G2B 19/20 T70

VEDIAMO LE PROPRIETÀ DI CONNESSIONE per SPAZI TOPOLOGICI:

schema generale così:

CONNESSIONE — CONNESSIONE PER ARCHI

LOCALE CONNESSIONE — LOCALE CONNESSIONE PER ARCHI

COMPONENTI CONNESSE — COMPONENTI CONNESSE PER ARCHI

TOTALE SCONNESSIONE — TOTALE SCONNESSIONE PER ARCHI.

ma naturalmente ci sono molte variazioni possibili su queste nozioni.

G2B 19/20 T71

(X, τ) SPAZIO TOPOLOGICO:

Una SCONNESSIONE di X è un chiusaperto non banale (i.e. $\neq \emptyset, X$) di X.

Lo spazio X è CONNESSO se non ha sconnessioni

Condizioni equivalenti in termini di sottinsiemi:

(1) X non è unione disgiunta di aperti non banali

La negazione di (1) è equivalente a una sconnessione

(2) se $X = A \sqcup B$ allora $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ oppure $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ (almeno uno interseca la chiusura dell'altro) con A, B non banali.

La negazione di (2) è $X = A \sqcup B$ con $A \cap \overline{B} = \emptyset = \overline{A} \cap B$ da cui $\overline{B} = B$, $\overline{A} = A$, cioè A, B aperti.

Condizioni equivalenti in termini di funzioni:

(1) Ogni funzione continua da X verso uno spazio DISCRETO è COSTANTE.

(2) Ogni funzione continua da X verso $\mathbb{R}$ (con topol. usuale) con valori positivi e negativi deve avere uno zero.

infatti, antimmagini di aperti disgiunti per funzioni continue danno sconnessioni (se non sono vuote)

Per fare dimostrazioni sulle proprietà di connessione spesso si ragiona per assurdo, essendo la definizione in negativo ("non esistono sconnessioni"), ma di solito è più facile usando il criterio delle funzioni continue verso discreti.

Come esempio, ricordiamo il caso della RETTA REALE con topol. usuale:
si ha $S \subseteq \mathbb{R}$ connesso sse S CONVESSO (sse S è intervallo generalizzato)
cioè S SCONNESSO sse S SCONVESSO, e l'implicazione non ovvia usa l'esistenza del sup:

se S sconnesso, $S = A \cup B$ con A, B aperti disgiunti non vuoti, sia $a \in A$, $b \in B$

poniamo $\xi = \sup([a,b] \cap A)$. Da $\begin{cases} \bar{A} \cap B = \emptyset \\ A \cap \bar{B} = \emptyset \end{cases}$ abbiamo $\begin{cases} \xi \in \bar{A} \Rightarrow \xi \notin B \\ \xi \in \bar{B} \Rightarrow \xi \notin A \end{cases}$

quindi $\xi \notin A \cup B$, quindi S è sconvesso.

se S sconvesso, siano $a, b \in S$, $\xi \notin S$ con $a < \xi < b$: allora abbiamo

$$S = S \cap \mathbb{R} = S \cap ((-\infty, \xi) \cup (\xi, +\infty)) = \underbrace{S \cap (-\infty, \xi)}_{\ni a} \sqcup \underbrace{S \cap (\xi, +\infty)}_{\ni b}$$ aperti (disgiunti) $\neq \emptyset$ di S

quindi S è sconnesso.

In $\mathbb{R}^n$ invece, con topologia usuale, abbiamo

convesso $\Rightarrow$ connesso per archi $\Rightarrow$ connesso
$\parallel$
"per ogni coppia di punti il segmento è contenuto nell'insieme,
cioè l'insieme è chiuso per SOMME BARICENTRICHE DI PUNTI"

ma non viceversa: per esempio L è connesso (anche per archi) di $\mathbb{R}^2$,
ma non convesso.

Invece in $\mathbb{Q}$ ogni sottinsieme non banale è sconnesso: se $S \ni a, b$ ($\in \mathbb{Q}$), sia $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ con $a < \xi < b$: allora $S = (S \cap (-\infty, \xi)) \sqcup (S \cap (\xi, +\infty))$ aperti disgiunti non vuoti.

Altri esempi:

Spazi con topologia banale sono sempre connessi.

