G2B 19/20 T52

STRATEGIA GENERALE PER LE PROSSIME SETTIMANE :

STUDIEREMO ALCUNE PROPRIETÀ DEGLI SPAZI TOPOLOGICI
- NUMERABILITÀ (TOPOLOGICO)
- SEPARAZIONE (TRA PUNTI ...)
- CONNESSIONE
- COMPATTEZZA

E IN OGNI CASO BISOGNA :

- vedere le relazioni tra queste proprietà (implicazioni, controesempi)
- vedere le stabilità di queste proprietà per funzioni continue/aperte/chiuse ecc (cercare controesempi se le proprietà non sono stabili!)
- vedere le stabilità di queste proprietà passando a topologie definite da condizioni di continuità : in particolare per TOPOLOGIE QUOZIENTI, INDOTTE (SU SOTTOINSIEMI), PRODOTTO, (in generale per top. forti e deboli).

SPESSO VEDERE QUESTE PROPRIETÀ resterà come esercizio/problema : quelle importanti/difficili saranno esplicitate, le altre possono diventare anche piccoli esercizi teorici per i compiti.
Si tratta di un lavoro quasi infinito (!) e c'è addirittura un libro di CONTROESEMPI in topologia.

Per prima cosa vediamo alcune proprietà di NUMERABILITÀ:
L'idea di base è vedere quanto è "piccolo" uno spazio in termini della topologia (e non solo come insieme): uno spazio topologico $(X, \mathcal{T}_X)$ si dice:

SEPARABILE (scriviamo S) se esiste un sottoinsieme $Y \subseteq X$ DENSO E NUMERABILE (cioè $\overline{Y} = X$ e cardinalità di Y è al più numerabile). Di solito con NUMERABILE intendiamo al più num.

Esempi: spazi con topol. DISCRETE sono separabili sse sono insiemi al più numerabili, mentre spazi con topol. BANALE sono sempre separabili.

TOPOLOGICAMENTE LOCALMENTE NUMERABILE o PRIMO NUMERABILE o C1: se per ogni punto $x \in X$ esiste una base numerabile per gli intorni $\mathcal{T}_X(x)$.

Esempi: topologie BANALI e DISCRETE sono sempre C1.
topologie (pseudo) metrizzabili sono sempre C1 (dischi centro x e raggi razionali)
NOTA: quindi una topologia non C1 non può essere pseudometrizzabile!

TOPOLOGICAMENTE NUMERABILE o SECONDO NUMERABILE o C2: se esiste una base numerabile per la topologia (ogni aperto si scrive come unione di aperti di una qualche famiglia numerabile (di aperti)).

Esempi: topologie discrete sono C2 sse lo spazio è insieme numerabile
topologie BANALI sono sempre C2.

Vediamo che relazioni ci sono tra queste proprietà:
la proprietà C2 è più forte delle altre, cioè

$$C2 \Rightarrow C1 \qquad \text{e} \qquad C2 \Rightarrow S$$

perché: se $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ è base numerabile della topologia $\mathcal{T}$ di X, allora:

$\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : B \ni x\}$
è una base (numerabile, $\subseteq \mathcal{B}$)
del filtro $\mathcal{T}(x)$.
infatti ogni intorno di x
contiene un aperto $U \ni x$,
e U è unione di elementi di $\mathcal{B}$,
quindi contiene qualche $B \ni x$
con $B \in \mathcal{B}$.

costruiamo l'insieme Y scegliendo
per ogni $B \in \mathcal{B}$ un qualche $b \in B$.
Allora questo insieme Y interseca
tutti gli aperti della base $\mathcal{B}$,
quindi interseca tutti gli aperti di $\mathcal{T}$,
e dunque è un insieme <u>DENSO</u>,
ed è numerabile perché ha cardinalità
$\leq$ di quella di $\mathcal{B}$

Quindi, di conseguenza, uno spazio topologico non S o non C1
<u>non può</u> avere la proprietà C2.

Tutte le altre possibili implicazioni sono false!

