L' ultima settimana del corso è dedicata alla classificazione delle superficie reali compatte:

dopo la definizione introduciamo due argomenti:

- rappresentazioni poligonali (delle SRC come quozienti di poligoni piani) e CHIRURGIA delle superficie per passare da una rappresentazione ad altre della stessa superficie: queste tecniche permetteranno di ricondursi ai casi standard della classificazione

- triangolazioni e invarianti associati alle triangolazioni finite: CARATTERISTICA di EULERO-POINCARÉ e GENERE TOPOLOGICO; questi saranno gli invarianti fondamentali, oltre alla ORIENTABILITÀ, per la classificazione

Mettendo insieme le due cose potremo scrivere il teorema di classificazione.

Una **SUPERFICIE REALE** è uno SPAZIO TOPOLOGICO T2 e C1, connesso, dotato di un ATLANTE di APERTI OMEOMORFI AD APERTI di $\mathbb{R}^2$.
chiediamo anche che le mappe di transizione tra due carte dell'atlante sia C^1, allo scopo di definire l'orientabilità.

Si dice COMPATTA se lo è come sp. topologico.
Si dice ORIENTABILE se esiste un atlante con jacobiani delle mappe di transizione sempre di determinante > 0.

Esempi di base:

Sfera $\quad \mathbb{S} := \mathbb{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

toro $\quad \mathbb{T} := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{R}^4$ (si immerge anche in $\mathbb{R}^3$)

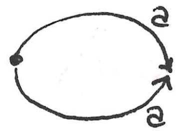
otre Klein $\quad \mathbb{K}$ si immerge in $\mathbb{R}^4$, non in $\mathbb{R}^3$

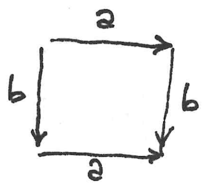
p. proiett. $\quad \mathbb{P} := \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si immerge in $\mathbb{R}^4$, non in $\mathbb{R}^3$.

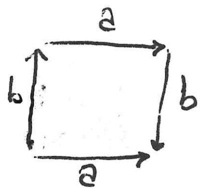
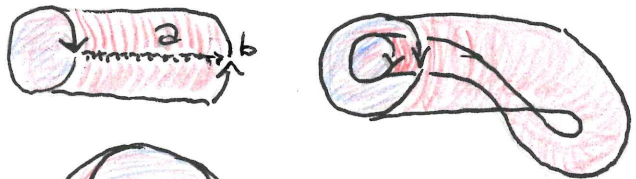
Conviene rappresentarli in modo uniforme come quoziente (topologico) di poligoni piani.

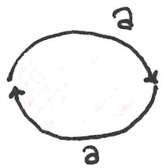
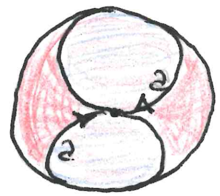
Diciamo RAPPRESENTAZIONE POLIGONALE di una superficie (reale compatta) un poligono piano con una regola di identificazione dei lati tale che lo spazio topologico quoziente sia omeomorfo alla superficie stessa.

Vediamo alcune rappresentazioni poligonali per i 4 esempi di base:

sfera  poligono con 2 lati, regola $a\bar{a}$ 

toro  poligono con 4 lati, regola $a b \bar{a} \bar{b}$ 

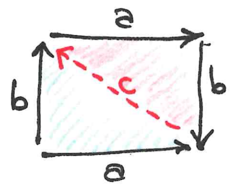
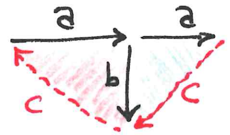
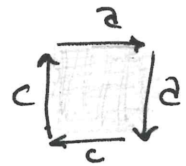
botte Klein  poligono con 4 lati, regola $a b \bar{a} b$ 

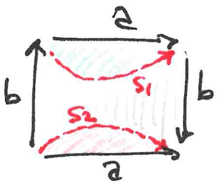
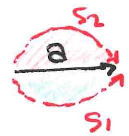
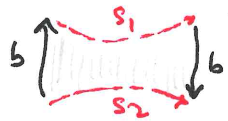
p. proiett  poligono con 2 lati, regola $a a$ 

SFERA e TORO sono ORIENTABILI,
BOTTE KLEIN e P.PROIETTIVO no
perché contengono NASTRI di MOEBIUS.

