G2B 19/20 T11

Topologia di SORGENFREY (DESTRA): $\mathbb{R}$ con base di aperti $[a,b)$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$.

numerabilità:

S: $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ denso

C1: $\forall x$: $[x, x+\frac{1}{n})$ è base intorni (per $n\in\mathbb{N}_{>0}$)

$\neg$C2: ogni base $\mathcal{B}$ ha $\mathbb{R}\hookrightarrow\mathcal{B}$

S, $\neg$C2 $\Rightarrow$ $\neg$ ps.metr.

separazione:

T2 perché $\geq$ Euclidea

T4, dunque T$3\frac{1}{2}$, CR (top. def. famiglia pseudometriche).

connessione:

è TOTALM. SCONNESSO, dunque TOT. ARCO-SCONN.

le cc. sono i punti, non è loc. conn. o arcocom.

- ogni aperto di base è sconnesso: $[a,b)=[a,c)\sqcup[c,b)$.

compattezza:

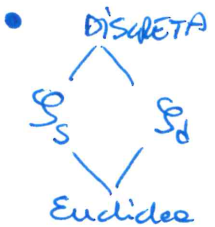
non è compatto né loc.comp.

$K\subseteq(\mathbb{R},\mathcal{S})$ compatto $\Rightarrow$ numerabile
$\not\Leftarrow$

- si trova mappa iniettiva $K\overset{q}{\hookrightarrow}\mathbb{Q}$: $\forall x\in K$ usiamo il ricoprim. aperto $(-\infty,a),[x,+\infty)$ per $a<x$, si estrae ricopr. finito e $q(x)\in\underbrace{(\max(a),x)}_{\text{non vi sono punti di }K}\cap\mathbb{Q}$.

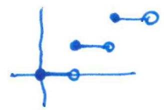
- $\{0,\frac{1}{n}\mid n>0\}$ è compatto
$\{0,-\frac{1}{n}, n>0\}$ non è compatto!

NOTE:

- 

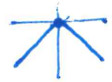
- per funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, visto $(\mathbb{R},\mathcal{S}_d)\to(\mathbb{R},\text{Eucl.})$ calcola i "limiti da destra" ma $\mathcal{C}((\mathbb{R},\mathcal{S}_d),(\mathbb{R},\mathcal{S}_d))\neq\mathcal{C}((\mathbb{R},\mathcal{E}),(\mathbb{R},\mathcal{E}))$:

funzione continua per $\mathcal{S}_d$, non $\mathcal{E}$:



(PARTE INTERA)

funzioni continue per $\mathcal{E}$, non $\mathcal{S}_d$



(OPPOSTO MODULO)

G2B 19/20 · T112

PRODOTTI NUMERABILI DI INSIEMI FINITI DISCRETI (con top. discreta): es $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$, CANTOR.

numerabilità:

S: perché prodotto numerabile (meno di c) di separabili

oppure: base della topol. prodotto ha cardinalità $\mathcal{P}_{finite}(\mathbb{N})$

C1: perché metrizzabile, oppure si trova una base numerabile di intorni

C2: perché metr. e separ., oppure: base.

separazione

T2 perché prodotto di T2,

⋮

T4 perché metrizzabile

è metrizzabile perché prodotto numerabile di spazi metrizzabili.

connessione:

TOTALM. SCONNESSO perché prodotto di tot. sconnessi, (ma non ha top. discreta!).

compattezza:

è COMPATTO perché prodotto compatti, quindi LOC. COMPATTO

T2, compatto ⇒ sottins compatti = sottins. chiusi.

DOMANDA: $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^2$ sono omeomorfi in quanto spazi topologici? cioè: esiste una funzione biiettiva e bicontinua tra loro?