Vi sono spazi che non hanno nessuna di queste tre proprietà:

$\mathbb{R}$ con la topologia conumerabile: tutti i sottoinsiemi numerabili sono chiusi, quindi non possono essere densi (non è S, quindi non è C2); non è C1 perché per ogni insieme numerabile $U_n = \mathbb{R} \setminus T_n$ di intorni di $x \in \mathbb{R}$ (con T_n numerabile) otteniamo $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ numerabile, $\neq \mathbb{R}$, e $\mathbb{R} \setminus \{y\}$ con $y \in \mathbb{R} \setminus \bigcup T_n$, $y \neq x$, è intorno di x che non contiene nessuno degli U_n.

questa topologia non è (pseudo)metrizzabile

Vediamo che $S, C1 \not\Rightarrow C2$

Basta vedere che ci sono spazi topologici separ., C1 ma non C2: per esempio $\mathbb{R}$ con la topologia includente di $\{0\}$ è separabile (qualunque insieme che $\ni 0$ è denso, perché interseca tutti gli aperti), è C1 (base di intorni di x: basta un solo elemento, $\{x, 0\}$), ma non è C2: tutti gli aperti del tipo $\{0, x\}$ con $x \in \mathbb{R}$ dovrebbero stare in qualsiasi base, e non sono in quantità numerabile.

per gli spazi pseudometrici vedremo che $S = C2$, quindi anche questa topologia non è pseudometrizzabile!

Vediamo che $C1 \not\Rightarrow S, C2$

Basta vedere che ci sono spazi $C1$ ma non separabili (né $C2$, quindi):
per esempio $\mathbb{R}$ con la topologia ESCLUDENTE di $\{0\}$: è $C1$ perché una base di intorni di x è fatta da $\{x\}$ stesso se $x \neq 0$ (e da $\mathbb{R}$ altrimenti!), ma non è separabile perché un insieme denso deve intersecare ogni aperto, quindi ogni $\{x\}$ con $x \neq 0$, quindi deve $\supseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$, e non è numerabile.
(anche $\mathbb{R}$ con la topologia DISCRETA andava bene)

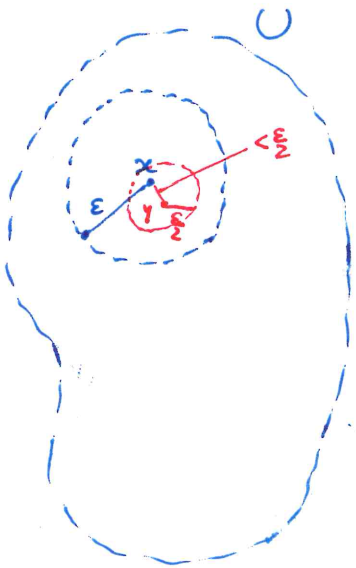
Vediamo che $S \not\Rightarrow C1, C2$

Basta vedere che ci sono spazi separabili, ma non $C1$ (né $C2$, quindi):
per esempio $\mathbb{R}$ con la topologia cofinita. E' separabile perché ogni insieme non finito (in particolare numerabile come $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$) è denso, ma non è $C1$ (esercizio, simile al caso connumerabile...).

Nel caso speciale degli spazi <u>pseudometrizzabili</u> abbiamo queste proprietà in più:

- <u>Sono sempre C1</u> perché in ogni punto $x \in X$ usiamo $D(x,\varepsilon)$ con $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ come base di intorni, e $\mathbb{Q}$ è numerabile

- <u>vale l'equivalenza $C2 \Leftrightarrow S$</u>, cioè uno spazio pseudometrizzabile è separabile se e solo se è a base numerabile.



Basta mostrare $S \Rightarrow C2$: se $Y \subseteq X$ è denso e numerabile, allora l'insieme dei dischi $D(y,\varepsilon)$ con $y \in Y$ e $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ è base della topologia, ed è numerabile (cardinalità $\leq$ di quella di $Y \times \mathbb{Q}$). Bisogna mostrare che ogni aperto U (unione di dischi $D(x,\varepsilon_x)$ per $x \in U$ ...) è anche unione di dischi con centri nel sottinsieme denso Y; dovreste averlo visto in Analisi, ma rifatelo usando il disegno a fianco come suggerimento!

<u>In particolare</u>: spazi <u>non C1</u>, oppure <u>S e non C2</u> non possono essere pseudometrizzabili!

Vedremo in questo modo che le topologie di SORGENFREY sulla retta reale $\mathbb{R}$ <u>non</u> sono metrizzabili.

