PRIMA DEGLI ESERCIZI, due risposte e domande frequenti:

① perché $\sigma_u(f) = f_u = \frac{\partial}{\partial u}(f)$?

ricordiamo che se $\sigma: U \longrightarrow S \subseteq \mathbb{R}^3$ è parametr. di S $\left((u,v) \mapsto \sigma(u,v) \right)$

e f è funzione ($S \to \mathbb{R}$ o da $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$), $v \in T_pS$:

$v(f)_p := (f \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=0}$ se $v = \gamma'(0)$, $p = \gamma(0)$

per $\gamma: I \longrightarrow U \longrightarrow S$ $\left(t \mapsto (u(t), v(t)) \mapsto \underset{\sigma(u(t),v(t))}{\gamma(t)} \right)$

ora $\sigma_u \in TS$

e la curva γ può essere scelta $\gamma(u) = \sigma(u, v_0)$ con v_0 costante,

e si applica la definizione:

$\sigma_u(f) = \frac{d}{du} f(\sigma(u,v_0)) \left(= \frac{\partial}{\partial u} f \right.$ se f è già scritta in funzione di u, v).

② perché $\gamma'(\gamma') = \gamma''$?

qui c'è un abuso di linguaggio (tipico della geometria differenziale!)

c'è una superficie S, e $\gamma \subseteq S$ curva:
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\gamma"'] & U \arrow[r, "\sigma"] & S \subseteq \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

le derivazioni (in direzione γ' qui) operano su funzioni definite su un aperto di S, mentre γ' è definita solo lungo la curva γ, cioè DIPENDE GIÀ DAL PARAMETRO di γ.

In generale: $v \in T_pS$, $\varphi : S \to \mathbb{R}$:

$$v(\varphi)_p = (\varphi \circ \gamma)'(0) = \frac{d}{dt}\varphi(\gamma(t))\Big|_{t=0} \qquad \text{per } \gamma \text{ curva} \subseteq S,\ \gamma(0) = p,\ \gamma'(0) = v$$

Ora supponiamo che φ sia tale che $\varphi \circ \gamma = \gamma'$: allora $\gamma'(\gamma')$ è abbreviazione per

$$\gamma'(\varphi) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma(t)) = \frac{d}{dt}(\gamma'(t)) = \gamma''(t).$$

Per esempio, noi usiamo le formule in questo contesto:

$\gamma' \cdot n = 0$ ed esplicitando: $\gamma'(s) \cdot n(\gamma(s)) = 0$

$\gamma'(\gamma' \cdot n) = 0$ $\qquad \dfrac{d}{ds}\big(\gamma'(s) \cdot n(\gamma(s))\big) = 0$

$\gamma'(\gamma') \cdot n + \gamma' \cdot \gamma'(n) = 0$ $\qquad \gamma''(s) \cdot n(\gamma(s)) + \gamma'(s) \cdot \dfrac{d}{ds}\big(n(\gamma(s))\big) = 0$

$\underline{\gamma'(\gamma')} \cdot n + \underline{\gamma' \cdot dn(\gamma')} = 0$ $\qquad \underline{\gamma''(s) \cdot n(\gamma(s))} + \underline{\gamma'(s) \cdot dn(\gamma'(s))} = 0$

unico significato possibile: $\gamma'(\gamma') = \gamma''$.

Esame del 30 aprile 2014: Studiare l'elicoide della retta $z=x$ (attorno all'asse z)

