ARGOMENTO DI QUESTA SETTIMANA: **COMPATTEZZA** per spazi topologici
e **LOCALE COMPATTEZZA**

Vi sono poi due importanti argomenti associati:

INTERAZIONE TRA PROPRIETA' DI SEPARAZIONE E DI COMPATTEZZA:
le topologie compatte tendono ad avere forti proprietà di separazione!

possibilità di **COMPATTIFICARE UNO SPAZIO** topologico,
cioè di associare ad ogni spazio topologico uno spazio compatto
in modo più o meno canonico, con proprietà più o meno forti,
vedremo certamente la "compattificazione di Alexandroff",
e tempo permettendo quella di Stone-Čech, che sono in
un certo senso minima e massima compattificazioni possibili.

Vi sono anche **altre nozioni** di compattezza, tipo "NUMERABILMENTE COMPATTO"
e "SEQUENZIALMENTE COMPATTO" in generale diverse, ma che
coincidono con la compattezza nel caso pseudometrizzabile.

Uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ si dice <u>COMPATTO</u> <u>se</u>

<u>OGNI RICOPRIMENTO APERTO</u> ammette un <u>SOTTORICOPRIMENTO FINITO</u>

$\left(\forall \text{ famiglia } U_\alpha \in \mathcal{T}, \text{ per } \alpha \in A, \ \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = X \Rightarrow \exists\, I \subseteq A, I \text{ finito} : \ X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \right).$

passando ai complementari : <u>sse</u>

<u>OGNI FAMIGLIA DI CHIUSI</u> con INTERSEZIONE $\emptyset$ ha una <u>SOTTOFAMIGLIA FINITA</u> con INTERS. $\emptyset$

$\left(\forall \text{ famiglia } C_\alpha \in \mathcal{C}, \text{ per } \alpha \in A, \ \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha = \emptyset \Rightarrow \exists\, I \subseteq A, I \text{ finito} : \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha = \emptyset \right)$

che, letto al contrario, si dice "<u>PROPRIETÀ DELLE INTERS. FINITE per i CHIUSI</u>" : <u>sse</u>

PER OGNI FAMIGLIA DI CHIUSI : se le intersezioni finite sono $\neq \emptyset$,
allora le intersezione di tutta la famiglia è $\neq \emptyset$.

Questa ultima caratterizzazione permette di descrivere la compattezza
in termini di filtri, e quindi anche di reti :
in ogni filtro le intersezioni finite sono $\neq \emptyset$,
e quindi si può applicare la proprietà di <u>chiusi dei filtri</u>,
che dà la condizione di avere <u>punti aderenti</u> !

Uno spazio è compatto sse

OGNI FILTRO (OGNI RETE) in X ha PUNTI ADERENTI

e ricordando che i punti aderenti sono LIMITI DI SOVRAFILTRI (SOTTORETI):

OGNI FILTRO in X ha SOVRAFILTRI CONVERGENTI

(OGNI RETE in X ha SOTTORETI CONVERGENTI)

e infine, ricordando la nozione di ultrafiltro come filtro massimale:

OGNI ULTRAFILTRO in X CONVERGE

(OGNI ULTRARETE in X CONVERGE)

Un sottoinsieme di uno spazio topologico si dice compatto se lo è con la topologia indotta.

Di solito non è facile capire se uno spazio è compatto, o quali sono i suoi compatti.

Ma, naturalmente, OGNI INSIEME FINITO è COMPATTO!

Esempi: la topologia banale è sempre compatta,

uno topologia discreta è compatta sse è finita

(in uno spazio con topologia banale, TUTTI i sottoinsiemi sono compatti,

in uno spazio con topologia discreta, SOLO i sottoinsiemi finiti sono compatti)

E' utile fare subito queste osservazioni:

più fine la topologia, meno sono i compatti:

se $\mathcal{T} \geq \mathcal{T}'$ allora i compatti per $\mathcal{T}$ sono compatti per $\mathcal{T}'$,

quindi $\{\mathcal{T}\text{-compatti}\} \subseteq \{\mathcal{T}'\text{-compatti}\}$

ma ci sono <u>topologie diverse con gli stessi compatti</u>:

quindi i sottinsiemi compatti <u>NON</u> determinano la topologia

per esempio:

topologia discreta e topologia includente di un punto:

in entrambi i casi compatti = finiti.

topologia banale e topologia finita: compatti = tutti.