NOTE: come insieme ha cardinalità $2^{\mathbb{N}} = c$, continuo

è isomorfo ai suoi prodotti finiti o numerabili: $(\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N}} = (\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N} \sqcup \mathbb{N}} \cong (\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N}}$

$((\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} = (\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \cong (\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N}}$

è omeomorfo a un sottinsieme di $\mathbb{R}$:

$\{0,2\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$

$(a_i) \longmapsto \sum \frac{a_i}{3^i}$

e l'immagine è un sottospazio di $\mathbb{R}$ che risulta: METRICO, COMPATTO, TOTALM. SCONNESSO, PERFETTO (= proprio DERIVATO), DI CARDINALITÀ c e LEBESGUE-MISURA NULLA.

Possibili topologie su $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\mathbb{N}\to\mathbb{R}\}$

dove $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tramite $x_{n+1}=0$, e $\mathbb{R}^\infty \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ come "successioni quasi ovunque nulle".

$\mathcal{T}_\infty$ = topologia forte delle inclusioni $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$

$U \subseteq \mathbb{R}^\infty$ aperto sse $U \cap \mathbb{R}^n$ aperto $\forall n$

è S, $\neg$C1, $\neg$C2, NON METRIZZABILE,

T2 e anche N,

ARCO-CONNESSO e LOC. A-C.

è la topologia indotta da β (su $\mathbb{R}^\infty$ come $\hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)

$\cup$|

La topologia $\mathcal{T}_{d_\infty}$ indotta dalla metrica

$d_\infty : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, $d_\infty(\underline{x},\underline{y}) = d_n(\underline{x},\underline{y})$ se $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^n$.

che è S, C1, C2,

T2, anche N

ed è la topologia indotta dalla π

β **box topology** su $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

base di aperti $\prod_{\mathbb{N}} U_i$ con U_i aperto $\mathbb{R}$.

è $\neg$S, $\neg$C1, $\neg$C2, non metrizzabile,

T2 e anche N,

nessuna proprietà di connessione

$\cup$|

π topologia prodotto su $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

base di aperti $\prod U_i$ con U_i aperto $\mathbb{R}$, $=\mathbb{R}$ per $\forall\forall i$

è metrizzabile perché prodotto numerabile di spazi metrici,

quindi S, C1, C2,

T2, N,

AC e LAC,

non compatto né loc.

Nota: $S^\infty \subseteq \mathbb{R}^\infty$ (unione delle $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$) e $[0,1]^\infty = \bigcup [0,1]^n$ sono chiusi ma non compatti (né per $\mathcal{T}_\infty$, né per $\mathcal{T}_{d_\infty}$).

su $\mathbb{R}^\infty$ con topologia τ_∞ (indotta dalle inclusioni $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$):

$A \subseteq \mathbb{R}^\infty$ è $\begin{cases}\text{aperto}\\ \text{chiuso}\end{cases}$ sse $\forall n$ $A \cap \mathbb{R}^n$ è $\begin{cases}\text{aperto}\\ \text{chiuso}\end{cases}$ di $\mathbb{R}^n$

in particolare $\mathbb{R}^m \cap \mathbb{R}^n = \begin{cases}\mathbb{R}^m & \text{se } m \leq n\\ \mathbb{R}^n & \text{se } m \geq n\end{cases}$, e in ogni caso sono chiusi, dunque $\mathbb{R}^m$ sono chiusi di $\mathbb{R}^\infty$,

ma non sono aperti perché $\mathbb{R}^m$ non è aperto in $\mathbb{R}^n$ per $m < n$.

se $A \subseteq \mathbb{R}^\infty$: $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^\infty :$ ogni intorno di x in $\mathbb{R}^\infty$ interseca $A\}$

notare che non basta scrivere $A = \cup A_n$ con $A_n = A \cap \mathbb{R}^n$ e poi usare $\cup \bar{A}_n$ ($\bar{A}_n$ = chiusura in $\mathbb{R}^n$)

perché l'unione potrebbe non essere un chiuso di $\mathbb{R}^\infty$.

