Tutorato 18 maggio 2020

Esercizio 1. Una proiettività ϕ di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ in sè ha come punti uniti tutti e soli quelli di una retta.

(*a*) Determinare le possibili forme di Jordan per ϕ, e la configurazione dei sottospazi uniti, specificando le posizioni reciproche.

(*b*) È vero che per ogni punto di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ passa almeno un iperpiano unito?

(*c*) Per quali punti di $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ passa almeno un piano unito?

Esercizio 2. Si consideri il fascio di coniche del piano proiettivo tali che la polare del punto $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sia la retta $(0\ 1\ 0)$, e polare del punto $\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ sia la retta $(0\ 0\ 1)$.

(*a*) Determinare l'equazione generale, le coniche degeneri e il ciclo base.

(*b*) Per ogni punto P del piano, determinare il luogo (nel piano duale) delle polari di P rispetto alle coniche del fascio.

(*c*) Si consideri l'insieme delle coniche duali delle coniche del fascio dato; determinare delle equazioni cartesiane per questo insieme nello spazio delle coniche, e dire se si tratta di un fascio (di coniche del piano duale).

Esercizio 3. Sia data la forma quadratica

$$Q(X) = X_0^2 + X_1^2 - 2X_2^2 - 2X_3^2 - 2X_0X_1 - 2X_0X_2 + 2X_0X_3 - 4X_2X_3$$

di $\mathbb{R}^4$.

(*a*) Scrivere la matrice della forma bilineare associata, classificare tale forma, determinando in particolare la segnatura, una base ortogonale e la dimensione dei sottospazi isotropi massimali.

(*b*) Classificare proiettivamente, affinemente e nello spazio euclideo usuale la quadrica $\mathcal{Q}$ di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ di equazione $Q(X) = 0$, determinando in particolare centro e assi, rette e cerchi ivi contenuti.

Esercizio 1. Sia data la superficie di parametrizzazione $\sigma(x,t) = \begin{pmatrix} xt \\ x \\ t+\sinh x\end{pmatrix}$.

(*a*) Si trovi una equazione cartesiana per σ e si dica se σ contiene rette.

(*b*) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(*c*) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(*d*) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee ortogonali alle linee coordinate della parametrizzazione.

(*e*) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema? Ridurre il sistema ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine.

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $X = \mathbb{R}^{[0,1]}$ dotato della topologia prodotto τ (delle topologie usuali su $\mathbb{R}$).

(*a*) Descrivere gli aperti di τ e una base per gli intorni della funzione nulla. La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile?

(*b*) Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

(*c*) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?

(*d*) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(*e*) La funzione $\phi : X \to X$ cha manda ogni $f \in X$ nella funzione $\phi(f)$ che manda $z \in [0,1]$ in $1/f(z)$ se $f(z) \neq 0$ e in 0 altrimenti, è continua? La funzione $X \to \mathbb{R}$ che manda $f \in X$ nell'inf dei suoi valori assoluti è continua (usando su $\mathbb{R}$ la topologia usuale)?

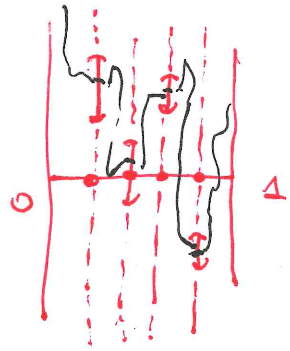
16 luglio 2018 :

$X = \mathbb{R}^{[0,1]} = \{ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \}$ con topologia PRODOTTO dalla topol. di $\mathbb{R}$.

aperti di base : per ogni $n \in \mathbb{N}$,
$a_1, \dots, a_n \in [0,1]$,
$U_1, \dots, U_n$ aperti di $\mathbb{R}$ (anche di base volendo)

gli aperti $U = U(a_i, U_i) := \{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : f(a_i) \in U_i \ \ \forall i = 1, \dots n \}$

sono una base per gli aperti di X :