(a) parametrizzazione ed equazione cartesiana:

$$\sigma(x,\vartheta) = \begin{pmatrix} x\cos\vartheta \\ x\sin\vartheta \\ x+\vartheta \end{pmatrix}$$ da $X^2+Y^2=x^2$ e $\frac{Y}{X}=tg\vartheta$ otteniamo $Z-\sqrt{X^2+Y^2}=\vartheta$

dunque $X\,tg(Z-\sqrt{X^2+Y^2})=Y$

(b) matrici di pff e sff:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_\vartheta = \begin{pmatrix} -x\sin\vartheta \\ x\cos\vartheta \\ 1 \end{pmatrix}$$ dunque $G_I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1+x^2 \end{pmatrix}$ e $|G_I| = 1+2x^2$

$$n = \frac{\sigma_x\times\sigma_\vartheta}{\|\sigma_x\times\sigma_\vartheta\|} = \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\begin{pmatrix} \sin\vartheta - x\cos\vartheta \\ -\cos\vartheta - x\sin\vartheta \\ x \end{pmatrix}, \quad \sigma_{xx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{x\vartheta} = \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \begin{pmatrix} -x\cos\vartheta \\ -x\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

dunque $G_{II} = \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & x^2 \end{pmatrix}$ e $|G_{II}| = -\frac{1}{1+2x^2}$

(c) $K = \frac{|G_{II}|}{|G_I|} = -\frac{1}{(1+2x^2)}$ che è sempre <0, tutti i punti sono IPERBOLICI.

$$L = G_I^{-1}G_{II} = \frac{1}{1+2x^2}\begin{pmatrix} 1+x^2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & x^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}^{\,3}}\begin{pmatrix} -1 & -1-2x^2 \\ -2 & 1+2x^2 \end{pmatrix}.$$

(d) linee asintotiche: curve $\gamma(u) = \sigma(x(u), \vartheta(u))$ con $\gamma' = x'\sigma_x + \vartheta'\sigma_\vartheta$ isotropo per sff

$$(x' \ \vartheta')\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ \vartheta' \end{pmatrix} = 0 \ , \quad -2x'\vartheta' + x^2\vartheta'^2 = 0 \ , \quad \vartheta'(-2x' + x^2\vartheta') = 0 \quad \text{che dà}$$

$\vartheta' = 0$ (chiaro: il vettore $\binom{1}{0}$ è isotropo!), sono le rette con ϑ = costante

oppure $\vartheta' = 2\dfrac{x'}{x^2}$ da cui $\vartheta(x) = -\dfrac{2}{x}$ + costante, oppure $x = \dfrac{1}{\frac{c-\vartheta}{2}}$

linee ortogonali a ϑ = costante, ie a $\binom{1}{0}$:

$$(x' \ \vartheta')\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1+x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \ , \quad 2x' + \vartheta' = 0 \ , \quad x' = -\frac{\vartheta'}{2} \ , \quad x = -\frac{\vartheta}{2} + c$$

linee ortogonali a x = costante, ie a $\binom{0}{1}$:

$$(x' \ \vartheta')\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1+x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad x' + (1+x^2)\vartheta' = 0 \ , \quad \vartheta' = -\frac{x'}{1+x^2} \ , \quad \vartheta = -\operatorname{arctg} x + c$$

$$x = \operatorname{tg}(c - \vartheta)$$

(e) equazioni differenziali delle geodetiche:

$$\begin{cases} (2x' + \vartheta')' = \frac{1}{2}(2x\vartheta'^2) \\ (x' + (1+x^2)\vartheta')' = 0 \end{cases}$$

per $\vartheta' = 0$ otteniamo una soluzione evidente (le rette!)

Usiamo la seconda equazione: $x' + (1+x^2)\vartheta' = c$ costante lungo la geodetica, ricaviamo $\vartheta' = \frac{c-x'}{1+x^2}$ e sostituiamo nella condizione di unitarietà:

$$2x'^2 + 2x'\vartheta' + (1+x^2)\vartheta'^2 = 1$$

$$2x'^2 + 2x'\frac{c-x'}{1+x^2} + (1+x^2)\frac{(c-x')^2}{(1+x^2)^2} = 1$$

$$2x'^2(1+x^2) + 2x'(c-x') + (c-x')^2 = (1+x^2)$$

$$(1+2x^2)x'^2 = 1+x^2-c$$

quindi troviamo $x'^2 = \frac{1+x^2-c}{1+2x^2}$

$$\vartheta' = \frac{c-x'}{1+x^2} = \frac{c - \sqrt{\frac{1+x^2-c}{1+2x^2}}}{1+x^2} = \frac{c\sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1+x^2-c}}{(1+x^2)\sqrt{1+2x^2}}$$

