Un po' di esercizi/problemi e cose sulle curve!

proprietà del massimo.

parametrizzazioni di epi/ipo cicloidi.

alcune caratterizzazioni di curve in base

a vettori e piani del rif. Frénet

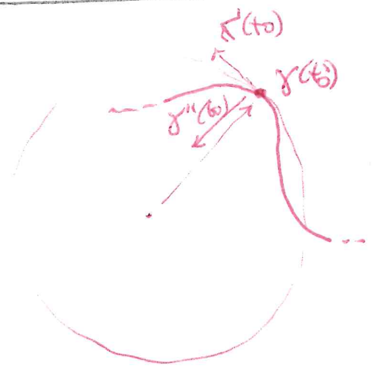
problema di sviluppo

problema della bicicletta

problema delle normali

Principio del massimo:

Se $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ è curva regolare e $\|\gamma(t)\|$ ha massimo locale in $t_0 \in I$



allora $|k(t_0)| > \dfrac{1}{\|\gamma(t_0)\|}$, cioè $\rho(t_0) < \|\gamma(t_0)\|$.

Svolgimento 1: $\gamma(t)\cdot\gamma(t)$ massimo locale in t_0,

dunque $(\gamma(t)\cdot\gamma(t))' = 2\gamma(t)\cdot\gamma'(t) = 0$ in t_0,

cioè $\gamma(t) \perp \gamma'(t_0)$; inoltre

$(\gamma(t)\cdot\gamma(t))'' = 2(\gamma'(t)\cdot\gamma'(t) + \gamma(t)\cdot\gamma''(t)) < 0$ in t_0

e usando γ in p.d'arco ($\gamma'\cdot\gamma' = 1$ e $\gamma'' \perp \gamma'$, quindi γ'' multiplo di γ)

la condizione è $1 + \gamma(t_0)\cdot\gamma''(t_0) < 0$, cioè $1 - \|\gamma(t_0)\|\cdot\|\gamma''(t_0)\| < 0$,

e diventa $\|\gamma(t_0)\|\cdot|k(t_0)| > 1$.

Svolgimento 2: usando sviluppo di Taylor:

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + (t-t_0)\gamma'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}\gamma''(t_0) + \cdots$$
$$= \gamma(t_0) + (t-t_0)\gamma'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}\cdot k(t_0)\, n(t_0) + \cdots$$

da cui

$$\gamma(t)\cdot\gamma(t) = \gamma(t_0)\cdot\gamma(t_0) + (t-t_0)\cdot 2\gamma(t_0)\cdot\gamma'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}\left(2k(t_0)\gamma(t_0)\cdot n(t_0) + 2\gamma'(t_0)\cdot\gamma'(t_0)\right) + \cdots$$

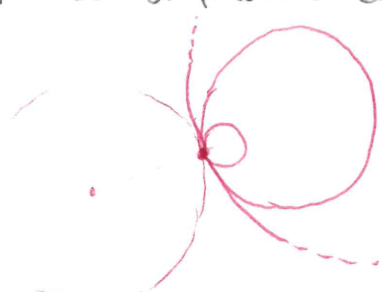
e per avere massimo in t_0 risulta:

$\gamma(t_0)\cdot\gamma'(t_0) = 0$, cioè $\gamma(t_0) \perp \gamma'(t_0)$
quindi multiplo di $\gamma''(t_0) = k(t_0)\,n(t_0)$

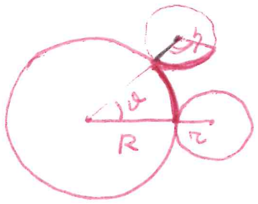
e

$$\underbrace{k(t_0)\,\gamma(t_0)\cdot n(t_0)}_{<0} + \underbrace{\gamma'(t_0)\gamma'(t_0)}_{1} < 0 .$$

Se $\|\gamma\|$ ha minimo locale in t_0, non si possono mettere limiti ai raggi di curvatura!



Come si trovano parametrizzazioni di <u>epi/ipo cicloidi</u> del cerchio? Vediamo gli epicicloidi:



Il rotolamento senza strisciare dà $R\vartheta = r\eta$, quindi $\eta = \frac{R}{r}\vartheta$,

e possiamo descrivere la traiettoria del punto

$$\gamma(\vartheta) = (R+r)\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix} + r\left(\begin{pmatrix}-\cos\vartheta\\ -\sin\vartheta\end{pmatrix} \text{ RUOTATO DI } \eta \text{ SENSO ANTIORARIO}\right)$$

$$= (R+r)\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix} - r\begin{pmatrix}\cos(\vartheta+\eta)\\ \sin(\vartheta+\eta)\end{pmatrix}$$

$$= r\left(\frac{R+r}{r}\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{r+R}{r}\vartheta\right)\\ \sin\left(\frac{r+R}{r}\vartheta\right)\end{pmatrix}\right)$$

$$= r\begin{pmatrix}\alpha\cos\vartheta - \cos(\alpha\vartheta)\\ \alpha\sin\vartheta - \sin(\alpha\vartheta)\end{pmatrix}$$

ove $\alpha = \frac{R+r}{r}$.