Riassunto :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & C1 \arrow[ld, Rightarrow, bend right, "/"'] \arrow[dd, Leftrightarrow, "/"] \\
C2 \arrow[ru, Rightarrow] \arrow[rd, Rightarrow] & \\
 & S \arrow[lu, Rightarrow, bend left, "/"]
\end{tikzcd}$$

ma nel caso pseudometrizzabile : $\Rightarrow C1$
$\Rightarrow (S \Leftrightarrow C2)$

Restano da esplorare le proprietà di stabilità : per esempio

sottospazi di C1, C2 restano $C1$, C_2 [per S non vale necessariamente]

prodotti finiti o numerabili di S, C1, C2 restano S, C1, C2

prodotti di cardinalità CONTINUA di S restano S

quozienti di S sono S [non vale necess. per C1, C2]

Vediamo ora alcune proprietà di SEPARAZIONE (non c'entra nulla con la separabilità!): l'idea di fondo è capire se riusciamo a "distinguere" (= separare) i punti di X attraverso proprietà topologiche: uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è:

T_0 (o KOLMOGOROFF) se per ogni $x \neq y$ esiste $U \in \mathcal{T}(x)$, $U \not\ni y$ oppure esiste $V \in \mathcal{T}(y)$, $V \not\ni x$

sse per ogni $x \neq y$ si ha $x \notin \overline{\{y\}}$ oppure $y \notin \overline{\{x\}}$

"dati due punti distinti, almeno uno non appartiene alla chiusura dell'altro", cioè esiste un intorno di un punto che non contiene l'altro o viceversa.

T_1 (o FRÉCHET, ma non si usa perché in Analisi Sp. Fréchet = spazi metrici completi)

se per ogni $x \neq y$ esistono $U \in \mathcal{T}(x)$, $U \not\ni y$ e $V \in \mathcal{T}(y)$, $V \not\ni x$

sse i punti di X sono chiusi, cioè ogni $\{x\}$ è chiuso

sse $\mathcal{T}$ è maggiore o uguale alla TOPOLOGIA COFINITA (che è la più piccola topologia in cui tutti i punti sono chiusi)

Naturalmente $T_1 \Rightarrow T_0$, ma $T_0 \not\Rightarrow T_1$

per esempio $\{0,1\}$ con topologia di Sierpinski $\{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ è T_0 ma non T_1, perché $\{0\}$ è chiuso ma $\{1\}$ è aperto non chiuso.

T2 (o **HAUSDORFF**) se per ogni $x \neq y$ esistono $U \in \mathcal{T}(x)$, $V \in \mathcal{T}(y)$: $U \cap V = \emptyset$, cioè se "punti distinti hanno intorni disgiunti". (SEPARAZIONE DI PUNTI TRAMITE INTORNI DISGIUNTI)

Vi sono varie caratterizzazioni e proprietà importanti per T2:

$(X, \mathcal{T})$ T2 sse filtri (o reti) convergenti hanno un UNICO LIMITE

UNICITÀ DEI LIMITI

$\Rightarrow$ se $\exists$ filtro convergente a $x \neq y$, allora $\exists \supseteq \mathcal{T}(x) \cup \mathcal{T}(y)$, dunque $\exists \ni U, V$, quindi $\exists \ni U \cap V = \emptyset$ ↯

$\Leftarrow$ se X non è T2, esistono $x \neq y$ tali che $U \cap V \neq \emptyset$ $\forall U \in \mathcal{T}(x)$, $\forall V \in \mathcal{T}(y)$, e allora $\mathcal{T}(x) \cup \mathcal{T}(y)$ genera un filtro $\exists$ convergente a x e y, quindi i limiti non sono unici.

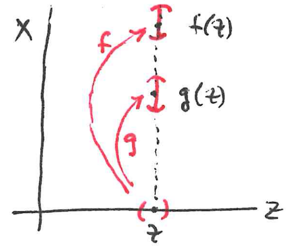
in particolare: funzioni continue con codominio HAUSDORFF sono uguali se lo sono su un DENSO del DOM.

$(X, \mathcal{T})$ T2 sse $\forall f, g : Z \rightrightarrows X$ continue, il luogo di coincidenza $\{z \mid fz = gz\}$ CHIUSO di Z

sse $\forall f : Z \to X$ continua il grafico $\Gamma(f) = \{(z, fz)\}$ è chiuso in $Z \times X$ (con top. prodotto)

sse $\Gamma(id)$ = diagonale $\subseteq X \times X$ chiuso (top prodotto).

