioni</u>:

Se $f_\alpha : X_\alpha \to Y$ famiglia di funzioni $\alpha \in A$, e X_α sono spazi topologici con topol τ_α,

<u>allora</u>

esiste una UNICA TOPOL. MASSIMA su Y t.c.

f_α continua per ogni $\alpha \in A$ e

$V \subseteq Y$ aperto sse $f_\alpha^{-1}(V) \in \tau_\alpha$ $\forall \alpha \in A$.

Questa topologia su Y si chiama

TOP. INDUTTIVA o <u>TOP. FORTE</u> della famiglia f_α.

Ha le seguente <u>proprietà fondamentale</u>:

una funzione $Y \xrightarrow{g} Z$

dove Z è uno spazio topologico

e Y è dotato della top. forte delle f_α

è continua <u>sse</u> $g \circ f_\alpha$ continua per $\forall \alpha \in A$.

Se $f_\alpha : X \to Y_\alpha$ famiglia di funzioni $\alpha \in A$, e Y_α sono spazi topologici con topol. τ_α,

<u>allora</u>

esiste una UNICA TOPOLOGIA MINIMA su X t.c.

f_α continua per ogni $\alpha \in A$ e

<u>UNA PREBASE</u> di questa topologia su X

è data dagli $f_\alpha^{-1}(V_\alpha)$ per $\forall \alpha \in A$, $\forall V_\alpha \in \tau_\alpha$.

<u>Nota</u> per trovare la topologia serve fare intersezioni finite e poi unioni arbitrarie.

Questa topologia su X si dice

TOPOL. PROIETTIVA o <u>TOP. DEBOLE</u> della famiglia f_α

e ha la seguente <u>proprietà fondamentale</u>:

una funzione $Z \xrightarrow{h} X$

dove Z è uno spazio topologico

e X è dotato della top. debole delle f_α

è continua <u>sse</u> $f_\alpha \circ h$ continua $\forall \alpha \in A$.

Esempi immediati:

La topologia forte di una famiglia di topologie DISCRETE è discreta.

Invece la topologia forte di una famiglia di topologie BANALI può essere maggiore della top. banale.

La topologia forte di una famiglia di topologie (pseudo)metrizzabili in generale non è pseudometrizzabile (già per una funzione)

La topologia debole di una famiglia di topologie BANALI è banale.

Invece la topologia debole di una famiglia di topologie DISCRETE può essere minore della top. discreta

La topologia debole di una famiglia di topologie (pseudo) metrizzabili è definita da una famiglia di pseudometriche.

Esempi importanti di topologie forti vengono dalle unioni :

- sia X_α una famiglia di spazi topologici ; allora sulle unioni
  insiemistica $X := \bigcup X_\alpha$, con le inclusioni $X_\alpha \overset{i_\alpha}{\hookrightarrow} X$
  disgiunta $\tilde{X} := \bigsqcup X_\alpha$, con le inclusioni $X_\alpha \overset{\tilde{i}_\alpha}{\hookrightarrow} \tilde{X}$
  usiamo le topologie forti delle inclusioni , cioè $U \subseteq X$ aperto sse $i_\alpha^{-1}(U) = U \cap X_\alpha$ aperto $\forall \alpha$
  e $U \subseteq \tilde{X}$ aperto sse $\tilde{i}_\alpha^{-1}(U)$ aperto $\forall \alpha$.

- UNIONI CRESCENTI : data una famiglia di inclusioni $X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \cdots$ per $n \in \mathbb{N}$
  definiamo $X := \bigcup_n X_n$ con topologia indotta dalle inclusioni $X_n \hookrightarrow X$:
  U aperto in X sse $U \cap X_n$ aperto in ogni X_n.

Esempio importante : $X_n = \mathbb{R}^n \hookrightarrow X_{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ (tramite equazione $x_{n+1} = 0$)
cioè usiamo $\mathbb{R}^0 \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3 \subseteq \dots \subseteq \mathbb{R}^n \subseteq \dots$
allora definiamo $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$
e un aperto di $\mathbb{R}^\infty$ è sottinsieme che sia aperto in ogni $\mathbb{R}^n$.