Spazi con topologia discreta sono sempre sconnessi (se hanno almeno 2 punti!)

Spazi in cui due aperti non vuoti hanno intersezione non vuota sono sempre connessi (si dicono IPERCONNESSI, per esempio un insieme infinito con topologia cofinita ha questa proprietà).

Spazi in cui due chiusi non vuoti hanno intersezione non vuota sono sempre connessi (si dicono ULTRACONNESSI).

problema: mostrare che ci sono spazi iperconnessi ma non ultraconnessi e viceversa ci sono spazi ultraconnessi ma non iperconnessi.

problema: in un insieme totalmente ordinato, usando la topologia dell'ordine, abbiamo: connesso sse non ci sono elementi consecutivi per l'ordine e ogni insieme limitato ha sup (estremo superiore).

Vediamo alcune proprietà di stabilità della connessione:

nota: di solito sottoinsiemi di connessi (con top. indotta) **non** sono connessi.

Le immagini continue di connessi sono connesse (X conn. $f: X \to Y$ cont $\Rightarrow f(X)$ conn.)

perché immagini inverse di sconnessioni sono sconnessioni ($f(X)$ sconn. $\Rightarrow X$ sconnesso);

oppure perché funzioni continue $f(X) \to$ DISCRETO danno funzioni continue $X \to f(X) \to$ DISCRETO, e quindi sono COSTANTI.

nota viceversa falso: $f(X)$ può essere connesso e X no.

La chiusura di un insieme connesso è connessa ($S \subseteq X$, S connesso $\Rightarrow \overline{S}$ connesso)

perché se $f: \overline{S} \to$ DISCRETO è continua, allora è continua su S, quindi costante su S, e per continuità costante su $\overline{S}$ ($x \in \overline{S}$, $\exists$ rete in S: $s_\alpha \to x$, quindi $\underbrace{f(s_\alpha)}_{\text{costanti}} \to f(x)$).

oppure: se ho sconnessione $\overline{S} = A \cup B$ allora $S = S \cap \overline{S} = (S \cap A) \cup (S \cap B)$, ma bisogna dimostrare che $S \cap A$ e $S \cap B$ sono $\neq \emptyset$ (per dire che allora S ha sconnessione).

Conseguenza: se S connesso e $S \subseteq T \subseteq \overline{S}$ allora anche T è connesso.

nota: la chiusura può essere connessa senza che l'insieme lo sia ($\overline{S}$ conn $\not\Rightarrow S$ conn), per esempio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ sconnesso, ma $\overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathbb{R}$ connesso.

NOTA: l'INTERNO di un insieme connesso di solito **non è connesso**.

nota : di solito l'unione di connessi non è connessa,

ma se hanno intersezioni non $\emptyset$ due a due, oppure intersezione totale non $\emptyset$, allora sì.

I quozienti di spazi connessi sono connessi (perché immagini continue),

ma il viceversa è falso : un quoziente può essere connesso senza che lo spazio iniziale lo sia

(però : quoziente connesso e fibre connesse $\Rightarrow$ spazio iniziale connesso).

I prodotti di spazi topologici sono connessi sse tutti i fattori sono connessi.

Un verso è ovvio : se il prodotto è connesso, i fattori sono immagini continue del prodotto, quindi connessi.

Viceversa, se ogni X_α è connesso, fissato $x \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, l'insieme $\{ y \in \prod_\alpha X_\alpha : y_\alpha = x_\alpha \ \forall\forall \alpha \in A \}$ è connesso (perché unione di connessi con $\cap$ non vuota) e denso (perché interseca ogni aperto della topologia prodotto).

Qui è importante ricordare come sono fatti gli aperti di base della topologia prodotto : sono prodotto in cui per un numero finito di indici abbiamo APERTI degli spazi, e in tutti gli altri indici l'intero spazio :

$\prod_\alpha U_\alpha \subseteq \prod_\alpha X_\alpha$ tali che $U_\alpha = X_\alpha \ \forall\forall \alpha$:

per un punto dello spazio basta soddisfare un numero finito di condizioni per appartenere ad un aperto !