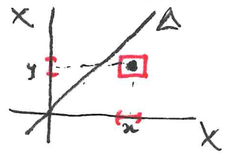
Infatti: se $(X, \mathcal{T})$ è T2, f, g continue, il complementare del luogo di coincidenze è aperto:



poi $\Gamma(f)$ = luogo di coincidenze di $Z \times X \rightrightarrows X$, $(z, x) \mapsto x$, $\mapsto f(z)$

poi id funzione continua,

infine se $\Delta = \Gamma(id)$ chiuso, $(x, y) \notin \Delta$, cioè $x \neq y$ troviamo $U \times V \subseteq X \times X$ con $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$ cioè $U \cap V = \emptyset$.



Naturalmente T2 $\Rightarrow$ T1, ma T1 $\not\Rightarrow$ T2:

per esempio $\mathbb{Z}$ con top. COFINITA, è T1 (punti sono chiusi) ma non T2 (due aperti non vuoti hanno sempre $\cap \neq \emptyset$).

Passiamo alle proprietà superiori: (X,τ) è:

(R) REGOLARE se per ogni $x \notin C$ chiuso
esistono $U \in \tau(x), V \in \tau(C) : U \cap V = \emptyset$
"punti e chiusi disgiunti hanno intorni disgiunti"

e vale sse gli intorni chiusi sono una
base per $\tau(x)$, cioè ogni intorno (aperto)
di x contiene un intorno chiuso di x,
cioè ogni intorno (aperto) di x contiene
un chiuso contenente un aperto contenente x.

SEPARAZIONE DI PUNTI E CHIUSI DISGIUNTI
TRAMITE – intorni disgiunti
– funzioni continue (reali)

(CR) COMPLETAMENTE REGOLARE se
per ogni $x \notin C$ chiuso esiste una
funzione continua $f : X \to [0,1]$: $f(x)=0$, $f(C)=1$

VEDREMO COME SI CARATTERIZZANO GLI SPAZI CR.

È FACILE vedere che $CR \Rightarrow R$,
il viceversa è falso, ma difficile dare controesempi.

T3 (o hausdorff regolare)
se è T0 e REGOLARE,
sse è T1 e REGOLARE,
sse è T2 e REGOLARE.

Cioè per SPAZI REGOLARI
abbiamo $T0 \Leftrightarrow T1 \Leftrightarrow T2$
perché se $x \neq y$ abbiamo
$y \notin \overline{\{x\}}$, quindi esistono
intorni di y e di $\overline{\{x\}}$ (quindi di x)
disgiunti
(e idem se $x \notin \overline{\{y\}}$)

$T3\frac{1}{2}$ (o TYCHONOFF)
se è T0 e COMPL. REGOLARE
sse è T1 e COMPL. REGOLARE
sse è T2 e COMPL. REGOLARE

$$\left(T3\tfrac{1}{2} \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} T3 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} T2 \right)$$

(N) NORMALE per ogni coppia C_1, C_2 di chiusi DISGIUNTI, esistono $U_i \in \mathcal{T}(C_i)$ DISGIUNTI, cioè $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

sse gli intorni chiusi sono base per gli intorni dei chiusi.

T4 o hausdorff normale
se è T1 e normale
sse è T2 e normale
sse è $T3\frac{1}{2}$ e normale

Vi sono due risultati importanti ma difficili per gli spazi normali:

LEMMA DI URYSHON X è normale sse per ogni coppia di chiusi disgiunti C_1, C_2 esiste una funzione continua $f: X \to [0,1]$: $f(C_1) = 0$, $f(C_2) = 1$.

(cioè separare chiusi disgiunti con "intorni disgiunti" o con "funzioni continue" è equivalente; quindi al termine "COMPLETAM. NORMALE" si dà un altro significato!)

LEMMA DI ESTENSIONE DI TIEZE : ogni funzione continua definita su un chiuso di uno spazio normale si estende a una funzione continua su X.

Ma attenzione : mentre sottospazi (con topologia indotta) di spazi che siano T0, T1, T2, T3, $T3\frac{1}{2}$, R, CR conservano questa proprietà, in generale sottospazi di N non restano normali, e uno spazio tale che tutti i suoi sottospazi sono normali si dice "COMPLETAMENTE NORMALE".