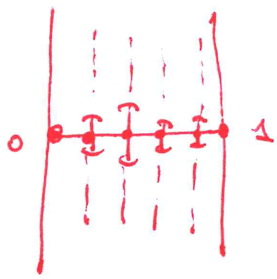


BASE DI INTORNI per $f \equiv 0$ $\left(f : [0,1] \to \mathbb{R},\ a \mapsto 0 \right)$

è data da

$$U(a_i, \varepsilon_i) = \{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : |f(a_i)| < \varepsilon_i \}$$

variando $a_1, \dots a_n \in [0,1]$
$\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \in \mathbb{R}_{>0}$ (o anche $1/m$, $m \in \mathbb{N}^*$)
$n \in \mathbb{N}$



τ è topologia prodotto su un insieme CONTINUO (cardinalità c) di indici :

è <u>SEPARABILE</u> (<u>es.</u> polinomi a coeff. razionali sono sottoinsieme denso e numerabile; <u>oppure</u> le funzioni a valori in $\mathbb{Q}$ che sono localmente costanti e cambiano valore solo per # finito di $a \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$)

<u>non è</u> C1 né C2, basta vedere che non è C1 :

supponiamo di avere una base numerabile di intorni di 0, sia

$U_1, U_2, \dots U_n, \dots$

che danno condizioni sui punti $a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}, \ldots$

e certamente esiste $a \in [0,1]$ che è $\neq a_{ij}$ (perché sono in quantità numerabile),

allora $U = \{ f : f(a) \in (-1,1) \}$

<u>non</u> contiene nessuno degli U_i,

e però è aperto $\ni \underline{0}$, quindi intorno di 0.

In particolare questo spazio <u>non</u> è pseudometrizzabile (perché non è C1), però è CR perché prodotto di spazi pseudometrizzabili, usando per ogni $a \in [0,1]$ le pseudometriche

$$d_a(f,g) = |f(a) - g(a)| \quad \text{(distanza in } \mathbb{R} \text{ tra } f(a) \text{ e } g(a)\text{)}.$$

Essendo prodotto di spazi T2 è anche T2, quindi $T3\frac{1}{2}$.

Mi aspetto che sia T4, cioè normale, ma non è proprio banale.

Le proprietà di connessione e compattezza seguono dalle regole generali per i prodotti.

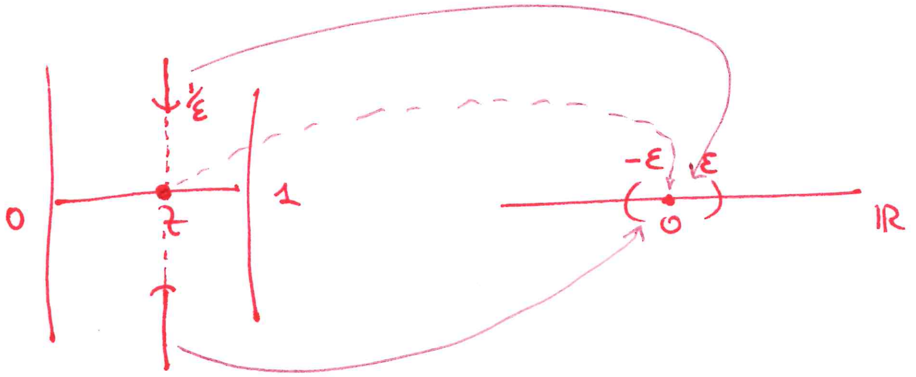
Per vedere se $\phi : X \to X$ è continua basta vedere

se per ogni $t \in [0,1]$ ([illegible]) la composizione

$$\pi_t \circ \phi : X \to X \to \mathbb{R}$$

$$f \longmapsto \phi(f) \longmapsto \pi_t(\phi(f)) = \begin{cases} 1/f(t) & \text{se } f(t) \neq 0 \\ 0 & \text{se } f(t) = 0 \end{cases}$$

è continua, e <u>non</u> lo è: per fissato t, l'antiimmagine di un intorno $(-\varepsilon, \varepsilon)$ di 0 in $\mathbb{R}$ <u>non</u> è aperto in X.



la funzione $X \to \mathbb{R}$: $f \longmapsto \inf |f(t)|$

ha come antiimmagine di $(\varepsilon, +\infty)$ aperto di $\mathbb{R}$

un sottoinsieme di X in cui dobbiamo

imporre a ogni f di avere valori fuori di $(-\varepsilon, \varepsilon)$

per ogni t, e questo <u>non</u> può essere un

aperto della τ.