Quali sono i compatti di una topologia cofinita o conumerabile?

Uno spazio con topologia escludente di un punto è compatto?

chi sono i suoi sottinsiemi compatti?

Per la <u>RETTA REALE con TOPOLOGIA USUALE</u> vale il teorema HEINE-BOREL:
<u>i COMPATTI di $\mathbb{R}^n$ sono i CHIUSI LIMITATI (per la METRICA EUCLIDEA</u>).

questo teorema è stato visto in Analisi, ma qui facciamo notare che <u>NON</u> è un teorema topologico: la proprietà di essere <u>CHIUSO</u> è topologica ma la proprietà di essere <u>LIMITATO</u> dipende dalla <u>metrica</u>: due metriche $\neq$ possono dare la stessa topologia e <u>non</u> avere gli stessi limitati!

per esempio $d/1+d$ è metrica che dà la stessa topologia, ma <u>TUTTI gli insiemi sono LIMITATI</u>.

Altro esempio: ($\mathbb{R}$, discreta) è metrizzabile con la metrica discreta

chi sono i compatti? chi sono i chiusi limitati?

<u>Nota generale</u>: una proprietà definita tramite una pseudometrica si dice <u>topologica</u> se dipende solo dalla topologia associata, e non dalla pseudometrica usata nella definizione:

per esempio "essere una metrica" è proprietà topologica (sse topol. è T2), mentre "lo spazio è limitato" no, dipende dalla pseudometrica.

Vediamo alcune proprietà della compattezza:

LE IMMAGINI CONTINUE DI COMPATTI SONO COMPATTE

($f: X \to Y$ continua, $K \subseteq X$ compatto $\Rightarrow$ $f(K)$ compatto di Y)

dimostrazione ovvia usando i ricoprimenti aperti.

importanza del risultato: assieme al teorema Heine-Borel

permette di dire che se $f: X \to \mathbb{R}$ è continua, e X è compatto, allora f ammette massimo e minimo ($f(X)$ compatto, cioè chiuso e limitato di $\mathbb{R}$)

cioè il teorema di Weierstrass vale per spazi topologici compatti.

Nota invece che le controimmagini di compatti (per funzioni continue) non sono compatti di solito!

Le mappe con questa proprietà sono speciali e si dicono PROPRIE o COMPATTE.

Altre proprietà importanti:

<u>i CHIUSI DI COMPATTI SONO COMPATTI</u>

dimostrazione facile usando i ricoprimenti aperti: se X è compatto e $C \subseteq X$ chiuso, dato un ricoprimento aperto di C basta aggiungere $X \setminus C$ (che è aperto perché C chiuso) per avere un ricoprimento aperto di X, che quindi ha un sottoricoprimento finito (che ricopre anche C).

In generale però <u>non è detto</u> che i COMPATTI siano CHIUSI dello spazio: per esempio nella topologia banale tutti sono compatti, ma quasi nessuno è chiuso.

altro esempio: se usiamo su $\mathbb{R}$ la topologia $\{(-\infty, n] \text{ con } n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset\}$ si può vedere che NESSUN CHIUSO è compatto: infatti una semiretta $(m, +\infty)$ non può mai essere ricoperta da un insieme finito di aperti, ma ci sono ricoprimenti aperti (infiniti).

Ultima proprietà molto importante è il TEOREMA DI TYCHONOFF:

un prodotto (arbitrario!) è compatto sse tutti i fattori lo sono.

Il risultato è sorprendente perché di solito si pensa che "compatto" significhi "piccolo", e un prodotto infinito non sembra "piccolo": ma dipende dal fatto che la topologia prodotto è poco fine.