e infine $\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{\vartheta'}{x'} = \frac{c\sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1+x^2-c}}{(1+x^2)\cancel{\sqrt{1+2x^2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{1+2x^2}}}{\sqrt{1+x^2-c}} = \frac{c\sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1+x^2-c}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2-c}}$

che dà una equazione diff del primo ordine per $\vartheta(x)$.

Esame del 21 aprile 2017:

γ piana regolare unitaria, traslata per $tv + \sin(t)w$ con $v \perp$ piano di γ, $w \in$ piano di γ.

possiamo supporre: $\gamma(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ da cui la parametrizzazione (con $x_s^2 + y_s^2 = 1$)

$$\sigma(s,t) = \gamma(s) + tv + \sin(t)w = \begin{pmatrix} x(s) + \sin(t) \\ y(s) \\ t \end{pmatrix}.$$

(a) matrici di pff e sff:

$$\sigma_s = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_t = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{dunque } G_I = \begin{pmatrix} x_s^2 + y_s^2 & x_s \cos t \\ & 1+\cos^2 t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_s \cos t \\ & 1+\cos^2 t \end{pmatrix}$$

$$n = \frac{\sigma_s \times \sigma_t}{\|\sigma_s \times \sigma_t\|} = \frac{1}{\sqrt{1+y_s^2\cos^2 t}} \begin{pmatrix} y_s \\ -x_s \\ -y_s \cos t \end{pmatrix}, \quad \sigma_{ss} = \begin{pmatrix} x_{ss} \\ y_{ss} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{st} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{tt} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{dunque } G_{II} = \frac{1}{\sqrt{1+y_s^2\cos^2 t}} \begin{pmatrix} y_s x_{ss} - x_s y_{ss} & 0 \\ 0 & -y_s \sin t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+y_s^2\cos^2 t}} \begin{pmatrix} -\kappa_\gamma & 0 \\ 0 & -y_s \sin t \end{pmatrix}$$

(b) $K = \dfrac{|G_{II}|}{|G_I|} = \dfrac{\kappa_\gamma y_s \sin t}{(1+y_s^2\cos^2 t)^2}$ e i punti sono $\begin{cases} \text{ellittici} \\ \text{parabolici} \\ \text{iperbolici} \end{cases}$ se $\kappa_\gamma y_s \sin t \gtreqless 0$.

$$L = G_I^{-1} G_{II} = \frac{1}{1+y_s^2\cos^2 t} \begin{pmatrix} 1+\cos^2 t & -x_s \cos t \\ -x_s \cos t & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+y_s^2\cos^2 t}} \begin{pmatrix} -\kappa_\gamma & 0 \\ 0 & -y_s \sin t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{}^{\,3}} \begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

(c) Famiglie di curve ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione:

per trovare le curve δ ortogonali a $t'=0$, cioè alla direzione $\binom{1}{0}$ (dei parametri):

$(s' \; t')\, G_I \binom{1}{0} = 0$, cioè $(s', t')\begin{pmatrix} 1 \\ x_s \cos t \end{pmatrix} = 0$, dunque $s' + t' x_s \cos t = 0$

che dà una equazione a variabili separabili: $\frac{s'}{x_s} = -t' \cos t$.

per trovare le curve δ ortogonali a $s'=0$ si procede analogamente:

$(s' \; t')\, G_I \binom{0}{1} = 0$, cioè $(s', t')\begin{pmatrix} x_s \cos t \\ 1+\cos^2 t \end{pmatrix} = 0$; dunque $s' x_s \cos t + (1+\cos^2 t) t' = 0$

che dà una equazione $x_s s' = -\frac{1+\cos^2 t}{\cos t}\, t'$, che si può anche integrare esplicitamente.