Chiamiamo <u>COMPONENTI CONNESSE</u> di uno spazio topologico X i suoi sottoinsiemi <u>connessi e massimali per l'inclusione</u>:
chiaramente X è unione disgiunta delle sue componenti connesse

Le componenti connesse <u>sono chiusi di X</u> (perché chiusura di connessi è connesso e $\supseteq$)
ma non sono necessariamente aperti: le c.c. di $\{0, \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \mathbb{R}$ ha come cc. i punti, ma $\{0\}$ è chiuso e non aperto di questo insieme.
Però: se U è un chiusaperto connesso di X, allora è una comp. connessa di X.

Uno spazio è connesso <u>sse</u> ha una sola componente connessa (banale)
Uno spazio si dice <u>TOTALMENTE SCONNESSO</u> se le sue comp. connesse sono i punti
(cioè se ogni insieme con almeno 2 punti è sconnesso)
Le topologie DISCRETE sono totalmente sconnesse, ma non è necessario:
$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ con la topol. usuale non è discreto ed è totalmente sconnesso.

<u>problema</u>: le comp. connesse di un prodotto sono i prodotti delle comp. connesse dei fattori.

Uno spazio topologico si dice LOCALMENTE CONNESSO se ogni punto ha una base di intorni connessi, o equivalentemente:

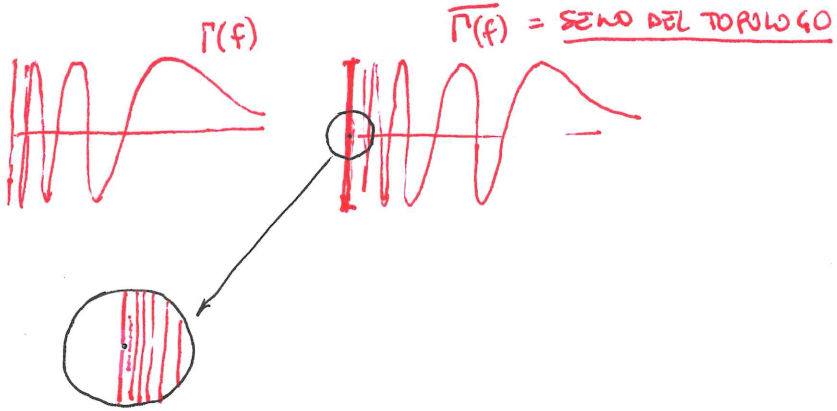
(1) gli aperti connessi sono una base per la topologia

e quindi una base di intorni APERTI connessi: per ogni aperto contenente il punto la comp. conn. che contiene il punto è APERTA (usando che TUTTI i suoi punti hanno int. conn. base).

(2) Le componenti connesse di aperti sono aperte

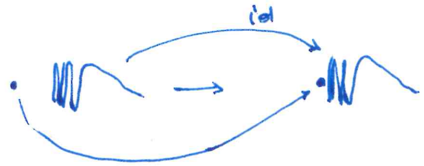
Se X è localmente connesso, allora le comp. connesse di X sono aperte, dunque chiusaperte: se una c.c. contiene $x \in X$ deve contenere un intorno (connesso) di x, altrimenti non sarebbe massimale per connessione

Il viceversa è falso; non ci sono relazioni tra connessione e locale connessione:
l'unione disgiunta di spazi loc. connessi è loc. connessa, ma non è connessa.
il grafico di $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ per $x>0$ è connesso (e loc. connesso perché omeomorfo a $\mathbb{R}_{>0}$), quindi la sua chiusura è connessa, ma non localm. connessa (e ha una sola comp. connessa, chiusaperta)



La proprietà di locale connessione è più delicata e meno stabile della connessione:

sottospazi di loc. connessi di solito <u>non restano</u> loc. conn. (esempio $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ con topol. usuali)

immagini continue di loc conn. di solito non lo sono
(ma continue e aperte sì). (es. )

La chiusura di loc. conn. di solito non lo è. (es. $\underbrace{\{1/n\}}_{\substack{\text{DISCRETO}\\ \text{(LOC. CONN.)}}} \subseteq \overline{\{1/n\}} = \underbrace{\{0, 1/n\}}_{\substack{\text{qui 0 NON HA}\\ \text{INTORNI CONNESSI.}}} \subseteq \mathbb{R}$)

<u>invece</u>:

quozienti di loc. connessi sono loc. connessi (non viceversa)

un prodotto è loc. connesso sse <u>tutti i fattori sono loc. connessi</u> e <u>quasi tutti connessi</u>.