Fare la dimostrazione usando la definizione è lungo e complicato, ma usando la caratterizzazione dei filtri è molto semplice: bastano le seguenti due proprietà:

(1) un filtro converge nello spazio prodotto sse convergono i filtri immagine tramite le proiezioni
(ovvero una rete converge nel prodotto sse per ogni indice la rete immagine converge: per questo la topol. prodotto è detta anche "topologia della convergenza puntuale (sugli indici)")

(2) le immagini tramite le proiezioni di ultrafiltri sono ultrafiltri.

ed entrambe le proprietà sono facili sulla definizione.

Facciamo qualche esempio:

se $Y \subseteq X$ con topologia indotta e $K \subseteq Y$ compatto (di Y) allora K è compatto di X,

però se $H \subseteq X$ è compatto (di X) non è detto che $H \cap Y$ sia compatto di Y.

Usiamo $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ con le topologie usuali:

$[0,1]$ compatto di $\mathbb{R}$,

ma $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ non è compatto di $\mathbb{Q}$: per $\eta \in (0,1)$ irrazionale,

il ricoprimento aperto $\{ [0, \eta - \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}, (\eta + \frac{1}{n}, 1] \cap \mathbb{Q} : n \in \mathbb{N}^* \}$ è infinito,

ma non raffinabile a ricoprimento finito.

Capire chi sono i compatti di $\mathbb{Q}$ (con topol. indotta da $\mathbb{R}$) è difficile:

certamente ci sono gli insiemi finiti,

ma anche $\{ 1/2^i \mid i \in \mathbb{N}^* \}$, $\{ 1/2^i + 1/3^j \mid i,j \in \mathbb{N}^* \}$ ecc lo sono.

Si può mostrare che: se $K \subseteq \mathbb{Q}$ è compatto, allora $\mathbb{Q} \setminus K$ è denso ($\overline{\mathbb{Q} \setminus K} = \mathbb{Q}$)

cioè K non può contenere intervalli di $\mathbb{Q}$.

(ovviamente il viceversa è falso: ci sono insiemi non compatti

con complementare denso)

Consideriamo gli <u>SPAZI PROIETTIVI REALI</u> $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ <u>con topologia quoziente di</u> $\mathbb{R}^{n+1}\setminus 0$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n+1}\setminus 0 \arrow[dr, two heads] & \\
\cup & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R}^{n+1}\setminus 0/\mathbb{R}^\times \\ \mathbb{S}^n/\pm \end{cases} \\
\mathbb{S}^n \arrow[ur, two heads] &
\end{tikzcd}$$

e si vede che la topologia quoziente data da $\mathbb{R}^{n+1}\setminus 0$ o da $\mathbb{S}^n$ è la stessa su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, e quindi in quanto quoziente di compatto ($\mathbb{S}^n$ è chiuso e limitato di $\mathbb{R}^{n+1}$), otteniamo che $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è spazio compatto.

Ricordiamo anche che $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e la topologia indotta come sottospazio coincide con la topologia usuale di $\mathbb{R}^n$, in effetti è un aperto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

I sottinsiemi aperti $U_i := \{x \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : x_i \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ per $i=0,1,\dots,n$ sono un ricoprimento aperto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e la topologia di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è la topologia forte delle mappe di inclusione $U_i \hookrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Discorsi analoghi si possono fare per gli spazi proiettivi <u>complessi</u> $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

La prossima definizione è usata da tutti, ma è una eccezione rispetto all'uso del termine "LOCALMENTE..." che di solito significa "ogni punto ha una base di intorni ...":

Uno spazio topologico X si dice LOCALMENTE COMPATTO se ogni suo punto ammette un intorno compatto.

Quindi, banalmente: COMPATTO $\Rightarrow$ LOCALMENTE COMPATTO (usando X come intorno!)