$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^\infty :$ esiste un intorno di x in $\mathbb{R}^\infty$ che è contenuto in $A\}$

notare anche qui che non c'è una ricetta evidente a partire da $A_n = A \cap \mathbb{R}^n$ ...

consideriamo $[0,1]^\infty$: è chiuso perché $\cap \mathbb{R}^n$ è $[0,1]^n$ che è chiuso

non è compatto perché $U_n = \mathbb{R}^n \times (0,1)^\infty$ è ricoprimento aperto e non ha sottoricopr. finiti.

se $A \subseteq \mathbb{R}^\infty$ e $A \not\subseteq \mathbb{R}^n$ per tutti gli n, cioè $\forall n$ esiste $x \in A$, $x \notin \mathbb{R}^n$, possiamo trovare

un ricoprimento aperto che non ammette sottoricoprimenti finiti

del tipo $U_n = \mathbb{R}^n \times \prod_i V_i$, scegliendo i V_i in modo da escludere punti di A ...

quindi i compatti sono solo quelli $\subseteq \mathbb{R}^n$ per qualche n.

per qualsiasi $x \in \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^\infty$, basta prendere intorni $\mathbb{R}^n \times \prod (-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ con ε_i sufficientemente piccoli

per ESCLUDERE i punti di una successione che non sta definitivamente in $\mathbb{R}^m$ per qualche m.

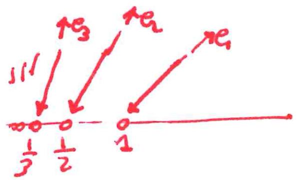
Quindi le successioni e_n o $\frac{1}{n} e_n$ non possono convergere,

e quelle convergenti a zero sono quelle contenute in qualche $\mathbb{R}^m$ e lì convergenti a 0.

Esistono anche successioni non definitivamente nulle e convergenti a 0.

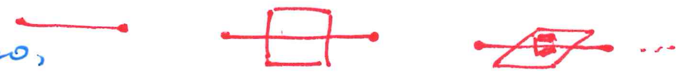
Esempi:

usiamo A = unione delle semirette aperte $\binom{1/n}{0} + e_n\mathbb{R}_{>0}$



allora la chiusura in $\mathbb{R}^n$ di $A\cap\mathbb{R}^n$ contiene i punti $\binom{1/m}{0}$ per $m\le n$,
quindi l'unione di queste chiusure non è chiusa perché contiene $\binom{1/n}{0}$ $\forall n$, e non $\binom{0}{0}$.

usiamo A = unione degli ipercubetti $(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})^n \subseteq \mathbb{R}^n$



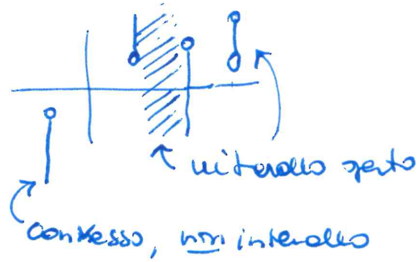
allora $A\cap\mathbb{R}^n$ = unione degli ipercubetti fino all'n-esimo,
e l'interno di $A\cap\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è $(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})^n$.
però l'intersezione di tutti questi (per ogni n) è solo $\{0\}$, che non è aperto.
In effetti l'interno di A in $\mathbb{R}^\infty$ è <u>vuoto</u>, ma è vero che 0 ha un intorno contenuto in ogni $A\cap\mathbb{R}^n$.

Il primo esempio dice che $\bar{A}$ (chiusura di A in $\mathbb{R}^\infty$) contiene e può essere strettam. maggiore di $\bigcup \bar{A}_n$ (unione delle chiusure in $\mathbb{R}^n$ di $A_n = A\cap\mathbb{R}^n$).

Il secondo esempio dice che A° (interno di A in $\mathbb{R}^\infty$) non si può calcolare come intersezione degli A_n° (interno di $A_n = A\cap\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$), anche se si escludono i casi in cui A_n o A_n° sono vuoti.