(d) Le linee asintotiche soddisfano alla condizione di isotropia per G_{II}; dunque

$(s', t')\, G_{II} \binom{s'}{t'} = 0$, cioè $-k_\gamma s'^2 - y_s \sin(t)\, t'^2 = 0$, separabile: $-\frac{k_\gamma}{y_s} s'^2 - \sin(t)\, t'^2 = 0$

Le linee di curvatura sono tali che $L\gamma' \,/\!/\, \gamma'$, cioè $G_I \gamma' \,/\!/\, G_{II}\gamma'$ e quindi

$\det\begin{pmatrix} s' + t' x_s \cos t & -k_\gamma s' \\ s' x_s \cos t + (1+\cos^2 t) t' & -y_s \sin(t) t' \end{pmatrix} = 0$ che dà una equazione differenziale

$$k_\gamma x_s \cos(t) s'^2 + \left(k_\gamma (1+\cos^2 t) - y_s \sin(t)\right) s' t' - x_s y_s \sin(t)\cos(t)\, t'^2 = 0$$

(e) affinché la superficie sia loc. isometrica al piano, è necessario che la curvatura sia identicamente nulla, il che succede se $k_\gamma \equiv 0$ oppure $y_s \equiv 0$ e in entrambi i casi allora la curva γ è una retta, e la superficie un CILINDRO.

Vediamo le equazioni delle geodetiche:

$$\begin{cases} (s' + x_s \cos(t)\, t')' = \cancel{\frac{1}{2}} (\cancel{2}\, x_{ss} \cos(t)\, s' t') \\ (x_s \cos(t) s' + (1+\cos^2 t) t')' = \cancel{\frac{1}{2}} (-\cancel{2} x_s \sin(t)\, s' t' - \cancel{2} \cos(t) \sin(t)\, t'^2) \end{cases}$$

Per vedere se le linee coordinate sono geodetiche, basta vedere se $s' = 0$ oppure $t' = 0$ soddisfano il sistema, e in entrambi i casi si trova che deve essere $x_s = 0$, cioè x costante, γ retta, e siamo nel caso del cilindro _

Esame 29 aprile 2019 : superficie di rotazione della trattrice : pseudosfera di Beltrami

Usando la curva $\begin{pmatrix} 1/ch(u) \\ 0 \\ u - th(u) \end{pmatrix}$ otteniamo $\sigma(u,\vartheta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{ch(u)} \cos\vartheta \\ \frac{1}{ch(u)} \sin\vartheta \\ u - th(u) \end{pmatrix}$.

(a) pff e sff:

$$\sigma_u = \begin{pmatrix} -\frac{sh(u)}{ch^2(u)} \cdot \cos\vartheta \\ -\frac{sh(u)}{ch^2(u)} \sin\vartheta \\ 1 - \frac{1}{ch^2(u)} \end{pmatrix} = \frac{sh(u)}{ch^2(u)} \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \\ sh(u) \end{pmatrix}, \quad \sigma_\vartheta = \frac{1}{ch(u)} \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \\ \cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui $G_I = \begin{pmatrix} \frac{sh^2(u)}{ch^4(u)}(1+sh^2(u)) & 0 \\ 0 & 1/ch^2(u) \end{pmatrix} = \frac{1}{ch^2(u)} \begin{pmatrix} sh^2(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $|G_I| = \frac{sh^2(u)}{ch^4(u)}$