La curva risulta <u>chiusa</u>, e in effetti zeri di un polinomio, sse $\alpha \in \mathbb{Q}$, cioè sse $\frac{R}{r} \in \mathbb{Q}$.

Ragionamenti analoghi portano agli ipocicloidi:

$$\gamma(\vartheta) = r\begin{pmatrix}\alpha\cos\vartheta + \cos(\alpha\vartheta)\\ \alpha\sin\vartheta - \sin(\alpha\vartheta)\end{pmatrix}.$$

Problema: caratterizzare le curve in $\mathbb{R}^3$ tali che tangenti (risp. normali, binormali) stiano in un fascio di centro P.

- tutte le tangenti passano per P fissato sse

$\exists \lambda(s)$ tale che $\gamma + \lambda t = P$ (qui t è versore tangente)

sse $\gamma' + \lambda' t + \lambda t' = 0$

sse $t + \lambda' t + \lambda k n = 0$ (supp. γ unitaria)

sse $(1+\lambda')t + \lambda k n = 0$ (ma t, n sono l. ind.)

sse $\begin{cases} k = 0 \\ 1+\lambda' = 0 \quad (\lambda = -s) \end{cases}$

quindi si tratta di RETTE.

- analogamente per le normali:

$\gamma + \lambda n = P$ fisso

$\gamma' + \lambda' n + \lambda n' = 0$

$t + \lambda' n + \lambda(-kt + \tau b) = 0$

$(1-\lambda k)t + \lambda' n + \lambda \tau b = 0$

da $\begin{cases} 1 - k\lambda = 0 & k = 1/\lambda \text{ COSTANTE} \\ \lambda' = 0 & (\lambda \text{ COSTANTE}) \\ \lambda\tau = 0 & \tau = 0 \end{cases}$

torsione nulla e curvatura costante danno cerchi.

- cosa si trova per le binormali?

Problema: caratterizzare le curve di $\mathbb{R}^3$ tali che i piani del riferimento di Frenet (osculatori, normali, rettificanti) passano per un fissato punto.

- tutti i piani osculatori $\gamma + \langle t, n\rangle$ contengono P

sse $\exists\, \lambda(s), \mu(s)$ t.c. $\gamma + \lambda t + \mu n = P$

sse $\gamma' + \lambda' t + \lambda t' + \mu' n + \mu n' = 0$

sse $t + \lambda' t + \lambda k n + \mu' n + \mu(-kt + \tau b) = 0$

sse $(1 + \lambda' - \mu k)t + (\lambda k + \mu')n + \mu\tau b = 0$

da cui $\tau = 0$ (se $\mu \neq 0$), quindi curve PIANE.

- tutti i piani normali passano per $P \ni \gamma + \langle n, b\rangle$

$\gamma + \lambda n + \mu b = P$

$\gamma' + \lambda' n + \lambda n' + \mu' b + \mu b' = 0$

$t + \lambda' n + \lambda(-kt + \tau b) + \mu' b + \mu(-\tau n) = 0$

$(1 - \lambda k)t + (\lambda' - \mu\tau)n + (\lambda\tau + \mu')b = 0$

annullando i coeff: $\lambda = \frac{1}{k}$, che dà $\lambda' = -\frac{k'}{k^2}$

$\mu = \frac{\lambda'}{\tau} = -\frac{k'}{\tau k^2}$

e il terzo dà $\frac{\tau}{k} - \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)' = 0$

che caratterizza le curve SFERICHE!

- tutti i piani rettificanti passano per $P \ni \gamma + \langle t, b\rangle$

con le stesse tecniche si trova che $\frac{\tau}{k}$ deve essere proporzionale a s (par. d'arco).

Problema: il dato delle funzioni $t(s)$, $n(s)$, $b(s)$, cioè dei vettori tangenti, normali, binormali; DETERMINA la curva data?

- conoscendo $t(s)$, allora $\gamma(s)$ è una primitiva di $t(s)$, ed è determinata a meno di traslazioni!

- conoscendo $b(s)$, possiamo usare $b' = -\tau n$ e dedurre $\pm n(s)$, e di conseguenza $t(s) = \pm n(s) \times b(s)$, quindi nei tratti dove non si annulla $\kappa(s)$ possiamo ricostruire $\pm\gamma(s)$.

- conoscendo $n(s)$, se siamo nel piano, usiamo $n' = -\kappa t$, e di conseguenza conosciamo $\pm t(s)$.