Prima di caratterizzare i CR facciamo un riassunto:

$$
\begin{tikzcd}
T0 \arrow[r, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}"] & T1 \arrow[r, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}"] & T2 \arrow[r, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}"] & T3 \arrow[r, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}"] \arrow[d, Rightarrow, shift right] & T3\tfrac{1}{2} \arrow[r, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}"] \arrow[d, Rightarrow, shift right] & T4 \arrow[d, Rightarrow, shift right] \\
(T0 = T1 = T2) & & & R \arrow[lll, Leftarrow] \arrow[u, Rightarrow, shift right, "T0"'] & CR \arrow[l, Rightarrow] \arrow[u, Rightarrow, shift right, "T0"'] \arrow[r, phantom, "\overset{\not\Leftarrow}{\not\Rightarrow}"] & N \arrow[u, Rightarrow, shift right, "T1"'] \arrow[r, Rightarrow] & (T1 = T2 = T3 = T3\tfrac{1}{2})
\end{tikzcd}
$$

per gli spazi pseudometrizzabili:

- sono sempre N
- sono T0 sse T1 sse T2 sse sono sp. METRIZZABILI

(quindi essere metrica è una proprietà topologica delle pseudometriche!).

di conseguenza: spazi non normali, oppure T0 non T1, oppure T1 non T2 non possono essere pseudometrizzabili!

E tutte le altre implicazioni sono false:

$\emptyset$: $\mathbb{R}$ con topologia gen. da $\{(-\infty,n),(-n,\infty) : n\in\mathbb{N}_{>0}\}$

$T0 \not\Rightarrow T1, T2, R, CR, N$: $\{0,1\}$ Sierpinski, $\mathbb{Z}$ top. incl. 0

$T0, T1 \not\Rightarrow T2, R, CR, N$: $\mathbb{Z}$ topol. cofinita

$T0, T1, T2 \not\Rightarrow R, CR, N$: $\mathbb{R}$ con $\tau(x) = \begin{cases} \text{soliti} & \text{se } x\neq 0 \\ U\setminus\{\frac{1}{n}\} & \text{se } x = 0 \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} T0, T1, T2, R \not\Rightarrow CR, N \\ T0, T1, T2, R, CR \not\Rightarrow N \end{array}\right\}$ difficili

$R, CR, N \not\Rightarrow T0, T1, T2$: topologia banale!

$N \not\Rightarrow T0, T1, T2, R, CR$: $\mathbb{R}$ con top $\{(-n,n) : n\in\mathbb{N}_{>0}\}$

$N, T0 \not\Rightarrow T1, T2, R, CR$: $\mathbb{Z}$ topol. escludente 0.

Anche in questo caso restano da studiare <u>le proprietà di stabilità</u> per le nozioni di separazione: per esempio

i quozienti di solito PERDONO le proprietà di separazione!

le proprietà di separazione si conservano passando a PRODOTTI e SOTTOSPAZI (ma <u>non</u> la normalità!)

T0, T1, T2 si conservano passando a topologie PIÙ FINI.
(le altre in generale no)

in generale nessuna proprietà di separazione si conserva passando a topologie più grossolane!

Gli spazi CR giocano un ruolo fondamentale in Topologia, perché tra l'altro si caratterizzano in questi modi equivalenti:

(1) X è CR (separazione di punti e chiusi disgiunti con funzioni continue $X \to [0,1]$)

(2) X ha la topologia debole della famiglia di funzioni $\mathcal{C}((X,\tau), \mathbb{R})$

(3) X ha la topologia definita da una famiglia di pseudometriche

(4) X è sottospazio di un prodotto di spazi pseudometrizzabili.

e se poi è T2, cioè T$3\frac{1}{2}$:

(5) X è sottospazio di $[0,1]^A$ (prodotto indiciato da un insieme A di copie di $[0,1]$)

<u>Nota</u>: usando la famiglia di pseudometriche, sugli spazi CR possiamo definire le nozioni "alla Cauchy" viste per gli spazi metrici in Analisi: questa è la classe di sp. topol. per cui hanno senso completezza, completamenti ecc

Per la <u>dimostrazione</u> vedremo $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Leftrightarrow 4$

ma si possono fare tutte le implicazioni direttamente (essenzialmente con gli stessi argomenti)

G2B 19/20 T64

Premesse: (X,τ) spazio topologico,

$\tau' :=$ topol. debole della famiglia $\mathcal{C}((X,\tau),\mathbb{R})$

allora $\tau' \leq \tau$ perché τ' è la minima topologia per una proprietà della topol. τ

(rendere continua quella famiglia di funzioni)

e τ' è generata da $f^{-1}(U)$ variando $f \in \mathcal{C}((X,\tau),\mathbb{R})$ e $U \in \tau_{\mathbb{R}}$.