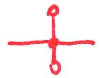
Alcuni esempi di topologie d'ordine : LESSICOGRAFICA USANDO LE SEMIRETTE DX E SX

su $\mathbb{R}^2$



sulle rette verticali induce topol. euclidea

sulle rette orizzontali induce topol. discreta

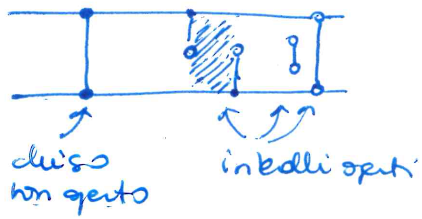


è la topologia prodotto di (IR, DISCRETA) × (IR, EUCLIDEA)

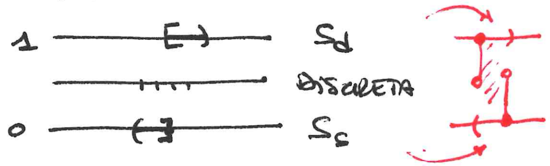
quindi è METRIZZABILE, T2, N, C1, ¬S, ¬C2

non connesso (chi sono cc?) ma loc. arcoconnesso. (base di intorni di punto?)

su $\mathbb{R}\times[0,1]$



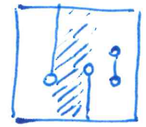
sulle rette orizzontali :



QUESTA TOPOL. D'ORDINE NON è METRIZZABILE perché su alcuni sottinsiemi dà topol. di Sorgenfrey non metrizzabili!

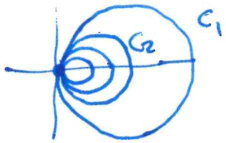
quindi non è la topologia indotta da $(\mathbb{R}^2, lex)$!

su $[0,1]^2$



Se qui usiamo la topologia degli intervalli $(a,b) = \{x : a<x<b\}$ invece che quella delle semirette $\{x : x<a\}$ e $\{x : x>b\}$ abbiamo una topologia STRETTAMENTE più fine : per esempio tutti i chiusi $\ni \binom{0}{0}, \binom{1}{1}$ (sono min e max dell'ordine)

Questo è un compito (09/06/2017):

$X = \bigcup C_n =$  con topologia τ indotta da $\mathbb{R}^2$ (come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$).

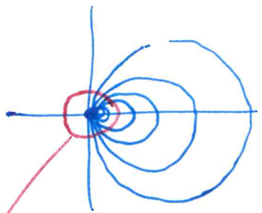
circonferenze centro $(1/n, 0)$ raggio $1/n$

APERTI / CHIUSI = sono le intersezioni con X di aperti/chiusi del piano $\mathbb{R}^2$.

Le circonferenze C_i sono chiusi di $\mathbb{R}^2$, quindi chiusi di X.

<u>non sono aperti di X</u> perché ogni intorno di 0 in $\mathbb{R}^2$ interseca, e anzi CONTIENE infinite C_n (per $n \gg 0$, raggio abbastanza piccolo) e quindi C_i non può essere intersezione con X di aperto di $\mathbb{R}^2$.

invece $C_i \setminus \{0\}$ è aperto di X (ma non di $\mathbb{R}^2$...).

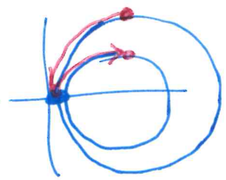


intorno di 0 in $\mathbb{R}^2$ contiene tutte C_n per $n \gg 0$

Siccome è topologia indotta su un sottoinsieme della top. di $\mathbb{R}^2$ che è metrizzabile, la topologia τ è metrizzabile, dunque C1, e si vede subito SEPARABILE (basta prendere un sottoinsieme denso numerabile su ogni circonferenza), quindi C2.

In particolare è T2 normale.

È connesso per archi e localm. conn. per archi: il cammino tra due punti passante per 0 è continuo, perché lo è composto con $X \hookrightarrow \mathbb{R}^2$:



G2B 19/20 ~~T 1 15'~~

È uno spazio compatto T_2, quindi i chiusi sono i compatti.