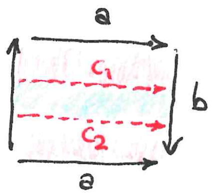
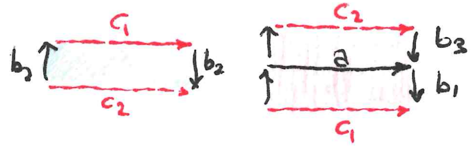
NOTA: vi è un sito internet in cui "vendono" bottiglie di Klein di vari formati: cercare "klein bottle", ma attenzione perché sbagliano il genere!

Le rappresentazioni poligonali possono essere modificate per chirurgia, cioè taglia su un nuovo lato e incolla lungo lati identificati.
Facciamo un paio di esempi:

$\mathbb{K} = ab\bar{a}b =$  $=$  $= aacc =$ 

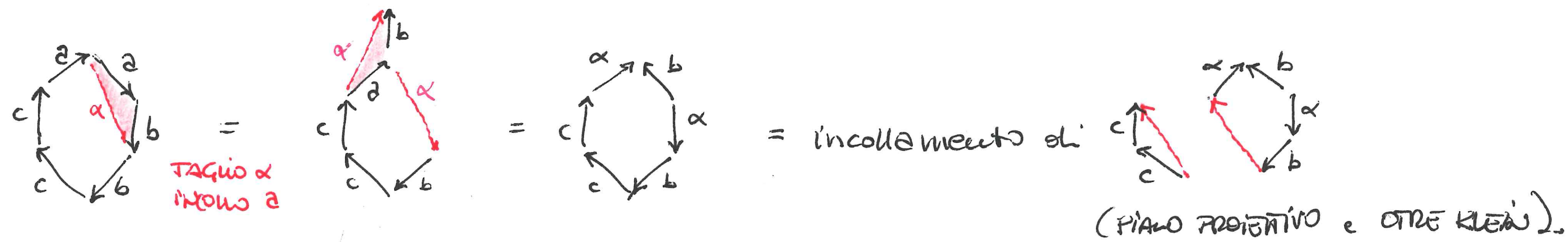
$=$  $=$ incollamento di  con 

(DISCO) (NASTRO DI MOEBIUS)

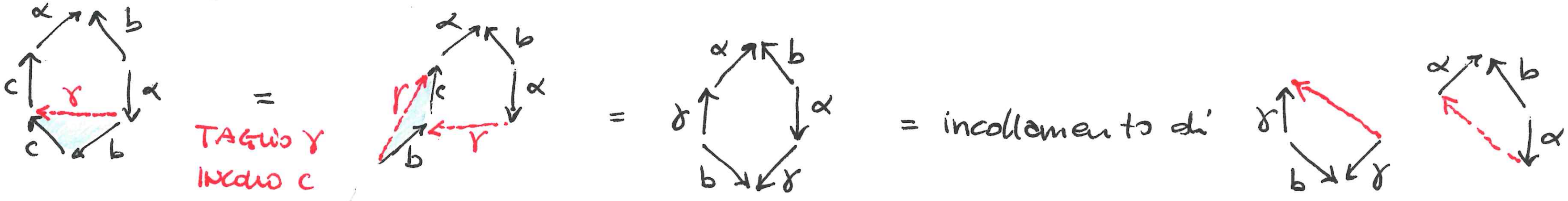
$=$  $=$ incollamento di 

(DUE NASTRI DI MOEBIUS: notare che c_1 e c_2 si incollano per formare un cerchio!)