risulta $\tau' = \tau$ sse i chiusi di τ sono (tutti e soli) gli zeri di funzioni continue $(X,\tau) \to \mathbb{R}$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sia U aperto di X (per τ) e mostriamo che $U \in \tau'$:

prendiamo $x_0 \in U$, allora $x_0 \notin C := X \setminus U$ (chiuso di X per τ) e usiamo ipotesi CR:

esiste $f: X \longrightarrow [0,1]$ continua con $f(x_0)=0$, $f(C) \equiv 1$,

quindi $f^{-1}([0,\frac{1}{2})) \subseteq U$,

cioè $U \supseteq$ aperto prebase di τ' (contenente x_0), quindi è intorno di x_0 per τ' (ogni $x_0 \in U$).

(2) $\Rightarrow$ (3) per ipotesi X ha la topologia τ definita dalla famiglia $\mathcal{C}((X,\tau),\mathbb{R})$,

definiamo la famiglia P di pseudometriche $d_f : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$, $d_f(x,y) := |fx - fy|$

al variare di $f \in \mathcal{C}((X,\tau),\mathbb{R})$.

ora basta confrontare le prebasi per le topologie τ e τ_P:

$f^{-1}(D(r_0,\varepsilon)) =$ e $D_{d_f}(x_0,\varepsilon) = \{y \in X : d_f(y,x_0) < \varepsilon\}$

$= \{y \in X : |f(y) - r_0| < \varepsilon\}$ $= \{y \in X : |f(y) - f(x_0)| < \varepsilon\}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) se X ha la topologia definita dalla famiglia $\wp$ di pseudometriche, mostriamo che è CR: per $x_0 \notin C$ chiuso, abbiamo $x_0 \in U := X \setminus C$ aperto, quindi $U \supseteq \bigcap_{d \in A} D_d(x_0, \varepsilon)$ con $A \subseteq \wp$ finito, quindi $f(x) := \max_{d \in A} d(x_0, x)$ è continua

$f(x_0) = 0$

$f(x) \geq \varepsilon \ \forall x \notin U$

e usiamo $\frac{1}{\varepsilon} \inf(f, \varepsilon)$.

Alternativa: $x_0 \notin C$ significa $\exists d \in \wp$, $d(x_0, C) =: \delta > 0$ e usiamo $\frac{1}{\delta} \inf(d(-, C), \delta)$ che è continua

$\equiv 0$ su C

1 su x_0.

Facciamo anche (3) $\Rightarrow$ (2):

per ogni $d \in \wp$, $\forall x \in X$ abbiamo $d_x : X \to \mathbb{R}$, $d_x(y) := d(x, y)$ continua, cioè $\{d_x\} \subseteq \mathscr{C}((X, \tau), \mathbb{R})$, quindi $\tau \subseteq \tau'$, quindi sono $=$.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) basta usare l'immersione diagonale $X \longrightarrow \prod_{d \in \wp} (X, \tau_d)$

e confrontare le prebasi della topol su X

e della topol indotta dalla topologia prodotto.

Infine: nel caso T2:

(5) $\Rightarrow$ (4) e T2 (sottospazio di prodotto di T2)

(2) o (3) $\Rightarrow$ (5) confrontando X con diagonale in I^A

dove $I = [0, 1]$ e $A = \mathscr{C}(X, I)$ nel caso (2),

$\{d_x : x \in X, d \in \wp \text{ limitate da } 1\}$ nel caso (3).

Vista la caratterizzazione degli spazi CR, conviene discutere la (pseudo)metrizzabilità di questi due casi:

Topologie definite da famiglie pseudometriche

prebase topologia: $D_d(x,\varepsilon)$ con $d\in\mathcal{P}$, $x\in X$, $\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}$

osservazione: possiamo rendere la famiglia $\mathcal{P}$ filtrante (in alto) usando il sup sulle parti finite di $\mathcal{P}$: allora otteniamo una base.

possiamo assumere che nessuna sottofamiglia di $\mathcal{P}$ definisce la stessa topologia.

(1) se $\mathcal{P}$ è finito, allora X è pseudometrizzabile usando $\delta(x,y)=\sup_{d\in\mathcal{P}} d(x,y)$ oppure $\sum_{d\in\mathcal{P}} d(x,y)$, oppure $\left(\sum d(x,y)^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ...