Ora usiamo su ogni C_n la topologia indotta dal piano, e consideriamo le inclusioni $C_n \hookrightarrow X$ ($\hookrightarrow \mathbb{R}^2$), diciamo σ la topologia su X forte per la famiglia delle inclusioni $C_n \hookrightarrow X$.

Quindi U è aperto di σ sse $U \cap C_n$ è aperto di C_n per $\forall n$.

Certamente $\tau \leq \sigma$ perché se U è aperto per τ, allora $U = A \cap X$ con A aperto di $\mathbb{R}^2$,

e quindi $U \cap C_n = A \cap X \cap C_n = A \cap C_n$ aperto di C_n per ogni n.

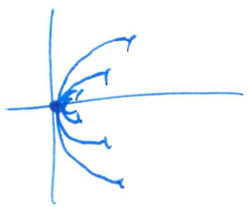
D'altra parte $\sigma \gneqq \tau$ perché gli intorni di O per τ contengono tutte le circonf per $n \gg 0$,

mentre gli intorni di O per σ basta che contengano un aperto in ogni C_n.

In particolare non c'è una base numerabile per gli intorni di O per σ,

quindi la topologia σ non è nemmeno C_1, quindi non metrizzabile.

Però σ e τ coincidono su $X \setminus \{O\}$.



intorno di O per σ,
non per τ.

G2B 19/20 T116

<u>Domande</u>: passare da "esiste base intorni connessi" a "esiste base di intorni aperti connessi", cioè la definizione di "localmente connesso".

<u>LOCALMENTE CONNESSO ≡ OGNI PUNTO ha base di intorni connessi</u>

se U aperto dello spazio, e $V \subseteq U$ è una componente connessa di U, allora V è APERTO: infatti $\forall y \in V$ c'è un intorno (di base) connesso $V_y \subseteq U$, ma $\underset{\ni y}{V \cap V_y \neq \emptyset}$, quindi $V \cup V_y$ connesso, e quindi $V_y \subseteq V$ (altrimenti V potrebbe essere aumentato rimanendo connesso), quindi V contiene un intorno (connesso) di ogni suo punto.

<u>LE COMPONENTI CONNESSE DI APERTI SONO APERTE</u>

$\Rightarrow$ LE COMPONENTI CONNESSE DI X SONO APERTE
$\not\Leftarrow$ (VEDI SENO DEL TOPOLOGO...)

Ora prendiamo un punto x dello spazio e un intorno U di x, che possiamo supporre APERTO (per def ogni intorno ne contiene uno aperto!); sia U_x la componente connessa di U che contiene x, allora U_x è aperto, è connesso, contiene x, dunque è intorno aperto connesso di x; abbiamo visto che ogni intorno di x ne contiene uno aperto connesso:

<u>OGNI PUNTO HA una base di intorni APERTI CONNESSI</u>

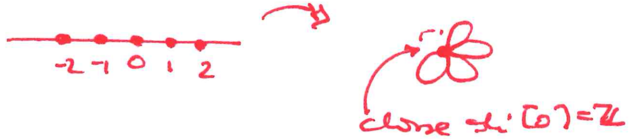
OVVIAMENTE

<u>NOTA</u>: per dire che x ha base int. APERTI CONNESSI usiamo che <u>TUTTI i punti</u> (non solo x) hanno una base di intorni connessi!

Esempio di spazio $C1$ un cui quoziente non sia $C1$:

Consideriamo $X = \mathbb{R}/\sim$ dove $\sim$ è la relazione $a \sim b$ sse $a, b \in \mathbb{Z}$,
dunque X è quoziente di $\mathbb{R}$ in cui tutti i punti di $\mathbb{Z}$ sono identificati tra loro,
e usiamo la topologia quoziente di quella reale

Si vede che X è un fiore con infiniti petali:



E si vede che non è $C1$ (nemmeno $C2$ quindi)
usando il solito argomento diagonale di Cantor per gli intorni di $[0]=\mathbb{Z}$:
supponendo di avere una base numerabile, se ne trova uno che non contiene nessuno di quelli (gli intorni di 0 nel quoziente devono essere intorni di ogni $z \in \mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$:

).