Altro esempio importante:

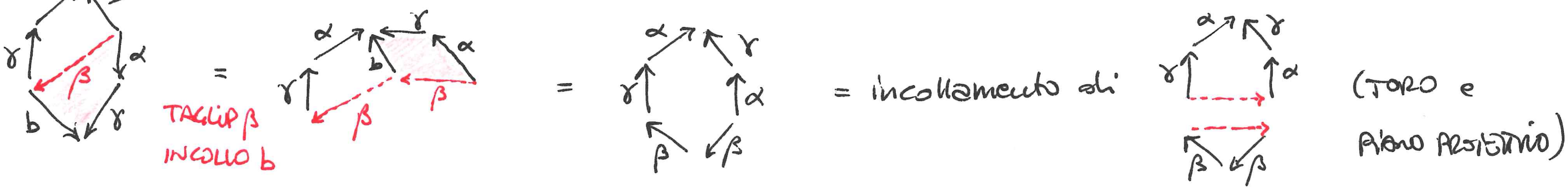


$aabbcc$ $\qquad$ $a\bar{b}abcc$



$a\bar{b}ac\bar{b}c$

(DUE NASTRI DI MOEBIUS)



$ca\bar{c}\bar{a}bb$

Da cui si vede che incollando opportunamente un piano proiettivo aa con $\begin{cases} \text{un toro } bc\bar{b}\bar{c} \\ \text{un otre di Klein } bc\bar{b}c \end{cases}$ si ottengono due superfici omeomorfe $(aabbcc)$.

Dopo questi esempi vediamo l'operazione chirurgica fondamentale:

la SOMMA CONNESSA DI DUE SUPERFICIE REALI S_1 ed S_2

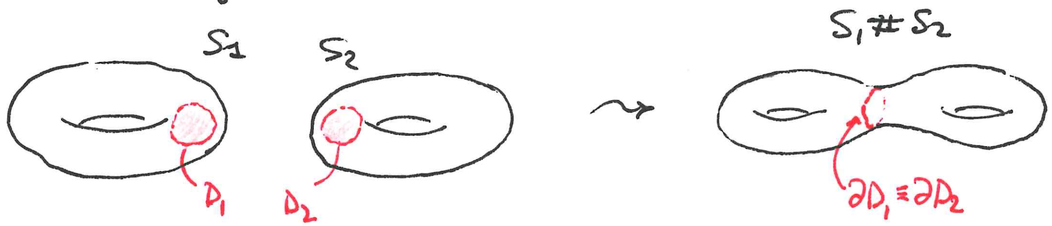
si ottiene scegliendo un disco $D_1 \subseteq S_1$, un disco $D_2 \subseteq S_2$ (disco $\cong D_2 \subseteq \mathbb{R}^2$)

e un omeomorfismo α tra ∂D_1 e ∂D_2 (i bordi dei dischi sono $\cong S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$)

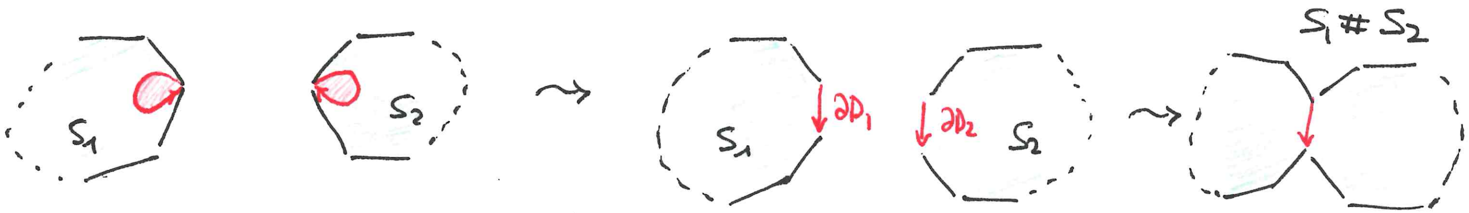
tramite
$$S_1 \# S_2 = (S_1 \setminus D_1) \sqcup (S_2 \setminus D_2)/\sim$$

dove $\sim$ è relazione di equivalenza $d_1 \sim \alpha d_1$ per ogni $d_1 \in \partial D_1$ ($\alpha d_1 \in \partial D_2$).

Disegno per l'immaginazione:



In termini di rappresentazioni poligonali si può vedere come INSERIMENTO:



e quindi come GIUSTAPPOSIZIONE DELLE DUE RAPPRESENTAZIONI:

$\mathbb{P} \# \mathbb{P} = aa\,bb$, $\mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} = aa\,bb\,cc$
$\mathbb{P} \# \mathbb{K} = aa\,bcb\bar{c}$
$\mathbb{P} \# \mathbb{T} = aa\,bcb\bar{c}$

avevamo visto per dimostrare essere la stessa superficie!