Ora usando
$$\begin{array}{ccc} Y_n = S^{n-1} & \hookrightarrow & Y_{n+1} = S^n \\ \cap & & \cap \\ X_n & & X_{n+1} \end{array}$$
(tramite le equazione $x_{n+1} = 0$)

e definiamo $S^\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S^n$ che è $\subseteq \mathbb{R}^\infty$.

domanda : la topologia di S^∞ come unione degli S^n coincide con la topologia indotta come sottinsieme di $\mathbb{R}^\infty$?

Esempi fondamentali di topologie deboli vengono dai prodotti:

Ricordiamo che se X_α è famiglia di insiemi per $\alpha \in A$, definiamo il PRODOTTO CARTESIANO $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha := \{ A \xrightarrow{x} \coprod_{\alpha\in A} X_\alpha \ : \ \forall \alpha, x_\alpha \in X_\alpha \} = \{ (x_\alpha)_{\alpha\in A} \}$

(se A è finito, si tratta delle solite n-uple se $n = \# A$).

Il prodotto ha le mappe naturali di proiezione $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$, $x \longmapsto x_\alpha$ per ogni $\alpha \in A$.

Ora, se gli X_α sono spazi topologici, diamo al prodotto X la topologia debole delle proiezioni, cioè la minima topologia che rende continue tutte le π_α (detta top PRODOTTO):

una prebase è formata da $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ al variare di $\alpha \in A$, $U_\alpha \in \tau_\alpha$

una base è formata da $\bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$, cioè dai $\prod_\alpha U_\alpha$ con $U_\alpha \in \tau_\alpha$, $= X_\alpha$ per quasi ogni α

(perché si tratta di intersezioni finite).

Nel caso dei prodotti finiti (cioè con A finito) quindi una base di aperti è costituita dai PRODOTTI DI APERTI, $\prod_{i=1}^n U_i$ con $U_i \in$ aperti di X_i.

Nel caso dei prodotti infiniti invece (cioè con A infinito) la topologia PRODOTTO è molto più piccola della box-topology con base data da $\prod_\alpha U_\alpha$ con $U_\alpha \in \tau_\alpha$.

Esempio: topologie nello spazio delle successioni reali

$$X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\mathbb{N} \to \mathbb{R}\} = \prod_{\mathbb{N}} \mathbb{R} \quad (\text{prodotto di } \mathbb{N} \text{ copie di } \mathbb{R}).$$

La topologia PRODOTTO ha come base

$$\bigcap_{i=1}^{m} \pi_{n_i}^{-1}(U_{n_i}) = \prod_{n\in\mathbb{N}} U_n \quad \text{dove} \quad U_n = \begin{cases} U_{n_i} & \text{per } i=1,\dots,m \ (\text{aperti di } \mathbb{R}) \\ \text{tutto } \mathbb{R} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

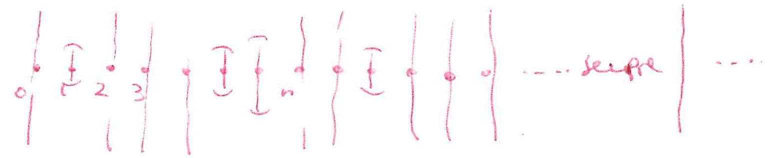
$$= \{(x_n) : x_{n_i} \in U_{n_i} \text{ per } i=1,\dots,m\}$$

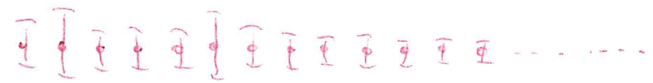
successioni che in finiti (fissati) indici hanno valore in aperti (fissati di $\mathbb{R}$).

Questa è molto meno fine della box topology con base

$\prod_{n\in\mathbb{N}} U_n$ con U_n aperto di $\mathbb{R}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Per esempio vediamo gli intorni della successione nulla:

per topologia prodotto: 

per box-topology: 

Nota: possiamo vedere $\mathbb{R}^\infty = \bigcup \mathbb{R}^n$ come sottoinsieme di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, in quanto successioni con termini definitivamente nulli.