In teoria, e sono state usate, ci sono 4 possibili definizioni, tra cui valgono solo le implicazioni banali, ogni punto ha ...

$$\begin{array}{ccc} \text{UN INTORNO COMPATTO} & \Leftarrow & \text{UN INTORNO CHIUSO COMPATTO} \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ \text{UNA BASE DI INT. COMPATTI} & \Leftarrow & \text{UNA BASE DI INT. CHIUSI COMPATTI} \end{array}$$

ma nel caso hausdorff (T2) le 4 definizioni sono equivalenti, e nel caso generale si è "scelto" di usare la più debole

Le proprietà di stabilità sono piuttosto povere:

sottospazi di loc. compatti di solito non lo sono,

quozienti di loc. compatti di solito non lo sono,

immagini continue di 'loc. compatti nemmeno: 

invece per i prodotti abbiamo l'usuale:

UNO SPAZIO PRODOTTO È LOC COMPATTO sse <u>TUTTI</u> i FATTORI SONO LOC COMPATTI <u>E QUASI TUTTI</u> COMPATTI.

Per esempio: $\mathbb{R}$ non è compatto ma è localmente compatto,
quindi $\mathbb{R}^n$ non è compatto ma localmente compatto,
mentre $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (successioni) o $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ non sono né compatti né localmente.

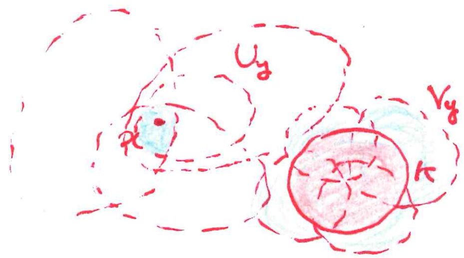
Ora ci occuperemo delle relazioni tra <u>COMPATTEZZA e SEPARAZIONE</u>.

L'osservazione di partenza è la seguente:

in <u>uno spazio T2</u> <u>punti e compatti disgiunti</u> hanno <u>intorni disgiunti</u>

dimostrazione facile: X sia T2, $K \subseteq X$ compatto, $x \notin K$:

per ogni $y \in K$ otteniamo intorni disgiunti V_y di y e U_y di x,
e i V_y ricoprono K, che è compatto, quindi bastano
$V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$ per $\bigcup_i V_{y_i} \supseteq K$: usiamo $V = \bigcup_i V_{y_i}$, e $U = \bigcap_i U_{y_i}$
(e l'intersezione è finita, quindi intorno di x,
è solo qui che serve l'ipotesi compattezza...)



Ci sono due conseguenze immediate:

<u>I COMPATTI DI UNO SPAZIO T2 SONO CHIUSI</u>

perché ogni punto nel complementare ha un intorno nel complementare, quindi il complementare è aperto.

<u>IN UNO SPAZIO T2 COMPATTO</u>, <u>i sottoinsiemi compatti sono esattamente i chiusi</u>

perché compatto in T2 $\Rightarrow$ chiuso
e chiuso in compatto $\Rightarrow$ compatto.

Vediamo una conseguenza per le funzioni continue:

se $f: X \to Y$ continua, X COMPATTO, Y HAUSDORFF (T2) allora f è chiusa

("una funzione continua tra un compatto e un hausdorff è chiusa")

infatti: C chiuso in X (compatto) $\Rightarrow$ C compatto $\Rightarrow$ $f(C)$ compatto in Y (T2) $\Rightarrow$ $f(C)$ chiuso in Y.

Di conseguenza le topologie HAUSDORFF COMPATTE hanno proprietà speciali:

LE TOP. T2 COMPATTE su X sono MINIMALI TRA LE TOPOLOGIE T2:

infatti se τ è T2 compatta, e $\tau' \leq \tau$ T2, allora $(X, \tau) \to (X, \tau')$ identità è continua tra compatto e un hausdorff, quindi chiusa, quindi $\tau' = \tau$.

LE TOPOLOGIE T2 COMPATTE su X sono massimali tra le topologie compatte:

infatti se τ è T2 compatta, e $\tau'' \geq \tau$ compatta, allora $(X, \tau'') \to (X, \tau)$ id è continua tra compatto e un hausdorff, quindi chiusa, quindi $\tau'' = \tau$.

Torniamo alle proprietà di separazione:

REGOLARE: separa punti e chiusi con intorni

UNO SPAZIO COMPATTO T2 è automaticamente T3

perché abbiamo visto che chiusi = compatti, e sappiamo separare punti e compatti.