Esercizio 1. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ delle successioni in $\mathbb{R}$ dotato della topologia (box topology) una cui base è formata dai prodotti (indiciati su $\mathbb{N}$) di aperti di $\mathbb{R}$.

(*a*) Dimostrare che si tratta di uno spazio hausdorff, non metrizzabile (sugg.: non è localmente numerabile).
(*b*) Si descrivano gli intorni della successione nulla 0.
(*c*) Sia I l'insieme I delle successioni infinitesime mai nulle; mostrare che 0 appartiene alla chiusura di I.
(*d*) Mostrare non esistono successioni in I convergenti a 0, e trovare una rete in I convergente a 0.
(*e*) La funzione $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ che manda r nella successione costante r è continua per la box topology?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}$ dotato della minima topologia τ contenente sia la topologia metrica usuale sia la topologia formata dagli insiemi conumerabili (complementare degli insiemi numerabili).

(*a*) Mostrare che gli aperti sono formati da aperti usuali tolto un insieme al più numerabile di punti; chi è la chiusura di un tale aperto? Descrivere similmente i chiusi.
(*b*) Mostrare che si tratta di uno spazio hausdorff non regolare (sugg.: ogni aperto contiene intorni chiusi dei suoi punti?).
(*c*) Mostrare che un sottinsieme è compatto se e solo se è finito.
(*d*) Mostrare che lo spazio è connesso ma non connesso per archi.
(*e*) Mostrare che lo spazio non è localmente numerabile, né separabile.

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$

β con base $\prod_{i\in\mathbb{N}} U_i = \{f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} : f_i \in U_i \ \forall i\in\mathbb{N}\}$, $\underline{U_i \text{ aperti di } \mathbb{R}}$

è $\geq$ della topologia prodotto che è T2, dunque β è T2

vediamo che non è C1 studiando gli intorni di 0:

una base è data da $\prod_{i\in\mathbb{N}}(-\varepsilon_i,\varepsilon_i)$ con $\varepsilon_i\in\mathbb{R}_{>0}$ $\forall i$,

supponiamo di avere una base numerabile

$U_1, U_2, \dots, U_n, \dots$

e costruiamo un intorno di 0 che non contiene nessuno di questi: basta usare $U=\prod(-\varepsilon_i,\varepsilon_i)$ dove $(-\varepsilon_i,\varepsilon_i) \subsetneq U_{ii}$ (componente i-esima di U_i).

Se $I = \{f:\mathbb{N}\to\mathbb{R},\ f_i\neq 0 \ \forall i,\ \lim_{i\to\infty} f_i = 0$ (limite in $\mathbb{R}$ usuale)$\}$

$\underline{0} \in \bar{I}$ perché ogni intorno di 0 contiene qualche elemento di I: basta per gli intorni di base $U=\prod_{i\in\mathbb{N}}(-\varepsilon_i,\varepsilon_i)$ e basta usare $f_i = \min(\frac{\varepsilon_i}{2}, \frac{1}{i})$,

che è successione mai nulla e infinitesima.

Supponiamo che $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots \in I$ successione (di successioni!) in I e mostriamo che non può convergere a zero: basta costruire un intorno di 0 in cui la successione non entri (definitivamente) e possiamo anche costruire un intorno di 0 in cui la successione è SEMPRE FUORI (!):

sia $U = \prod_i (-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ con $\varepsilon_i < f_{i,i}$
(termine i-simo della successione f_i)

allora $f_i \notin U \;\; \forall i$, quindi $f_i \not\to \underline{0}$.