Nel caso dello spazio abbiamo invece che:

$$n' = -\kappa t + \tau b \qquad \Rightarrow \kappa^2 + \tau^2 = \|n'\|^2$$

$$n'' = -\kappa' t - \kappa t' + \tau' b + \tau b' = -\kappa' t - (\kappa^2 + \tau^2) n + \tau' b \qquad \Rightarrow \kappa'^2 + \tau'^2 + (\kappa^2 + \tau^2)^2 = \|n''\|^2$$

e scrivendo $\begin{cases} \kappa = \|n'\| \cos\vartheta \\ \tau = \|n'\| \sin\vartheta \end{cases}$

quindi $\begin{cases} \kappa' = \|n'\|' \cos\vartheta - \|n'\| \vartheta' \sin\vartheta \\ \tau' = \|n'\|' \sin\vartheta + \|n'\| \vartheta' \cos\vartheta \end{cases}$

si ricava ϑ' da $\kappa'^2 + \tau'^2 = (\|n'\|')^2 + \|n'\| \vartheta'^2$, quindi abbiamo ϑ, quindi κ e τ.

A meno di casi particolari possiamo usare il TFC, poi sfruttare di conoscere anche $n(s)$.

<u>alternativa</u>: dalle espressioni di n', n'' possiamo ricavare t e b? Cosa succede quando $\begin{vmatrix} \kappa & \tau \\ \kappa' & \tau' \end{vmatrix} = 0$?

PROBLEMA DI INVILUPPO: possiamo costruire la curva conoscendo le RETTE TANGENTI alla curva?

Nota che si conosce la retta tangente, non il punto di tangenza, altrimenti sarebbe ovvio!

L'idea è trovare i punti della curva come punti di intersezione di "tangenti vicine".

Poniamoci per esempio nel piano: l'intersezione di $\begin{cases} P+\langle v\rangle \\ Q+\langle w\rangle \end{cases}$ è il punto $P+\alpha v \in Q+\langle w\rangle$, e si trova α imponendo $|P-Q+\alpha v, w| = 0$, cioè $|P-Q, w| + \alpha |v, w| = 0$, e $\alpha = -\frac{|P-Q, w|}{|v, w|}$.

Considerando ora le rette $\begin{cases} P(t+\varepsilon) + \langle v(t+\varepsilon)\rangle \\ P(t) + \langle v(t)\rangle \end{cases}$

il limite per $\varepsilon \to 0$ è il punto di tangenza, quindi la curva cercata!

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|P(t+\varepsilon)-P(t), v(t)|}{|v(t+\varepsilon)-v(t), v(t)|} = \frac{|P'(t), v(t)|}{|v'(t), v(t)|}$$

e dunque $\gamma(t) = P(t) - \frac{|P'(t), v(t)|}{|v'(t), v(t)|} v(t)$.

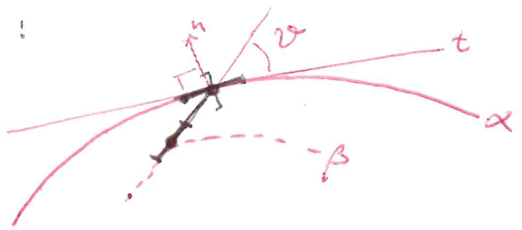
per esempio, usando le rette $\begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

si trova la curva $\gamma(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x'(t)}{\alpha'(t)} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nello spazio si può usare un procedimento analogo calcolando i punti di minima distanza tra due rette sghembe, e poi passare al limite quando le due rette sono "vicine".

Vediamo una possibile impostazione del seguente problema: data la traiettoria della ruota anteriore della bici, determinare quella della ruota posteriore (pensate alle auto o ai camion!).

Supponiamo il problema piano e vediamo la situazione dall'alto:



ℓ = distanza tra centri ruote

ϑ = angolo di sterzo

α = traiettoria anteriore

t, n, k sist. Frenet di α

β = traiettoria posteriore

Abbiamo allora:

$$\alpha - \beta = \ell(t\cos\vartheta + n\sin\vartheta)$$ e β' <u>è parallelo</u> a $t\cos\vartheta + n\sin\vartheta$

derivando:

$$\underbrace{\alpha'}_{=\|\alpha'\| t} - \beta' = \ell(t'\cos\vartheta - t\vartheta'\sin\vartheta + n'\sin\vartheta + n\vartheta'\cos\vartheta)$$

$$= \ell(\|\alpha'\| k n\cos\vartheta - t\vartheta'\sin\vartheta - \|\alpha'\| k t\sin\vartheta + n\vartheta'\cos\vartheta)$$

$$= \left(\ell(-\vartheta' - \|\alpha'\| k)\sin\vartheta\right) t + \left(\ell(\vartheta' + \|\alpha'\| k)\cos\vartheta\right) n$$