NORMALE: separa chiusi disgiunti con intorni o funzioni

UNO SPAZIO COMPATTO T2 ($\Rightarrow$ T3) è automaticamente T4 (quindi anche $T3\frac{1}{2}$)

COMPLETAM. REGOLARE: separa punti e chiusi con funzioni

perché possiamo separare due compatti disgiunti, quindi due chiusi disgiunti, separando ogni punto di un compatto dall'altro, e poi passando a ricoprimenti finiti, e considerare unioni di intorni del primo, intersezione di intorni del secondo.

UNO SPAZIO T2 LOCALMENTE COMPATTO è automaticamente $T3\frac{1}{2}$

qui usiamo una costruzione che faremo nelle pagine successive:

ogni spazio T2 loc. compatto X è contenuto in un T2 compatto X^a (come sottospazio denso):

$X \subseteq X^a$ T2 COMPATTO $\Rightarrow$ X^a è T4 e $T3\frac{1}{2}$

ma sottospazi di $T3\frac{1}{2}$ sono ancora $T3\frac{1}{2}$,

quindi X è $T3\frac{1}{2}$, cioè COMPL. REGOLARE.

nota che non possiamo concludere per T4, perché T4 (NORMALE) non è stabile sui sottospazi!

PRESENTIAMO ORA LA PIÙ SEMPLICE POSSIBILE delle COMPATTIFICAZIONI: quella di Alexandroff o "compattificazione con un punto".

Sia X uno spazio topologico; $X^a := X \cup \{\infty\}$ con $\infty \notin X$ e definiamo la topologia di X^a dando (basi del) filtro degli intorni per ogni punto:

se $x \in X$ usiamo gli intorni della topologia di X

per $\infty \in X^a \setminus X$ usiamo come base $\{\infty\} \cup (X \setminus K)$ per K chiuso compatto di X.

Osservazioni immediate:

se X è compatto, allora ∞ risulta punto isolato di X^a.

se X non è compatto: X^a compatto (ogni ricoprimento aperto ha un aperto che $\ni \infty$, che quindi ricopre tutto tranne un compatto di X)

l'inclusione $X \hookrightarrow X^a$ ha immagine densa.

X^a è T1 sse X è T1

X^a è T2 sse X è T2 localmente compatto

(per separare ∞ dagli altri punti bisogna e basta che ciascun punto di X abbia almeno un intorno chiuso compatto!)

questo è quello che scrivevo nella pagina precedente.

Qualche esempio di compattificazione di Alexandroff :

se $X = \mathbb{R}^n$, allora $X^a = \mathbb{R}^n \sqcup \{\infty\}$ è omeomorfo a $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tramite la PROIEZIONE STEREOGRAFICA dal polo nord N $(\infty \leftrightarrow N)$.

ed è T2 perché $\mathbb{R}^n$ è T2 localm. compatto.

se $X = \mathbb{Q}^n$, allora $X^a = \mathbb{Q}^n \sqcup \{\infty\}$ non è T2 perché $\mathbb{Q}^n$ non è loc. compatto :
ogni intorno di ∞ interseca ogni aperto di $\mathbb{Q}^n$,
quindi anche ogni intorno di ogni punto.
(ma è comunque T1, ovvero anche ∞ è punto chiuso!)

se X è DISCRETO, se X finito allora anche X^a è discreto
(ma X era già compatto!)
se X infinito allora gli intorni di ∞ sono i cofiniti $(\ni \infty)$.

Vediamo in modo più generale come impostare un

problema di compattificazione:

dato uno spazio topologico X,

è possibile trovare uno spazio topologico $c(X)$ e

una funzione continua $i: X \to c(X)$ tale che:

(1) $c(X)$ sia compatto

(2) l'immagine di X sia densa: $\overline{i(X)} = c(X)$

(3) se $f: X \to Y$ è funzione continua si estende a $c(X) \to c(Y)$ continua

(4) ogni funzione continua $X \to$ SPAZIO COMPATTO si fattorizzi attraverso

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \text{SPAZIO COMPATTO} \\ c(X) \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

(proprietà universale, o "minimalità dello spazio compattificante").