Per l'operazione di # tra superficie reali compatte possiamo vedere:

(0) è ben definita (non dipende dalla scelta dei dischi da togliere, né dall'omeomorfismo tra i bordi)

(1) è commutativa: $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$ (= significa omeomorfo)

(2) è associativa : $(S_1 \# S_2) \# S_3 = S_1 \# (S_2 \# S_3)$

(3) ha <u>la sfera</u> come elemento neutro : $S_1 \# \mathbb{S} = S_1 = \mathbb{S} \# S_1$

ma <u>non ha inversi</u> : infatti abbiamo $\mathbb{P} \# \mathbb{K} = \mathbb{P} \# \mathbb{T}$, ma $\mathbb{K} \neq \mathbb{T}$,

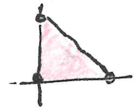
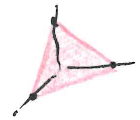
quindi non può esistere ? tale che $\mathbb{P} \# ? = \mathbb{S}$ (elemento neutro)

Nelle prossime pagine introduciamo le TRIANGOLAZIONI per sup. reali,

e gli invarianti (CARATTERISTICA di Eulero Poincaré χ e GENERE g) per classificazione

Le definizioni fondamentali sono:

Un triangolo di una superficie S è un omeomorfismo $\Delta \xrightarrow{i} S$ tra Δ e $i\Delta$,

dove Δ è un triangolo euclideo standard piano, tipo  o 

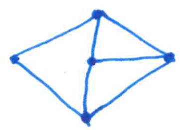
Una triangolazione di una superficie S è una suddivisione in TRIANGOLI t.c.:

(1) per ogni punto $P \in$ TRIANGOLO $\setminus$ LATI : il TRIANGOLO è intorno di P.

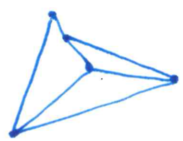
(2) per ogni punto $P \in$ LATO $\setminus$ VERTICI : il LATO è comune a ESATTAMENTE 2 TRIANGOLI, le cui unione è intorno di P.

(3) per ogni punto P VERTICE di triangoli : i TRIANGOLI aventi in comune quel vertice sono finiti, ordinati ciclicamente hanno due a due esattamente un lato in comune, e la loro unione è intorno di P.

Esempi di non triangolazioni:



non vale (2)



non vale (3)

Il primo risultato importante è il seguente teorema:

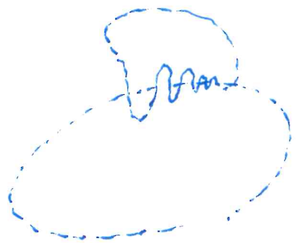
OGNI SUPERFICIE REALE AMMETTE TRIANGOLAZIONI,

e le TRIANGOLAZIONI SONO <u>FINITE</u> <u>sse</u> la SUPERFICIE È COMPATTA.

(<u>significa</u> che hanno un numero finito di triangoli)

Non dimostriamo questo risultato, ma diciamo solo qual è la difficoltà nel dimostrarlo (difficoltà che richiede solo qualche esercizio di Analisi 1): per definizione una sp. reale ha un atlante con aperti del piano, e il problema è come trasformare un atlante (collezione di aperti, che naturalmente si intersecano tra loro in generale) in una triangolazione. Se gli aperti dell'atlante si intersecano in un insieme discreto di punti è facile, ma i bordi degli aperti possono essere complicati:

così avere intersezioni in insiemi non discreti.



La soluzione consiste nel deformare uno dei due aperti in modo da avere ancora un atlante, e avere intersezioni discrete.

