G2B 19/20 T1.1

Topologia di SORGENFREY (DESTRA): $\mathbb{R}$ con base di aperti $[a,b)$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$.

numerabilità:

S: $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ denso

C1: $\forall x$: $[x, x+\frac{1}{n})$ è base intorni (per $n\in\mathbb{N}_{>0}$)

$\neg$C2: ogni base $\mathcal{B}$ ha $\mathbb{R}\hookrightarrow\mathcal{B}$

S, $\neg$C2 $\Rightarrow$ $\neg$ ps.metr.

separazione:

T2 perché $\geq$ Euclidea

T4, dunque T$3\frac{1}{2}$, CR (top. def. famiglie pseudometriche).

connessione:

è TOTALM. SCONNESSO, dunque TOT. ARCO-SCONN.

le cc. sono i punti, non è loc. conn. o arcocon.

- ogni aperto di base è sconnesso: $[a,b) = [a,c)\sqcup[c,b)$.

compattezza:

non è compatto né loc.comp.

$K\subseteq(\mathbb{R},\mathcal{S})$ compatto $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ numerabile

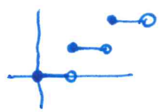
- si trova mappa iniettiva $K\overset{q}{\hookrightarrow}\mathbb{Q}$: $\forall x\in K$ usiamo il ricopr. aperto $(-\infty,a)$, $[x,+\infty)$ per $a<x$, si estrae ricopr. finito e $q(x)\in\underbrace{(\max(a), x)}_{\text{non vi sono punti di } K}\cap\,\mathbb{Q}$.
- $\{0, \frac{1}{n} \mid n>0\}$ è compatto
  $\{0, -\frac{1}{n}, n>0\}$ non è compatto!

NOTE:

- $$\begin{tikzcd} & \text{DISCRETA} & \\ \mathcal{S}_s \arrow[ur, dash] & & \mathcal{S}_d \arrow[ul, dash] \\ & \text{Euclidea} \arrow[ul, dash] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

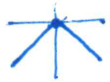
- per funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, visto $(\mathbb{R},\mathcal{S}_d)\to(\mathbb{R},\text{Eucl.})$ calcola i "limiti da destra" ma $\mathcal{C}((\mathbb{R},\mathcal{S}_d),(\mathbb{R},\mathcal{S}_d))\neq\mathcal{C}((\mathbb{R},\mathcal{E}),(\mathbb{R},\mathcal{E}))$:

funzione continua per $\mathcal{S}_d$, non $\mathcal{E}$:



(PARTE INTERA)

funzioni continue per $\mathcal{E}$, non $\mathcal{S}_d$



(OPPOSTO MODULO)

PRODOTTI NUMERABILI DI INSIEMI FINITI DISCRETI (con top. discreta): es $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$, CANTOR.

numerabilità:

S: perché prodotto numerabile (meno di c) di separabili

oppure: base della topol. prodotto ha cardinalità $\mathcal{P}_{finite}(\mathbb{N})$

C1: perché metrizzabile, oppure si trova una base numerabile di intorni

C2: perché metr. e separ., oppure: base.

separazione

T2 perché prodotto di T2,

⋮

T4 perché metrizzabile

è metrizzabile perché prodotto numerabile di spazi metrizzabili.

connessione:

TOTALM. SCONNESSO perché prodotto di tot. sconnessi, (ma non ha top. discreta!).

compattezza:

è COMPATTO perché prodotto compatti, quindi LOC. COMPATTO

T2, compatto $\Rightarrow$ sottins. compatti $=$ sottins. chiusi.

DOMANDA: $\mathbb{R}$ ed $\mathbb{R}^2$ sono omeomorfi in quanto spazi topologici? cioè: esiste una funzione biiettiva e bicontinua tra loro?

NOTE: Come insieme ha cardinalità $2^{\mathbb{N}} = c$, continuo

è isomorfo ai suoi prodotti finiti o numerabili: $(\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N}} = (\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N}\sqcup\mathbb{N}} \cong (\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N}}$

$((\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} = (\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \cong (\mathbb{Z}/2)^{\mathbb{N}}$

è omeomorfo a una costruzione di $\mathbb{R}$:

$$\{0,2\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$$
$$(a_i) \longmapsto \sum \frac{a_i}{3^i}$$

e l'immagine è un sottospazio di $\mathbb{R}$ che risulta: METRICO, COMPATTO, TOTALM. SCONNESSO, PERFETTO (= proprio derivato), DI CARDINALITÀ c e LEBESGUE MISURA NULLA.