Esempi:

- $(0,1) \subset \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $[0,1]/_{0\sim 1} \cong S^1$; $[0,1]$

ovvero

$\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $\mathbb{R}^a = \mathbb{R} \sqcup \{\infty\} \cong S^1$; $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \sqcup \{+\infty, -\infty\}$

ma in entrambi i casi le funzioni continue non si estendono alle compattificazioni (sin $\frac{1}{x}$ non si estende a 0 ; sin x non si estende ∞, $\pm\infty$).

- $\mathbb{A}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ $\longrightarrow$
  - $(\mathbb{R}^n)^a \simeq S^n$
  - $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})^n \simeq (S^1)^n$
  - $\prod$ spazi proiettivi con $\Sigma \dim = n$
  - $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

La compattificazione di Alexandroff ha chiaramente le proprietà (1) e (2), ma non (3) né (4); se X è già compatto, X^a non è omeomorfo a X.

Nota: $f: X \to Y$ continua si estende $f^a: X^a \to Y^a$, $\infty \mapsto \infty$ ma è continua sse f è propria (controimmagini di compatti sono compatti!)

Una compattificazione che soddisfa alle 4 proprietà si può definire facilmente per spazi compl. regolari, ed è quella di Stone-Čech:

supponiamo X hausdorff compl. regolare; allora $X \subseteq I^A$ con $I = [0,1]$

definiamo $X^\vee :=$ chiusura della immagine $X \to I^A \subseteq I^A$,

che è chiuso di un compatto, quindi compatto,

e per definizione ha mappa $X \to X^\vee$ con immagine densa

c'è un problema di buona definizione: dipende dall'insieme A?

ma poi è facile osservare che:

(a) se X è hausdorff compatto allora $X \cong X^\vee$

(b) la funzione si estende alle funzioni continue, usando $A = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$

(c) usando (a) e (b) troviamo la proprietà universale: se Y compatto

$X \xrightarrow{f} Y$ dà $X^\vee \xrightarrow{f^\vee} Y^\vee$ e

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \arrow[d, equal] \\ X^\vee \arrow[r, "f^\vee"'] & Y^\vee \end{tikzcd}$$

.

Si possono fare costruzioni esplicite della compattificazione Stone-Čech usando gli ultrafiltri, ma il risultato è difficile anche nei casi più facili: usando $\mathbb{N}$ con topol. discreta, $\mathbb{N}^\vee$ è un insieme di cardinalità 2^c (dove c = continuo $= 2^{\aleph_0}$).

Si può generalizzare la costruzione a spazi topologici qualsiasi, in un modo astratto: dato X, si considerano le classi di isomorfismo di mappe $X \xrightarrow{i_Y} Y$ dove Y è hausdorff compatto e l'immagine è densa, si considera la mappa diagonale $X \xrightarrow{i} \prod_{Y \in \text{classi}} Y$ determinata dalle i_Y, poi si definisce $X^\vee := \overline{\operatorname{im}(i)}$ (chiusura dell'immagine di i).

Le 4 proprietà scendono in modo quasi tautologico, ma il problema principale è logico-insiemistico: ha senso parlare di tutti gli spazi Y con quelle proprietà? Cioè si tratta di un insieme su cui possiamo indiciare il prodotto?

La risposta è sì, ma viene da una osservazione non banale: gli spazi Y in cui X può mapparsi in modo denso hanno cardinalità limitata, al massimo quella di $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$.

G23 19/20 THO

Qui finisce la nostra introduzione alla <u>Topologia generale</u>,
ora è bene provare a vedere se si è capaci di studiare queste proprietà nei vari spazi topologici:
ci sono esempi classici da guardare:

- RETTA DI SORGENFREY.
- INSIEMI DI CANTOR & PRODOTTO DI DISCRETI.
- topologie su $\mathbb{R}^{\omega}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e loro proprietà.
- topologie definite da un ordine

e naturalmente si possono guardare gli esami degli anni passati!