Le definizioni fondamentali si danno per <u>SUP. REALI COMPATTE</u>, per le quali otteniamo <u>TRIANGOLAZIONI FINITE</u>:

detto T il numero di TRIANGOLI, L quello dei lati, V quello dei vertici:

diciamo <u>CARATTERISTICA DI EULERO-POINCARÉ di S, il numero $\chi_S := V - L + T$</u>

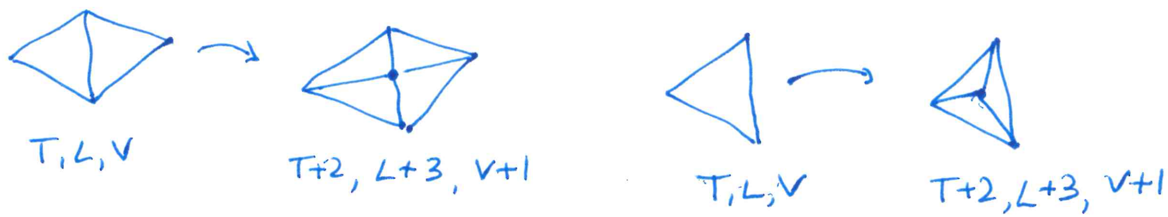
e diciamo

GENERE (TOPOLOGICO) di S il numero $g_S := \begin{cases} \dfrac{2-\chi_S}{2} & \text{se } S \text{ è orientabile} \\ 2-\chi_S & \text{se } S \text{ non è orientabile.} \end{cases}$

Il fatto che la definizione di χ sia ben posta, cioè <u>non</u> dipenda dalla triangolazione scelta per calcolarla si vede in questo modo:

(1) date due triangolazioni, eventualmente deformando una affinché le intersezioni dei lati dei triangoli diano insiemi discreti, si può trovare una triangolazione PIÙ FINE DI ENTRAMBE (i cui triangoli siano suddivisioni dei triangoli)

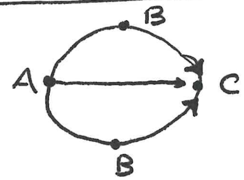
(2) quindi basta confrontare una triangolazione e una più fine, e i raffinamenti si fanno con un numero finito di mosse possibili quali:



e la somma alternata rimane la stessa!

Vediamo gli esempi di base:

$\mathbb{S}$ = sfera

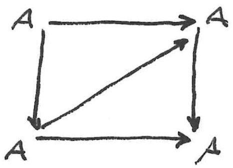


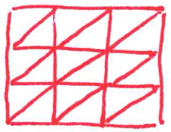
2T
3L
3V

$\chi_{\mathbb{S}} = 3-3+2 = 2$
ORIENTABILE

$g_{\mathbb{S}} = \frac{2-\chi}{2} = 0$

$\mathbb{T}$ = toro



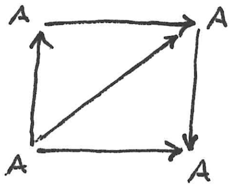


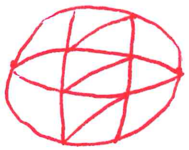
2T
3L
1V

$\chi_{\mathbb{T}} = 1-3+2 = 0$
ORIENTABILE

$g_{\mathbb{T}} = \frac{2-\chi}{2} = 1$

$\mathbb{K}$ = otre Klein



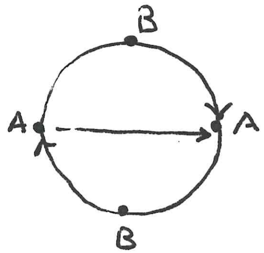


2T
3L
1V

$\chi_{\mathbb{K}} = 1-3+2 = 0$
NON ORIENTABILE

$g_{\mathbb{K}} = 2-\chi = 2$

$\mathbb{P}$ = p proiettivo



2T
3L
2V

$\chi_{\mathbb{P}} = 2-3+2 = 1$
NON ORIENTABILE

$g_{\mathbb{P}} = 2-\chi = 1$

Nota: nessuna delle triangolazioni proposte rispetta la nostra definizione, ma danno comunque il risultato giusto; ci sono definizioni più deboli in cui anche queste sono triangolazioni! In rosso, altre triangolazioni.