Per trovare una rete in I convergente a $\underline{0}$, usiamo come insieme ordinato gli intorni di $\underline{0}$ con l'ordine della controinclusione:

$$A = \{ U \subseteq X : U \text{ intorno di } \underline{0} \text{ per } \beta \}$$

$$U \leq V \quad \text{sse} \quad U \supseteq V$$

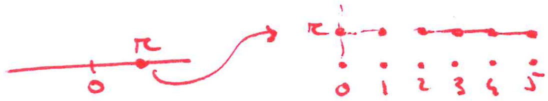
e come rete

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow X \\ U &\longmapsto f_U = (f_i) \text{ tale che } f_i \in \pi_i(U). \end{aligned}$$

La condizione di convergenza è tautologica:

per ogni INDICE $U \in A$ ($= \beta(\underline{0})$, intorni di 0 per β) esiste un intorno di 0 per β (usiamo U stesso) tale che se $V \geq U$ (come indici, cioè $V \subseteq U$) allora $f_V \in U$ (perché $f_V \in V \subseteq U \dots$).

La funzione $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ $\quad \pi \longmapsto$ successione costante π



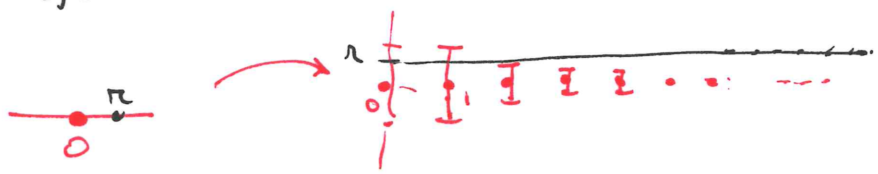
è continua per la β?

No, per esempio l'intorno di 0 dato da $\Pi(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$

non contiene funzioni (successioni) costanti non nulle,

quindi la sua antiimmagine è $\{0\} \in \mathbb{R}$ che non

è un aperto:



Esercizio 1. Sull'insieme $X = [0,1]^{\mathbb{R}}$ delle funzioni reali a valori in $[0,1]$ (dove $[0,1]$ è dotato della topologia euclidea usuale) consideriamo la topologia prodotto τ e la box-topology β (generata dai prodotti indiciati su $\mathbb{R}$ di aperti di $[0,1]$).

(*a*) Descrivere gli intorni della funzione identicamente nulla per τ e per β; quali successioni convergono alla funzione nulla per τ e per β?

(*b*) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme delle funzioni quasi ovunque nulle (nulle tranne che per un numero finito di valori).

(*c*) Determinare chiusura e interno per τ e per β dell'insieme delle funzioni che si annullano sui razionali.

(*d*) Si determini se le funzioni di X in sè che mandano f nella funzione $f \circ \chi_{\mathbb{Q}}$ (risp. $\chi_{\mathbb{Q}} \circ f$) sono continue per τ e per β (usando la stessa topologia in dominio e codominio).

(*e*) Si determini se la funzione di X in sè che manda f nella funzione $\tilde{f}$, dove $\tilde{f}(x) = f(x)$ se $x \neq 0$ e $\tilde{f}(0)$ è l'estremo superiore dei valori di f, è continua per τ e per β (usando la stessa topologia in dominio e codominio).

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{R}^2$ dotato della massima topologia τ che rende continue tutte le inclusioni delle rette $v_q = \{q\} \times \mathbb{R}$ con $q \in \mathbb{Q}$ (rette verticali con ascissa razionale, dotate della usuale topologia).

(*a*) Descrivere aperti e chiusi della topologia τ. Descrivere le topologie indotte sulle rette verticali e orizzontali.

(*b*) La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile, hausdorff?

(*c*) Quali sono le proprietà di connessione di τ? Quali sono i sottinsiemi connessi per τ?