Possibili topologie su $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\mathbb{N}\to\mathbb{R}\}$

dove $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tramite $x_{n+1}=0$, e $\mathbb{R}^\infty \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ come "successioni quasi ovunque nulle".

$\mathcal{T}_\infty$ = topologia forte delle inclusioni $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$

$U \subseteq \mathbb{R}^\infty$ aperto sse $U \cap \mathbb{R}^n$ aperto $\forall n$

è S, ¬C1, ¬C2, NON METRIZZABILE,

T2 e anche N,

ARCO-CONNESSO e LOC A-C.

è la topologia indotta da β (su $\mathbb{R}^\infty$ come $\hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)

∪|

La topologia $\mathcal{T}_{d_\infty}$ indotta dalla metrica

$d_\infty : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, $d_\infty(\underline{x},\underline{y}) = d_n(\underline{x},\underline{y})$ se $\underline{x},\underline{y} \in \mathbb{R}^n$.

che è S, C1, C2,

T2, anche N

ed è la topologia indotta dalla π

β box topology su $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

base di aperti $\prod_{\mathbb{N}} U_i$ con U_i aperto $\mathbb{R}$.

è ¬S, ¬C1, ¬C2, non metrizzabile,

T2 e anche N,

nessuna proprietà di connessione

∪|

π topologia prodotto su $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

base di aperti $\prod U_i$ con U_i aperto $\mathbb{R}$, $=\mathbb{R}$ per $\forall\forall i$

è metrizzabile perché prodotto numerabile di spazi metrici,

quindi S, C1, C2,

T2, N.

AC e LAC,

non compatto né loc.

Nota: $S^\infty \subseteq \mathbb{R}^\infty$ (unione delle $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$) e $[0,1]^\infty = \bigcup [0,1]^n$ sono chiusi ma non compatti (né per $\mathcal{T}_\infty$, né per $\mathcal{T}_{d_\infty}$)

G2B 19/20

~~T1.13'~~

su $\mathbb{R}^\infty$ con topologia τ_∞ (indotta dalle inclusioni $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$):

$A \subseteq \mathbb{R}^\infty$ è $\begin{cases}\text{aperto}\\ \text{chiuso}\end{cases}$ sse $\forall n$ $A \cap \mathbb{R}^n$ è $\begin{cases}\text{aperto}\\ \text{chiuso}\end{cases}$ di $\mathbb{R}^n$

in particolare $\mathbb{R}^m \cap \mathbb{R}^n = \begin{cases}\mathbb{R}^m & \text{se } m \leq n\\ \mathbb{R}^n & \text{se } m \geq n\end{cases}$, e in ogni caso sono chiusi, dunque $\mathbb{R}^m$ sono chiusi di $\mathbb{R}^\infty$,

ma non sono aperti perché $\mathbb{R}^m$ non è aperto in $\mathbb{R}^n$ per $m<n$.

se $A \subseteq \mathbb{R}^\infty$: $\bar{A} = \{x \in \mathbb{R}^\infty :$ ogni intorno di x in $\mathbb{R}^\infty$ interseca $A\}$

notare che non basta scrivere $A = \cup A_n$ con $A_n = A \cap \mathbb{R}^n$ e poi usare $\cup \bar{A}_n$ ($\bar{A}_n$ = chiusura in $\mathbb{R}^n$)

perché l'unione potrebbe non essere un chiuso di $\mathbb{R}^\infty$.

$A^\circ = \{x \in \mathbb{R}^\infty :$ esiste un intorno di x in $\mathbb{R}^\infty$ che è contenuto in $A\}$

notare anche qui che non c'è una ricetta evidente a partire da $A_n = A \cap \mathbb{R}^n$...

consideriamo $[0,1]^\infty$: è chiuso perché $\cap \mathbb{R}^n$ è $[0,1]^n$ che è chiuso

non è compatto perché $U_n = \mathbb{R}^n \times (0,1)^\infty$ è ricoprimento aperto e non ha sottoricop. finiti.

se $A \subseteq \mathbb{R}^\infty$ e $A \not\subseteq \mathbb{R}^n$ per tutti gli n, cioè $\forall n$ esiste $x \in A$, $x \notin \mathbb{R}^n$, possiamo trovare

un ricoprimento aperto che non ammette sotto ricoprimenti finiti

del tipo $U_n = \mathbb{R}^n \times \prod_i V_i$, scegliendo i V_i in modo da escludere punti di A al di ...

quindi i compatti sono solo quelli $\subseteq \mathbb{R}^n$ per qualche n.

per qualsiasi $x \in \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^\infty$, basta prendere intorni $\mathbb{R}^n \times \prod (-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ con ε_i sufficientemente piccoli

per ESCLUDERE i punti di una successione che non sia definitivamente in $\mathbb{R}^m$ per qualche m.