Intermezzo : se non l'avete mai fatto prima, questo è il momento di mostrare SOLO in BASE a $\chi_S = 2$ che esiste solo un numero finito di SOLIDI PLATONICI, e quali, usando il fatto che questi danno triangolazioni / poligonazioni di S :

conviene impostare
N = numero di poligoni regolari
ℓ = numero di lati di ciascun poligono regolare
m = numero di poligoni regolari che si incontrano in un vertice

allora χ si calcola con

$$T = N \cdot \ell$$
$$L = \frac{N}{2}\ell + N\ell$$
$$V = \frac{N \cdot \ell}{m} + N$$

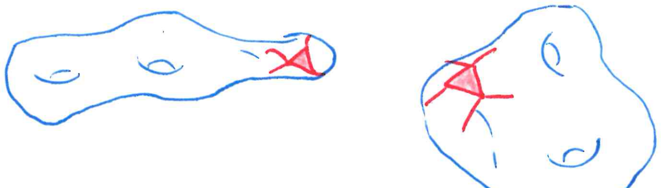
(ogni poligono viene triangolato con un punto interno)

e si vede quasi subito che $\ell < 6$ (imponendo $\chi = 2$).

Vediamo il comportamento di χ e g per $\#$:

$$\chi_{S_1 \# S_2} = \chi_{S_1} + \chi_{S_2} - 2 \qquad \text{e} \qquad g_{S_1 \# S_2} = \begin{cases} g_{S_1} + g_{S_2} & \text{se } S_1 \text{ e } S_2 \text{ hanno lo stesso carattere} \\ 2g_1 - g_2 & \text{se } g_1 \text{ ORIENTABILE e } g_2 \text{ \underline{NON} orientabile} \end{cases}$$

La seconda formula segue dalla prima, e la prima si dimostra facilmente applicando $\#$ scegliendo due triangoli di due triangolazioni per S_1 e S_2 quali dischi:



T_1, L_1, V_1 $\qquad$ T_2, L_2, V_2

$\rightarrow$ otteniamo una triangolazione di $S_1 \# S_2$ con:

$T_1 + T_2 - 2$, $L_1 + L_2 - 3$, $V_1 + V_2 - 3$

e quindi
$$\chi_{S_1 \# S_2} = (T_1 + T_2 - 2) - (L_1 + L_2 - 3) + (V_1 + V_2 - 3) =$$
$$= (T_1 - L_1 + V_1) + (T_2 - L_2 + V_2) - 2 = \chi_{S_1} + \chi_{S_2} - 2 .$$

Per la seconda formula, tener conto che $S_1 \# S_2$ è ORIENTABILE <u>sse</u> entrambe S_1 e S_2 lo sono; basta che una <u>non</u> sia orientabile affinché la somma connessa non lo sia.

Per induzione, possiamo iterare le formule sugli esempi di base:

$\mathbb{T}^{\# n}$	$\chi = 0 - 2(n-1) = 2-2n$	$g = \frac{2-\chi}{2} = n$
$\mathbb{T}^{\# n} \# \mathbb{P}$	$\chi = (2-2n)+1-2 = 1-2n$	$g = 2-\chi = 2n+1$
$\mathbb{T}^{\# n} \# \mathbb{K}$	$\chi = (2-2n)+0-2 = -2n$	$g = 2-\chi = 2n+2$
$\mathbb{P}^{\# n}$	$\chi = n - 2(n-1) = 2-n$	$g = 2-\chi = n$
$\mathbb{K}^{\# n}$	$\chi = 0 - 2(n-1) = 2-2n$	$g = 2-\chi = 2n$

NOTARE I VALORI ASSUNTI: la χ diventa quasi subito NEGATIVA, PARI per # di $\mathbb{T}$, e g assume valori POSITIVI, e li assume tutti: qui si vede il significato intuitivo di g per sup. orientabili:

("numero di buchi nella superficie!).

nel caso non orientabile tiene conto anche della non-orientabilità (non esiste interno/esterno).