$$n = \frac{\sigma_u \times \sigma_\vartheta}{\|\sigma_u \times \sigma_\vartheta\|} = \frac{1}{ch(u)} \begin{pmatrix} -sh(u)\cos\vartheta \\ -sh(u)\sin\vartheta \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{uu} = \frac{sh(u)}{ch^2(u)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ch(u) \end{pmatrix} + \frac{ch^3(u) - 2sh^2(u)ch(u)}{ch^4(u)} \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \\ sh(u) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ sh(u)/ch(u) \end{pmatrix} + \frac{1-sh^2(u)}{ch^3(u)} \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \\ sh(u) \end{pmatrix} = \frac{1}{ch^3(u)} \begin{pmatrix} -(1-sh^2(u))\cos\vartheta \\ -(1-sh^2(u))\sin\vartheta \\ 2sh(u) \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{u\vartheta} = \frac{sh(u)}{ch^2(u)} \begin{pmatrix} \sin\vartheta \\ -\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{ch(u)} \begin{pmatrix} -\cos\vartheta \\ -\sin\vartheta \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui $G_{II} = \frac{1}{ch(u)} \begin{pmatrix} \frac{sh(u)(1-sh^2(u)) - 2sh(u)}{ch^3(u)} & 0 \\ 0 & \frac{sh(u)}{ch(u)} \end{pmatrix} = \frac{sh(u)}{ch^2(u)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $|G_{II}| = -\frac{sh^2(u)}{ch^4(u)}$

(b) $L = G_I^{-1} G_{II} = ch^2(u) \begin{pmatrix} 1/sh^2(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{sh(u)}{ch^2(u)} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/sh(u) & 0 \\ 0 & sh(u) \end{pmatrix}$

$K = \det(L) = \frac{|G_{II}|}{|G_I|} = -1$ COSTANTE, tutti i punti iperbolici.

(c) linee di curvatura: sono quelle coordinate, visto che L è diagonale!

linee asintotiche: imponendo che le tangenti sia G_{II} - isotropa

ovvero $-u'^2 + v'^2 = 0$, cioè $u' = \pm v'$, direzione $\binom{1}{\pm 1}$ nello spazio parametri.

domanda: che angolo formano tra loro le linee asintotiche?

(d) geodetiche: $\begin{cases} \left(\frac{sh^2(u)}{ch^2(u)} u'\right)' = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{sh^2(u)}{ch^2(u)}\right)_u u'^2 + \left(\frac{1}{ch^2(u)}\right)_u v'^2\right) \\ \left(\frac{1}{ch^2(u)} v'\right)' = 0 \end{cases}$

$v' = 0$, che dà i profili, dà geodetiche, altrimenti $v' = c\, ch^2(u)$ con c costante,

e sostituendo nella unitarietà $\frac{sh^2(u)}{ch^2(u)} u'^2 + \frac{1}{ch^2(u)} v'^2 = 1$ otteniamo

$u'^2 = \left(1 - c^2 ch^2(u)\right) \frac{ch^2(u)}{sh^2(u)}$, quindi troviamo

$$\frac{dv}{du} = \frac{v'}{u'} = \frac{c\, ch^2(u)}{\sqrt{1-c^2 ch^2(u)} \cdot \frac{ch(u)}{sh(u)}} = \frac{c\, sh(u)\, ch(u)}{\sqrt{1-c^2 ch^2(u)}}$$

e questo dà $\quad d\vartheta = \frac{c\, ch(u)\, sh(u)}{\sqrt{1-c^2 ch^2(u)}}\, du = \frac{c\, ch(u)}{\sqrt{1-c^2ch^2(u)}}\, d(ch(u))$

che dà anche la possibilità di integrare.

(e) dalla unitarietà il termine $\frac{1}{ch^2(u)}\vartheta'^2 = \frac{1}{ch^2(u)} c^2ch^4(u) = c^2ch^2(u) \leq 1$

e si trova $\frac{1}{ch(u)} \geq |c|$ e siccome $\frac{1}{ch(u)}$ è la distanza dell'asse delle z dalla curva γ di partenza,

abbiamo che la minima distanza dall'asse è $|c|$,

e per questo valore della coordinata x $\left(= \frac{1}{ch(u)}\right)$ si ha la massima altezza raggiunta: $z = u - th(u) = \operatorname{sett\,ch}\left(\frac{1}{c}\right) - \frac{\sqrt{1-c^2}}{c}$.