$\Rightarrow$ i fattori sono loc. conn. perché immagini continue e APERTE,
e se ci fossero infiniti fattori non connessi, tutti gli aperti ~~di base~~ sono sconnessi

$\Leftarrow$ ogni aperto di base contenente un punto contiene un aperto di base CONNESSO
contenente il punto: basta "restringerlo" in un numero finito di fattori
(per gli indici α per cui π_α(aperto) non è già connesso: e per un numero
finito è tutto lo stesso fattore).

C'è una nozione più forte di connessione, che coinvolge la topologia della retta reale $\mathbb{R}$:

Uno spazio topologico (X, τ) si dice <u>CONNESSO PER ARCHI</u> se

per ogni $x, y \in X$ esiste funzione continua $\gamma : I = [0,1] \to X$ con $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$

(tale funzione si dice "ARCO CONTINUO in X da x a y").

<u>Nota</u>: nel dominio $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ si usa la topologia usuale di $\mathbb{R}$

⚠ da <u>non confondere</u> con le proprietà di separazione tramite funzioni $X \to [0,1]$

Conviene notare subito: connesso per archi $\Rightarrow$ connesso

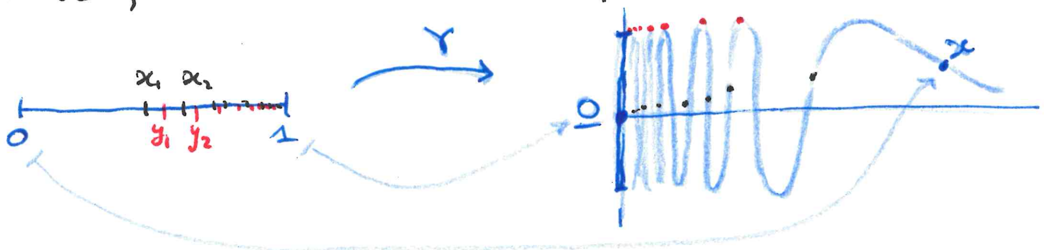
quindi: se <u>non</u> è connesso <u>non</u> può essere conn. per archi

perché archi continui tra punti di comp. conn. distinte di X darebbero sconnessione di I.

Ma $\not\Leftarrow$, e controesempio classico è il seno del topologo, cioè <u>chiusura in $\mathbb{R}^2$</u>

del grafico di $\sin \frac{1}{x}$ per $x > 0$: essendo chiusura di connesso (grafico omeo $\mathbb{R}$)

è connesso, ma non connesso per archi:



per continuità di γ, usando intorni piccoli di $\underline{0}$ in $\mathbb{R}^2$, troviamo

una successione $x_n \to 1$ (in $\mathbb{R}$) tale che $\gamma(x_n) \to \underline{0}$ (nel seno topologo $\subseteq \mathbb{R}^2$),

ma per il teorema valor medio, troviamo y_n con $x_n \leq y_n \leq x_{n+1}$, quindi $y_n \to 1$, con $\gamma(y_n) \to \binom{0}{1}$

ASSURDO!

Vi sono alcune osservazioni ovvie:

i SOTTOSPAZI di conn. per archi di solito non sono connessi per archi (nemmeno connessi)

le chiusure di conn. per archi di solito non lo è: il seno del topologo è controesempio.

E alcune stabilità facili:

immagini continue di conn. per archi lo sono (basta comporre archi continui con funzioni)

unioni di conn. per archi con intersezioni due a due (o tutti insieme) $\neq \emptyset$ resta conn. per archi
(basta fare composizione di archi continui).

i quozienti di conn. per archi lo restano (viceversa falso!).

Un prodotto è connesso per archi sse tutti i fattori sono connessi per archi.