Possiamo ora enunciare il teorema di classificazione, che si può esprimere in vari modi equivalenti:

(0) ogni superficie reale compatta ammette una rappresentazione poligonale del tipo $a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \cdots a_n b_n \bar{a}_n \bar{b}_n$ (per $n \geq 0$) oppure $a_1 a_1 \cdots a_n a_n$ (per $n > 0$);

(1) ogni superficie reale compatta è omeomorfa a una del tipo
$\mathbb{T}^{\# n}$ (per $n \geq 0$, $\mathbb{T}^{\# 0} = \mathbb{S}$) oppure $\mathbb{P}^{n}$ (per $n > 0$);

(2) ogni superficie reale compatta è omeomorfa a una del tipo
$\mathbb{T}^{\# n}$ (per $n \geq 0$, $\mathbb{T}^{\# 0} = \mathbb{S}$) oppure $\mathbb{T}^{\# n} \# \begin{cases} \mathbb{P} \\ \mathbb{K} \end{cases}$ (per $n \geq 0$)

(a) due superficie reali compatte sono omeomorfe sse
hanno lo stesso carattere di orientabilità e lo stesso genere

(b) le classi di equivalenza per omeomorfismo sono date dalle coppie (x, g) dove $x \in \{OR, NOR\}$, $g \in \mathbb{N}$ (ed è >0 per $x = NOR$)

oppure (x, χ) dove $x \in \{OR, NOR\}$, $\chi \in \begin{cases} 2 - 2\mathbb{N} & \text{se } x = OR \\ 1 - \mathbb{N} & \text{se } x = NOR \end{cases}$.

<u>Le equivalenze</u> tra i vari enunciati sono tutte facili.

Ora dimostriamo (0) tramite chirurgie:

- tramite una TRIANGOLAZIONE della superficie, tagliando su alcuni lati, possiamo avere una rappresentazione <u>poligonale piana connessa</u> in cui i lati restano da identificare a coppie (con orientamento opportuno), quindi abbiamo una PAROLA (= sequenza di LETTERE) in cui ogni LETTERA compare doppia come a, a oppure $a, \bar{a}$.

  Vogliamo allora ricondurre ogni tale parola ad una di quelle standard dell'enunciato (0) senza cambiare la superficie:

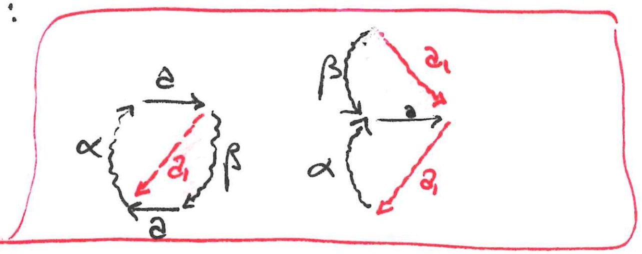
- regole di riduzione (dalle operazioni chirurgiche):

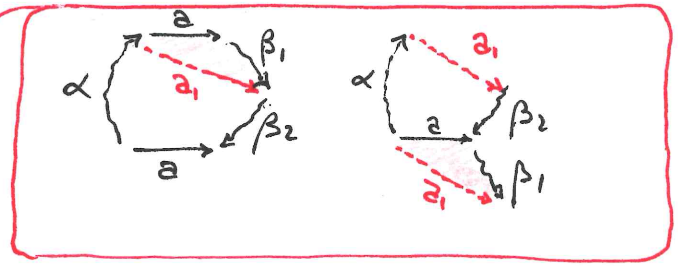
  <u>CANCELLAZIONE</u>: $a\bar{a} = \emptyset$

  <u>CICLICITÀ</u>: $a\alpha = \alpha a$

  <u>REGOLA DELLE COPPIE CONCORDI</u>: $\alpha a \beta a = \alpha \bar{\beta} a a$

  <u>REGOLA DELLE COPPIE DISCORDI</u>: $\alpha a \beta_1 \beta_2 \bar{a} = \alpha a \beta_2 \beta_1 \bar{a}$





dove α e β indicano sequenze di lettere, e se $\beta = b_1 b_2 \dots b_n$, allora $\bar{\beta} = \bar{b}_n \dots \bar{b}_2 \bar{b}_1$.

Nota: la regola delle coppie concordi può cambiare il carattere delle altre! la regola delle coppie discordi invece no.