(2) se $\mathcal{P}$ è numerabile, allora X è pseudom. usando $\delta(x,y)=\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{d_i(x,y)}{2^i}$ sostituendo d_i con metriche equivalenti ≤ 1.

(3) se $\mathcal{P}$ non è numerabile, allora X non è pseudometrizzabile, ma è CR.

Topologie prodotto di spazi pseudometrizzabili

$X_\alpha=(X_\alpha,d_\alpha)$ spazi pseudometrici, $X=\prod X_\alpha$, la top prodotto ha prebase $\pi_\alpha^{-1}D(x_\alpha,\varepsilon_\alpha)$, quindi è definita dalle psmetriche $d_\alpha(x,y):=d_\alpha(\pi_\alpha(x),\pi_\alpha(y))$, ed è dunque CR.

(1) se A è finito, allora X è pseudometr.

(2) se A è numerabile, allora X è pseudometr. usando $\delta=\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{d_i}{2^i}$ con $d_i\leq 1$

(3) se A non è numerabile (e X_α non banali) allora X non è pseudometrizzabile, perché non è nemmeno C1.

G2B 19/20 T67

L'unico caso difficile da dimostrare è ii (2):
bisogna confrontare le topologie $\mathcal{T}$ definite dalle famiglie di $(i \in \mathbb{N})$ e $\mathcal{T}_\delta$ da δ:

aperto di prebase per $\mathcal{T}$ è
$$D_i(x,\varepsilon) = \{y \in X : d_i(x,y) < \varepsilon\}$$
e questo contiene
$$D_\delta\left(x, \frac{\varepsilon}{2^i}\right) = \left\{y \in X : \delta(x,y) < \frac{\varepsilon}{2^i}\right\}$$
perché
$$\delta(x,y) = \sum \frac{d_i(x,y)}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2^i}$$
implica
$$\frac{d_i(x,y)}{2^i} < \frac{\varepsilon}{2^i}$$
cioè $d_i(x,y) < \varepsilon$,
da cui $D_\delta\left(x, \frac{\varepsilon}{2^i}\right) \subseteq D_{d_i}(x,\varepsilon)$

e otteniamo $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_\delta$.

aperto di base per $\mathcal{T}_\delta$ è $D_\delta(x,\varepsilon) = \{y \in X : \delta(x,y) < \varepsilon\}$
e dobbiamo trovare un aperto (di base) per $\mathcal{T}$
che vi sia contenuto:
sia N tale che $\sum_{i>N} 1/2^i < \frac{\varepsilon}{2}$,
allora $\bigcap_{i=0}^{N} D_i\left(x, \frac{\varepsilon}{4}\right)$ è APERTO DI BASE per $\mathcal{T}$
ed è $\subseteq D_\delta(x,\varepsilon)$, infatti:
$$\delta(x,y) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{d_i(x,y)}{2^i}$$
$$= \sum_{i=0}^{N} \frac{d_i(x,y)}{2^i} + \sum_{i>N} \frac{d_i(x,y)}{2^i}$$
$$< \underbrace{\sum_{i=0}^{N} \frac{\varepsilon/4}{2^i}}_{= \frac{\varepsilon}{4} \sum_{i=0}^{N} 1/2^i} + \sum_{i>N} 1/2^i \qquad \text{(ipotesi e } d_i \le 1)$$
$$< \frac{\varepsilon}{4} \cdot 2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
dunque otteniamo $\mathcal{T}_\delta \subseteq \mathcal{T}$.

ESEMPIO IMPORTANTE: RETTA DI SORGENFREY.

Sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali usiamo la topologia $\mathcal{S}_d = \mathcal{S}$ = Sorgenfrey a dx generata da $[a,b)$ con $a<b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) (analogamente si definisce $\mathcal{S}_s$ = Sorgenfrey a sx).