$\Rightarrow$ i fattori sono immagini continue

$\Leftarrow$ dati x, y nel prodotto, cammini continui γ_α da $\pi_\alpha(x)$ a $\pi_\alpha(y)$ formano un arco continuo γ nel prodotto da x a y (γ è continuo perché composto con ogni proiezione risulta continuo)

$$\begin{tikzcd}
X = \prod_\alpha X_\alpha \arrow[r, "\pi_\alpha"] & X_\alpha \\
{[0,1]} \arrow[u, dashed, "\gamma"] \arrow[ur, "\gamma_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

Conviene forse qualche esempio per capire che la connessione per archi dipende (ovviamente) molto dalla topologia di X :

- se $X = \{0, 1\}$ con topol. Sierpinski $\{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$ allora è connesso e anche connesso per archi : $[0,1] \xrightarrow{\gamma} X$, $\gamma(x) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 1 & x>0 \end{cases}$ è continua!

- se X è ULTRACONNESSO (cioè due chiusi non vuoti hanno sempre intersezione $\neq \emptyset$) allora è connesso per archi : per ogni $x, y \in X$ troviamo $z \in \overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$ e vediamo che l'arco $[0,1] \xrightarrow{\gamma} X$, $\gamma(\varepsilon) = \begin{cases} x & \varepsilon < \frac{1}{2} \\ z & \varepsilon = \frac{1}{2} \\ y & \varepsilon > \frac{1}{2} \end{cases}$ è continuo (controllo: γ^{-1}(chiusi) è chiuso).

- Se X è IPERCONNESSO (cioè due aperti non vuoti hanno sempre intersezione $\neq \emptyset$) allora è connesso, ma non necessariamente connesso per archi.

G2BR/20 ~~T82~~

Chiamiamo <u>COMPONENTI CONNESSE PER ARCHI</u> i sottinsiemi connessi per archi e massimali (insiemisticamente) per tale proprietà.

<u>Nota</u>: di solito non sono né chiuse né aperte: per esempio il seno del topologo ha due comp. conn. per archi, una aperta (e non chiusa) e una chiusa (non aperta).
Per avere un esempio in cui le ccxa non sono né chiuse né aperte, si consideri il toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (quoziente algebrico con topologia quoziente) e l'immagine ℓ di una retta di $\mathbb{R}^2$ con pendenza irrazionale: allora $\mathbb{T}\setminus\ell$ ha infinite ccxa, nessuna delle quali chiusa o aperta.

Che relazioni ci sono con le componenti connesse dello spazio?
Ogni ccxa è contenuta in una cc dello spazio (in quanto connessa), e quindi ogni cc è unione (disgiunta) di ccxa.

<u>problema</u>: componenti connesse per archi di un prodotto?

Naturalmente, "essere connesso per archi" equivale ad "avere una sola ccxa".

Invece uno spazio si dice <u>TOTALMENTE SCONNESSO PER ARCHI</u> se le sue ccxa sono i suoi punti (cioè se non esistono archi continui non costanti).

Si vede subito che TOTALM. SCONNESSO $\Rightarrow$ TOTALM. SCONNESSO PER ARCHI (perché le ccxa sono contenute nelle cc, e queste sono già dei punti).

Ma $\not\Leftarrow$: per esempio $\mathbb{Z}$ con la topologia cofinita è iperconnesso, dunque connesso, ha una sola comp. connessa, ma è totalmente arco-sconnesso.

Uno spazio topologico si dice <u>LOCALMENTE CONNESSO PER ARCHI</u> se <u>ogni punto ha una base di intorni connessi per archi</u>, o equivalentemente:

e quindi una base di intorni APERTI e connessi per archi.

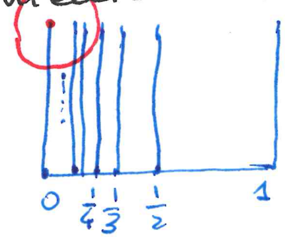
(1) gli aperti arco connessi sono una base della topologia

(2) le comp. arco-connesse di aperti sono aperte

Se X è localm. arco-connesso, allora le comp. connesse per archi <u>sono aperte</u>, e quindi <u>chiuso-aperte</u> (perché il complementare di una comp. arco connessa è <u>UNIONE</u> DELLE ALTRE)

<u>Viceversa falso</u>, come pure non c'è alcuna implicazione tra connesso per archi e localmente connesso per archi:

Il pettine del topologo:



$\subseteq \mathbb{R}^2$ con top. indotta

è chiaramente conn. per archi, ma non localmente, come si vede dai punti sopra 0.