- Con queste regole possiamo ricondurre ogni parola a quelle standard:

(1) si cancellano le eventuali lettere discordi adiacenti

(2) se ci sono lettere concordi, si riuniscono e si scompongono per # dei $\mathbb{P}$ finché si esauriscono tutte le lettere concordi:

$$\alpha a \beta a \gamma = \gamma \alpha \bar{\beta} a a = \gamma \alpha \bar{\beta} \# \mathbb{P}$$

(3) se ora rimane qualcosa, sono tutte lettere discordi SEPARATE da altre coppie discordi, si riuniscono a formare un toro che si scompone per #:

$$\alpha a \beta b \gamma \bar{a} \delta \bar{b} \varepsilon = \alpha a b \gamma \beta \bar{a} \delta \bar{b} \varepsilon = \alpha a b \bar{a} \delta \gamma \beta \bar{b} \varepsilon =$$

$$= b \bar{a} \delta \gamma \beta \bar{b} \varepsilon \alpha a = b \bar{a} \bar{b} \varepsilon \alpha \delta \gamma \beta a = a b \bar{a} \bar{b} \varepsilon \alpha \delta \gamma \beta = \mathbb{T} \# \varepsilon \alpha \delta \gamma \beta$$

e non si cambia il carattere delle altre coppie presenti.

(4) quando si sono esaurite tutte le coppie discordi separate da altre discordi, quello che rimane si cancella completamente

(5) Conclusione: abbiamo sequenze $\mathbb{P} \# \cdots \# \mathbb{P} \# \mathbb{T} \# \cdots \# \mathbb{T}$:

se non ci sono $\mathbb{P}$, allora è # di $\mathbb{T}$,

se c'è anche solo un $\mathbb{P}$, allora si trasforma in # di $\mathbb{P}$

(usando che $\mathbb{P} \# \mathbb{T} = \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P}$).

Esempi:

- $\mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P} = a a b b c c = \begin{cases} a a b c \bar{b} c = \mathbb{P} \# \mathbb{K} \\ a \bar{b} a c \bar{b} c = \bar{b} \bar{b} \bar{c} \bar{a} c a = \mathbb{P} \# \mathbb{T} \end{cases}$

- con una lettera possiamo fare solo $\begin{cases} a \bar{a} = \mathbb{S} \\ a a = \mathbb{P} \end{cases}$

- Con due lettere?

- con tre lettere?

•• $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_{n-1} \bar{a}_n = a_1 a_2 \bar{a}_1 a_3 \cdots a_{n-1} a_n \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_{n-1} \bar{a}_n =$

$= a_1 a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \cdots \bar{a}_{n-1} \bar{a}_n a_3 \cdots a_{n-1} a_n =$

$= \mathbb{T} \#$ induzione $= \mathbb{T}^{\# [n/2]}$.

•• $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_{n-1} a_n =$

$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_n a_n = \cdots = \mathbb{P}^{\# n}$.

Osservazioni finali:

dalla dimostrazione del teorema di classificazione si può concludere che una superficie è NON ORIENTABILE sse qualsiasi rappresentazione poligonale contiene lettere concordi sse contiene piani proiettivi sse contiene nastri di Möbius.

il teorema e la dimostrazione si estendono al caso di superfici reali compatte con bordo: si tratta di normalizzare parole che contengono anche lettere singole (che restano i bordi della superficie, dove sono tutti dei dischi).

RIASSUNTO FINALE DEL CORSO E CONTINUAZIONI AL TERZO ANNO / MAGISTRALE

G2A
- Geom. PROIETTIVA
- Forme Bil./Quadr.
- Coniche, Quadriche

G2B
- geom. differenziale (immerse)
  - CURVE
  - SUPERFICIE
- Topologia Generale
  - SUP. REALI COMPATTE

CAP (curve algebriche di grado n in $\mathbb{P}^2$)

SdR (SUP. di RIEMANN: studio delle curve COMPLESSE, geometria INTRINSECA senza riferimento alle IMMERSIONI)

Geom. Differenziale (astratta)

Topologia (studio di invarianti algebrici di spazi topologici: gruppo fondamentale).

An. Reale, **An. Funzionale** (studio delle topologie su spazi vettoriali di funzioni, duali topologici ...)

TEORIA DI GALOIS, quando si fanno estensioni infinite: bisogna considerare GRUPPI TOPOLOGICI