Quali sono le topologie indotte da $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ su $\mathbb{R}^\infty$ (come sottoinsiemi)?

Esempio: PRODOTTO DI SPAZI DISCRETI.

se il prodotto è finito, la top. prodotto è discreta, altrimenti no.

Vediamo per esempio l'insieme di CANTOR:

- come $\subseteq \mathbb{R}$:

$C_0 := [0,1]$

$C_1 := [0,1] \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (tolto il "terzo centrale")

$C_2 :=$ $C_1 \setminus 2$ "terzi centrali"

$C_3 :=$ $C_2 \setminus 4$ "terzi centrali"

⋮

$C_n := C_{n-1} \setminus 2^{n-1}$ "terzi centrali"

⋮

$\mathbf{C} := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} C_i$ con topologia indotta

come $\mathbf{C} \subseteq \mathbb{R}$ (è chiuso perché $\cap$ di chiusi, ogni elemento è di accumulazione e frontiera!)

- come spazio prodotto:

si considera $\{0,2\}$ con topol. DISCRETA e lo spazio prodotto

$\{0,2\}^{\mathbb{N}} = \{\mathbb{N} \to \{0,2\}\}$

con topologia prodotto, avente aperti di base

$$U_{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_s} = \left\{ \mathbb{N} \to \{0,2\} : \begin{array}{l} x_{i_1} = \dots = x_{i_r} = 0 \\ x_{j_1} = \dots = x_{j_s} = 2 \end{array} \right\}$$

al variare di r,s e indici $j_1 \dots j_s, i_1 \dots i_r \in \mathbb{N}$.

OMEOMORFISMO TRA LE DUE COSTRUZIONI:

$$\begin{aligned} \{0,2\}^{\mathbb{N}^*} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ (a_i) &\longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} = (0,a_1 a_2 a_3 \dots)_{(3)} \end{aligned}$$

scrittura in base 3, senza la cifra 1, per numeri in $[0,1]$.

Chiaramente una biiezione:

confrontare le due topologie confrontando le basi!

G2B 19/20 T50

<u>Esempio</u>: DUPLICAZIONE DEI PUNTI.

Consideriamo X spazio topologico e $I = \{0,1\}$ con topologia $\begin{cases} \text{DISCRETA} \\ \text{o} \\ \text{BANALE} \end{cases}$.

Allora $X \times I = \{(x,i) \mid x \in X, i \in \{0,1\}\}$ è formato da "due copie di X" (ogni punto è raddoppiato) e con topologie diverse a seconda che su I si usi la topologia

- DISCRETA, e allora la topologia è quella della <u>unione disgiunta</u> di $X \times \{0\}$ e $X \times \{1\}$
- BANALE: gli aperti di base sono $U \times I$ con U aperto di X

Si può generalizzare alla "moltiplicazione dei punti" usando I finito qualsiasi.

G2B 19/20

T51

PROBLEMA FINALE:

Sia dato uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$

e si consideri l'insieme $\mathcal{C}((X,\mathcal{T}), \mathbb{R}) = \{X \to \mathbb{R}$ continue$\}$

delle funzioni continue tra X (con top $\mathcal{T}$) e $\mathbb{R}$ con topologia usuale metrica.

Sia $\mathcal{T}'$ la topologia debole su X delle funzioni $\mathcal{C}((X,\mathcal{T}), \mathbb{R})$,

cioè la più piccola topologia su X che rende continue tutte le funzioni

dell'insieme $\mathcal{C}((X,\mathcal{T}), \mathbb{R})$, quindi de sono continue con topologia $\mathcal{T}$.

Essendo $\mathcal{T}'$ la minima, e rendendo $\mathcal{T}$ continue tali funzioni,

otteniamo ovviamente $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, cioè $\mathcal{T}'$ è meno fine di $\mathcal{T}$.

Tra l'altro coincidono esattamente quando sono uguali,

ma per ora si può cercare di capire una base per aperti o per chiusi

di $\mathcal{T}'$: come trovare i "chiusi di base" per $\mathcal{T}'$?