<u>NOTA</u>: questo non funziona per le <u>chiusure</u> delle comp. connesse: è vero che il complementare di una cc. è unione disgiunta delle altre, una unione arbitraria di chiusi di solito <u>non</u> è chiuso, quindi non si può concludere che una cc sia aperta, così

Il risultato più importante sulla locale conness. per archi è questo

se X è loc. arco-connesso $\Rightarrow$ "X connesso sse X arcoconnesso"

cioè per spazi loc. arcoconnessi le proprietà connessione e arcoconnessione sono equivalenti.

Naturalmente basta mostrare che connesso e loc. arcoconnesso implica arcoconnesso, e si può fare direttamente (piccolo problema!).

oppure ragionando sulle componenti connesse: le comp. arcoconnesse sono dei chiusaperti (connessi), quindi sono sconnessioni, e quindi se X è loc. conn. per archi le comp. arco connesse coincidono con le componenti connesse; in particolare se lo spazio è connesso c'è una sola cc, quindi una sola cc×a e quindi è arcoconnesso.

Le stabilità delle locale connessione per archi sono di solito poche:

sottospazi di loc. conn. a. in generale non lo sono

immagini continue di loc. conn. per archi in generale non lo sono

(ma continue e aperte sì)

la chiusura nemmeno

Invece:

quozienti di loc. conn. per archi lo sono (ma non viceversa)

un prodotto è loc. conn. per archi sse tutti i fattori sono loc. conn. per archi

e quasi tutti connessi per archi.

Trovare esempi e controesempi!

Infine notiamo esplicitamente che loc. conn. per archi $\Rightarrow$ loc. connesso,

ma $\not\Leftarrow$ (è falso): vi sono spazi localm. connessi, ma non per archi

Vi sono anche spazi connessi, loc. conn. e TOTALM. ARCO SCONNESSI (dunque né cxa né lcxa):

$\mathbb{N}$ con topologia cofinita (difficile)

$\mathbb{R}$ con topologia conumerabile (se γ è arco continuo, $\gamma^{-1}\gamma([0,1]\cap\mathbb{Q}) = [0,1]$,

quindi $\gamma([0,1]) \subseteq$ insieme numerabile, quindi in una cc, quindi costante)

Possiamo terminare riempiendo lo schema iniziale:

CONNESSI $\Longleftarrow$ CONNESSI PER ARCHI

CONNESSI $\overset{\text{seno topologo}}{\not\Longrightarrow}$ CONNESSI PER ARCHI

CONNESSI $\not\Downarrow$ LOC. CONNESSI (seno topol.)

LOC. CONNESSI $\not\Uparrow$ CONNESSI

CONNESSI PER ARCHI $\not\Downarrow$ LOC. CONN. PER ARCHI (pettine topologo)

LOC. CONN. PER ARCHI $\not\Uparrow$ CONNESSI PER ARCHI

LOC. CONNESSI $\Longleftarrow$ LOC. CONN. PER ARCHI

LOC. CONNESSI $\not\Longrightarrow$ LOC. CONN. PER ARCHI

$\mathbb{N}$ cofinito, $\mathbb{R}$ conumerabile

LOC. CONN. PER ARCHI $\Longrightarrow$ (CONN $\Longleftrightarrow$ CONN. ARCHI)

$\Longrightarrow$ (CC = CCxA)

COMP. CONNESSE: CHIUSE
APERTE se LC
(unioni di ccxa).

COMP. CONN. PER ARCHI: (CHIUSE) APERTE se LCxA
(contenute nelle cc)

TOTALE SCONNESSIONE $\Longleftarrow$ TOTALE SCONNESSIONE x ARCHI

TOTALE SCONNESSIONE $\not\Longrightarrow$ TOTALE SCONNESSIONE x ARCHI

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ è tot. sconnesso NON DISCRETO!

TOTALE SCONNESSIONE $\not\Downarrow$ TOP. DISCRETA

TOP. DISCRETA $\Uparrow$ TOTALE SCONNESSIONE

Cosa si può dire della top. banale?