(*d*) Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(*e*) La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

$X = [0,1]^{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R} \to [0,1]\}$

τ = topol. prodotto

β = box-topology

$f \equiv \underline{0} \in X$ (funzione $\mathbb{R} \to [0,1]$ identicamente nulla)

intorni per τ: $U \subseteq X$ che contengono un intorno di base del tipo

$$\{ f : \mathbb{R} \to [0,1] : f(x_i) \in (-\varepsilon_i, \varepsilon_i),\ i = 1, \dots, n \}$$

con $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_i > 0$.

intorni per β: $V \subseteq X$ che contengono un intorno di base del tipo

$$\prod_{x \in \mathbb{R}} (-\varepsilon_x, \varepsilon_x) = \{ f : \mathbb{R} \to [0,1] : f(x) \in (-\varepsilon_x, \varepsilon_x)\ \forall x \in \mathbb{R} \}$$

con $\varepsilon_x > 0$.

siccome $\tau \subseteq \beta$ allora

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{successioni} \\ \to \underline{0} \text{ per } \tau \end{array} \right\} \supseteq \left\{ \begin{array}{c} \text{successioni} \\ \to \underline{0} \text{ per } \beta \end{array} \right\}$$

sono le f_i tali che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha che $f_i(x) = \pi_x(f_i)$ converge a 0 in $\mathbb{R}$ (è successione in $\mathbb{R}$ per x fissato).

quelle convergenti per β invece devono <u>ANCHE</u> essere <u>definitivamente 0</u> per quasi tutti $x \in \mathbb{R}$; se ci sono infiniti x con $f_i(x)$ mai nulla, costruiamo un intorno usando su questi x degli intervallini che non contengono $f_{i_x}(x)$ usando indici $i_x > i_y$ se $x > y$.

Siccome $\tau \leq \beta$

$\overline{A}^{\tau} \geq \overline{A}^{\beta}$

$A^{o\tau} \leq A^{o\beta}$

$\mathcal{Q}$ = funzioni quasi ovunque nulle

$\mathcal{Q}^{o\beta} = \emptyset$ perché non contiene nessun aperto per β,

quindi $\mathcal{Q}^{o\tau} = \emptyset$.

per β è chiuso, perché complementare è aperto.

per τ è denso: OGNI APERTO (di BASE) contiene funzioni quasi ovunque nulle!

$\mathcal{R}$ = funzioni tali che valgono 0 su $\mathbb{Q}$ (razionali)

$\mathcal{R}^{o\beta} = \emptyset$ perché nessun aperto di β vi è contenuto

dunque $\mathcal{R}^{o\tau} = \emptyset$.

Il complementare è aperto per τ, quindi per β:

se una f ha $f(q) \neq 0$ per $q \in \mathbb{Q}$, allora

c'è l'intorno $\{g : g(q) \neq 0\}$ tutto contenuto in $X \setminus \mathcal{R}$.

Dunque $\mathcal{R}$ è chiuso sia per τ sia per β

$$[0,1]^{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R} \to [0,1]\}$$

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ f &\longmapsto f \circ \chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to [0,1] \\ & \qquad x \longmapsto \begin{cases} f(0) & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ f(1) & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

continua per τ perché componendo con le π_x otteniamo π_0 oppure π_1, continue per definizione di τ.

non è continua per la β: se prendiamo un aperto del tipo $\{f : f(x) < \frac{1}{|x|}\ \forall x,\ |x|>1\}$ l'antiimmagine è fatta di funzioni tali che $f(0)$ e $f(1)$ devono essere nulle, che non è aperto!

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ f &\longmapsto \chi_{\mathbb{Q}} \circ f : \mathbb{R} \to [0,1] \\ & \qquad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } f(x) \in \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

per τ: la composizione con le proiezioni π_x dà

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } f(x) \in \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

e non è continua perché l'antiimmagine di un intorno di 0 è fatto di funzioni a valori irrazionali, che non è aperto di τ,

e nemmeno di β, poiché non è ~~aperto~~ continua nemmeno per β in quanto l'antiimmagine di $[0,\varepsilon)^{\mathbb{R}}$ non è aperto. ($\subseteq X$ aperto per β)