Osservazioni iniziali:

- è più fine della topologia euclidea usuale di $\mathbb{R}$ (che indichiamo con $\mathcal{T} = \mathcal{T}_E$) perché $(a,b) = \bigcup_{\varepsilon>0} [a+\varepsilon, b)$: aperti di base di $\mathcal{T}$ sono aperti di $\mathcal{S}$, ma $[a,b) \notin \mathcal{T}$.
- $\mathcal{S}$ ha una base di CHIUSAPERTI, perché il complementare di $[a,b)$ è aperto di $\mathcal{S}$: $\mathbb{R} \setminus [a,b) = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ che sono aperti di $\mathcal{S}$: $(-\infty, a)$ è aperto di $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{S}$, $[b, +\infty) = \bigcup_n [b, b+n)$

  ma $\mathcal{S}$ non è la topol. discreta: i punti $\{x\}$ sono chiusi ma non aperti.
- ogni aperto di base è unione DISGIUNTA di aperti di base: $[a,b) = [a,c) \sqcup [c,b)$ $\forall c: a<c<b$.
- intorni di x: soltinsiemi che $\supseteq [x, x+\varepsilon)$ per qualche $\varepsilon > 0$.
- $[a, +\infty)$ è aperto di $\mathcal{S}$ e anche chiuso di $\mathcal{S}$ (perché chiuso di $\mathcal{T}$)

  $(a, +\infty)$ è aperto (di $\mathcal{T}$, quindi) di $\mathcal{S}$, ma non è chiuso di $\mathcal{S}$

  $(-\infty, a]$ è chiuso (di $\mathcal{T}$, quindi) di $\mathcal{S}$, ma non è aperto di $\mathcal{S}$ (non contiene intorni di a)

  $[a,b]$ è chiuso (di $\mathcal{T}$, quindi) di $\mathcal{S}$, ma non è aperto di $\mathcal{S}$ (non contiene intorni di b)

G2B 19/20 T681

GIUSTIFICAZIONE NON CORRETTA: PERCHÉ?

Vediamo le proprietà di numerabilità e separazione di $\mathcal{S}$:

Sorgenfrey è SEPARABILE: $\mathbb{Q}$ è denso perché interseca ogni aperto di base $[a,b)$.

Sorgenfrey è C1: per $x \in \mathbb{R}$: $[x, x+\frac{1}{n})$ con $n \in \mathbb{N}^*$ è base numerabile di intorni di x.

Sorgenfrey non è C2: se $[a_i, b_i)$ fosse base numerabile per $\mathcal{S}$, allora $[a,b)$ con $a \neq a_i \ \forall i$ non può essere unione di quelli di base! ⚠

Sia $\mathcal{B}$ base per $\mathcal{S}$: allora per $\forall x \in \mathbb{R}$ esiste $B_x \in \mathcal{B}$: $x \in B_x \subseteq [x, x+1)$ perché $[x,x+1)$ aperto $\mathcal{S}$, ma allora per $x \neq y$ si ha $B_x \neq B_y$ ($x<y \Rightarrow x \in B_x, \notin B_y$), quindi $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ non numerabile!)

Siccome è S e non C2, Sorgenfrey non è (pseudo)metrizzabile!

Sorgenfrey è T2 perché $\geq \mathcal{E}$ che è T2.

Sorgenfrey è T4 (e anzi tutti i suoi sottospazi sono NORMALI):

se A, B sono chiusi disgiunti di $\mathcal{S}$:

$A \subseteq X \setminus B$ aperto: $\forall a \in A, \exists [a, x_a) \subseteq X \setminus B$, definiamo $U := \bigcup_{a \in A} [a, x_a)$

$B \subseteq X \setminus A$ aperto: $\forall b \in B, \exists [b, y_b) \subseteq X \setminus A$, definiamo $V := \bigcup_{b \in B} [b, y_b)$

se fosse $U \cap V \neq \emptyset$: $\exists a, b$: $[a, x_a) \cap [b, y_b) \neq \emptyset$ e $a < b \Rightarrow b \in [a, x_a) \subseteq X \setminus B$

ma $b \in B$ ↯

dunque $U \cap V = \emptyset$.

Ora T4 $\Rightarrow$ T3½ $\Rightarrow$ CR, quindi Sorgenfrey è definito da una famiglia di pseudometriche! (evidentemente una famiglia NON numerabile, perché non è (ps)metrizzabile, ma per definire gli intorni di un fissato punto basta una metrica, per questo è C1, ma non C2...).

TERMINIAMO CON UN <u>RIASSUNTO DI PROPRIETÀ DEI SPAZI PSEUDOMETRICI</u> (= pm):

$$
\begin{tikzcd}
C1 & CR, C1 \arrow[d, Rightarrow] & (T0 \Leftrightarrow T1 \Leftrightarrow T2 \Leftrightarrow m) & \\
 & pm \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & CR \arrow[r, Rightarrow] & R \\
(S \Leftrightarrow C2) & pm, S \arrow[u, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & N & \\
 & CR, C2 & &
\end{tikzcd}
$$