Per divertimento, vediamo/ricordiamo qualche applicazione della connessione:

- per $I = [0,1]$ ricordiamo: $f : I \to \mathbb{R}$ continua: $f(0)f(1) < 0 \Rightarrow \exists t : f(t) = 0$

  $f : I \to I$ continua $\Rightarrow \exists t : f(t) = t$

  (basta usare $f(t) - t$ se $f(0) \neq 0$ e $f(1) \neq 1$)

•• per funzioni con dominio $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ sono equivalenti (e veri):

(a) $f : S^1 \to \mathbb{R}$ continua $\Longrightarrow \exists x \in S^1 : f(x) = f(-x)$

(b) $f : S^1 \to \mathbb{R}$ continua e antipodale $(= \forall x : f(-x) = -f(x)) \Longrightarrow \exists y \in S^1 : f(y) = 0$

(c) non esistono funzioni continue antipodali $S^1 \to S^0 = \{\pm 1\} \subseteq \mathbb{R}$.

certamente (c) è vera, poi:

(a) $\Rightarrow$ (b) per (a) esiste x tale che $f(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{per (b)} \\ f(-x) & \text{per (a)} \end{cases}$, quindi $f(x) = 0$

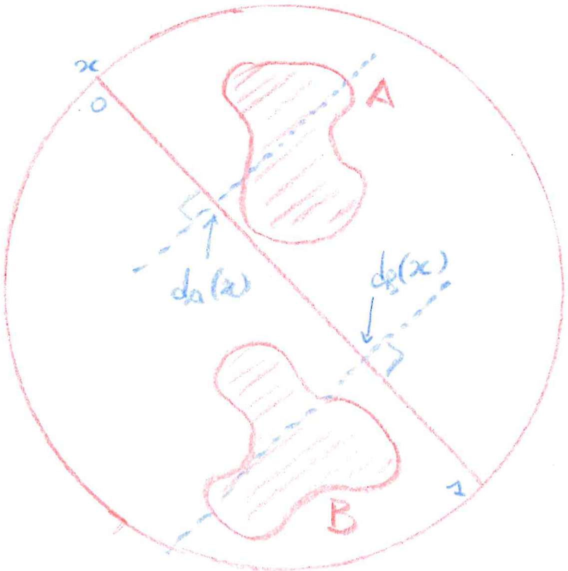
(b) $\Rightarrow$ (a) perché $g(x) = f(x) - f(-x)$ continua e antipodale

$\neg$(c) $\Rightarrow \neg$(b) evidentemente

$\neg$(a) $\Rightarrow \neg$(c) se $f : S^1 \to \mathbb{R}$ continua con $f(x) \neq f(-x)$ $\forall x$, allora $\dfrac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$

è continua antipodale, valori $\{\pm 1\}$

APPLICAZIONE: con un solo taglio dividere esattamente a metà due torte, dove: TORTE = compatto non nec. conn $\subseteq \mathbb{R}^2$
TAGLIO = rette di $\mathbb{R}^2$.



Usiamo un disco che $\supseteq$ le torte (per compattezza), e per ogni diametro troviamo le rette ortogonali al diametro che dimezzano A e B:

$d_A : S^1 \longrightarrow [0,1]$ $\qquad d_A(x) = \begin{cases} \text{punto di dimezzamento se unico} \\ \frac{a+b}{2} \text{ se } [a,b] \text{ intervallo in cui si fa dimezzamento.} \end{cases}$

$d_B : S^1 \longrightarrow [0,1]$

Allora chiaramente $d_A(-x) = 1 - d_A(x)$

Definiamo $d : S^1 \to \mathbb{R}$ con $d := d_A - d_B$
che è antipodale: $d(-x) = d_A(-x) - d_B(-x) = 1 - d_A(x) - (1 - d_B(x)) = d_B(x) - d_A(x) = -d(x)$
quindi $\exists\, y \in S^1$ tale che $d(y) = 0$, cioè $d_A(y) = d_B(y)$,
cioè un diametro y tale che la retta ortogonale per $d_A(y)$ dimezza A e B.

Nel corso di topologia si generalizza in dimensione 3 e superiori:
in dimensione 3 afferma che un samurai con un colpo di katana può tagliare a metà (esattamente) tre avversari.