Si ricava

$$\beta' = \left(\|\alpha'\| + \ell(\vartheta' + \|\alpha'\| k)\sin\vartheta\right) t - \left(\ell(\vartheta' + \|\alpha'\| k)\cos\vartheta\right) n$$

e infine

$$\frac{\|\alpha'\| + \ell(\vartheta' + \|\alpha'\| k)\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = -\frac{\ell(\vartheta' + \|\alpha'\| k)\cos\vartheta}{\sin\vartheta}$$

da cui:

$$\|\alpha'\|\sin\vartheta + \ell(\vartheta' + \|\alpha'\| k) = 0$$

quindi $$\vartheta' = -\frac{\|\alpha'\|}{\ell}\sin\vartheta - \|\alpha'\| k$$

(se poi $\|\alpha'\| = 1 = \ell$ si semplifica $\vartheta' = -\sin\vartheta - k$)

che è equazione differenziale per ϑ, poi si trova

$$\beta = \alpha - \ell(t\cos\vartheta + n\sin\vartheta).$$

Vediamo qualche esempio facile!

(1) se α retta ($\kappa \equiv 0$) e $\vartheta(0)=0$ ci aspettiamo una retta:

$\begin{cases} \vartheta' = -\frac{\|\alpha'\|}{\ell} \sin\vartheta \\ \vartheta(0)=0 \end{cases}$ ha soluzione $\vartheta \equiv 0$, $\beta = \alpha - \ell t$, ovviamente!

(2) se α retta ($\kappa \equiv 0$) ma $\vartheta(0)=\vartheta_0 \neq 0$, supponiamo $\frac{\|\alpha'\|}{\ell}=1$:

$\begin{cases} \vartheta' = -\sin\vartheta \\ \vartheta(0)=\vartheta_0 \end{cases}$ dà $\frac{\vartheta'}{\sin\vartheta}=-1$, $\frac{d\vartheta}{\sin\vartheta}=-ds$ che si integra in

$\operatorname{sett\,th}(\cos\vartheta) = s$ (a meno di fattori)

cioè $\cos\vartheta = \operatorname{th}(s)$

$\sin\vartheta = \frac{1}{\operatorname{ch}(s)}$

e quindi: $\beta = \ell\begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} - \ell\cos\vartheta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \ell\sin\vartheta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \ell\begin{pmatrix} s - \operatorname{th}(s) \\ -1/\operatorname{ch}(s) \end{pmatrix}$

e si riconosce una TRATTRICE!

(3) se α è cerchio ($\kappa \equiv \kappa_0$ costante), supponiamo $\|\alpha'\|=1=\ell$ e $\kappa_0=1$,

abbiamo $\vartheta' = -\sin\vartheta - 1$, cioè $\frac{d\vartheta}{1+\sin\vartheta} = -ds$,

che si integra in $\operatorname{tg}\vartheta - \frac{1}{\cos\vartheta} = -s$ (a meno di traslazione)

con qualche calcolo si ricava $\sin\vartheta = \frac{1-s^2}{1+s^2}$

$\cos\vartheta = \frac{2s}{1+s^2}$

e quindi

$$\beta = \begin{pmatrix} \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} - \frac{2s}{1+s^2}\begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \end{pmatrix} - \frac{1-s^2}{1+s^2}\begin{pmatrix} -\cos s \\ -\sin s \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{2}{1+s^2}\begin{pmatrix} \cos s + s\sin s \\ \sin s - s\cos s \end{pmatrix}$$, che curva è?

<u>problema delle normali nel piano</u>: data una famiglia di rette, esistono curve che hanno come rette normali quella famiglia data?

<u>Idea</u>: la curva dei centri di quella cercata ha quella famiglia di rette come tangenti; quindi prima si fa l'inviluppo di quella famiglia, e poi si cercano le involute, quindi si trova una collezione di curve parallele.

<u>Strategia più diretta</u>: le tangenti della γ cercata hanno direzione $v(t) \perp w(t)$ (se le rette normali sono date da $Q(t)+\langle w(t)\rangle$), e quindi sono del tipo $P(t)+\langle v(t)\rangle$ <u>con $P(t)$ incognito</u>!

Facendo gli inviluppi di queste rette troviamo la curva
$$\gamma(t) = P(t) - \frac{|P'(t)\ v(t)|}{|v'(t)\ v(t)|}\, v(t)$$
e dobbiamo imporre la condizione $\gamma(t) \in Q(t)+\langle w(t)\rangle$,

cioè che $\gamma(t)-Q(t) \parallel w(t)$,

cioè $|\gamma(t)-Q(t),\ w(t)| = 0$,

che dà una equazione differenziale lineare 1° ordine per $P(t)$, e quindi si può risolvere il problema di Cauchy per ogni condizione iniziale $P(0)=P_0$.

Di nuovo si vede che otteniamo una famiglia di curve come soluzioni.