Nota: da NON CONFONDERE con il quoziente algebrico $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ in quanto gruppi additivi, dove la relazione è $r \sim s$ sse $r, s \in \mathbb{R}$ e $r - s \in \mathbb{Z}$:
in questo caso l'insieme quoziente con topologia indotta è $\cong S^1$,
perché isomorfo a $[0,1]/\sim$ dove $0 \sim 1$ (identificando solo gli elementi $0, 1$)

GRB 19/20 ~~T118~~

Un altro compito (26 agosto 19): topologia di Zariski su $\mathbb{R}^2$.

$\mathcal{C} := \{$ sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ che sono zeri di un insieme di polinomi, cioè zeri di un sistema di equazioni polinomiali $\}$

Sono chiusi per topologia: zeri di 1 è $\emptyset$, zeri di 0 è $\mathbb{R}^2$,
se C zeri di F_i e D zeri di G_j allora $C \cup D$ è zeri di $F_i G_j$,
se C_i zeri di F_{ij}, allora $\bigcap C_i$ è dato zeri di tutti F_{ij} insieme.

La topologia Z = complementari di $\mathcal{C}$ è più fine di quella usuale su $\mathbb{R}^2$,
quindi è separabile ($\mathbb{Q}^2$ interseca ogni aperto euclideo, quindi ogni aperto Z.)
Invece non è C1 e quindi nemmeno C2: gli intorni di un punto si ottengono come complementari di chiusi che non contengono il punto; se ne abbiamo una quantità numerabile possiamo trovarne uno che non contiene nessuno di questi, scegliendo qualche zero di polinomio.

Nella topologia Z due aperti non vuoti hanno sempre intersezione non vuota,
quindi non può essere T2, né R, né CR, né N.
Invece è T1 (quindi T0) perché i punti sono chiusi (intersezione di due rette).
NON è CR, oppure è T1 e non T2, quindi non è metrizzabile

E' connesso perché aperti $\neq \emptyset$ hanno intersezione $\neq \emptyset$, e per lo stesso motivo è loc. connesso.
E' anche arco-connesso, perché $I \to \mathbb{R}^2$ continua per topol. euclidea lo è anche per Z (su $\mathbb{R}^2$).

E' chiaramente compatto e localmente compatto.

~~T1-19~~

Dal compito di settembre 19:

diciamo solo perché non è la topologia euclidea:

abbiamo la topologia su $\mathbb{R}^2$ che rende continue tutte le inclusioni $r \hookrightarrow \mathbb{R}^2$

dove r è retta nel piano. Quindi $U \subseteq \mathbb{R}^2$ appartiene a questa topologia

sse $U \cap r$ è aperto (di r con topol. usuale indotta da $\mathbb{R}^2$)

Troviamo un aperto di questa topologia (intorno di $0 \in \mathbb{R}^2$) che non sia

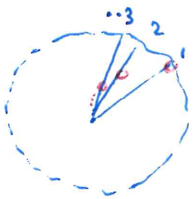
un aperto euclideo, cioè non contenga un disco euclideo centrato in 0:

Partiamo da $D(0,1^-)$ che è un aperto euclideo,

e in ogni retta di inclinazione n togliamo un punto

(per esempio a distanza $1/n$ da 0) in modo che questa famiglia

di punti "tenda a zero" e non siano più di due su una retta:



allora $D(0,1^-) \setminus \{\text{questi punti}\}$ non è aperto euclideo (non contiene

nessun dischetto centrato in 0)

ma è aperto della topologia in questione:

su ogni retta interseco un segmento

aperto tolti al più due punti!