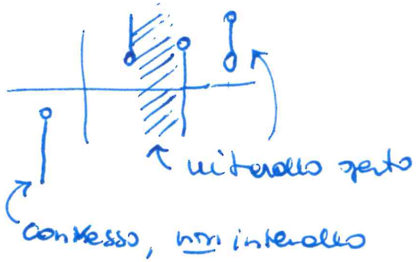
Quindi le successioni e_n o $\frac{1}{n} e_n$ non possono convergere,

e quelle convergenti a zero sono quelle contenute in qualche $\mathbb{R}^m$ e lì convergenti a 0.

Esistono anche successioni non definitivamente nulle e convergenti a 0.

Alcuni esempi di topologie d'ordine : LESSICOGRAFICA USANDO LE SEMIRETTE DX E SX

su $\mathbb{R}^2$



sulle rette verticali
induce topol. euclidea

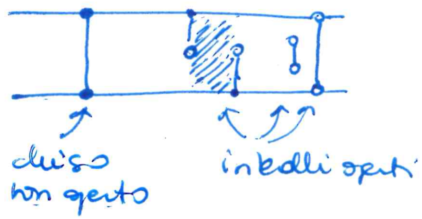
sulle rette orizzontali
induce topol. discreta

è la topologia prodotto di
$(\mathbb{R}$, DISCRETA$) \times (\mathbb{R}$, EUCLIDEA$)$

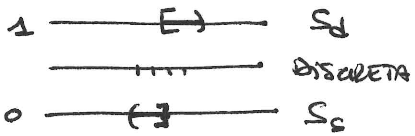
quindi è METRIZZABILE,
T2, N, C1, ¬S, ¬C2

non connesso (chi sono cc?)
ma loc. arcoconnesso.
(base di intorni di punto?)

su $\mathbb{R} \times [0,1]$



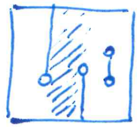
sulle rette orizzontali:



QUESTA TOPOL. D'ORDINE NON
è METRIZZABILE perché su
alcuni sottinsiemi dà topol.
di Sorgenfrey non metrizzabili!

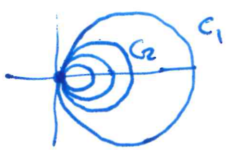
quindi non è la topologia
indotta da $(\mathbb{R}^2, lex)$!

su $[0,1]^2$



Se qui usiamo la
topologia degli intervalli
$(a,b) = \{x : a<x<b\}$
invece che quella delle
semirette $\{x : x<a\}$ e $\{x : x>b\}$
abbiamo una topologia
STRETTAMENTE più piccola :
per esempio tutti i chiusi $\ni \binom{0}{0}, \binom{1}{1}$
(sono min e max dell'ordine)

Questo è un compito (09/06/2017):

$X = \bigcup C_n =$  con topologia indotta da $\mathbb{R}^2$ (come sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$).

$\parallel$

circonferenze
centro $(1/n, 0)$
raggio $1/n$

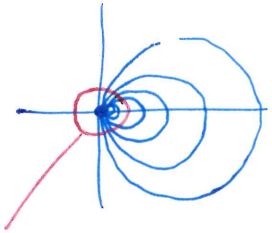
APERTI / CHIUSI = sono le intersezioni con X di aperti/chiusi del piano $\mathbb{R}^2$.

Le circonferenze C_i sono chiusi di $\mathbb{R}^2$, quindi chiusi di X.

<u>non sono aperti di X</u> perché ogni intorno di 0 in $\mathbb{R}^2$ interseca, e anzi <u>CONTIENE</u> infinite C_n (per $n \gg 0$, raggio abbastanza piccolo)

e quindi C_i non può essere intersezione con X di aperto di $\mathbb{R}^2$.

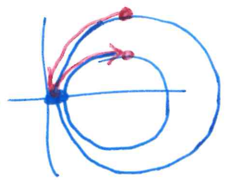
invece $C_i \setminus \{0\}$ è aperto di X (ma non di $\mathbb{R}^2$...).



intorno di 0 in $\mathbb{R}^2$
contiene tutte C_n per $n \gg 0$

Siccome è topologia indotta su un sottinsieme dalla top. di $\mathbb{R}^2$ che è metrizzabile, la topologia è metrizzabile, dunque C1, e si vede subito SEPARABILE (basta prendere un sottinsieme denso numerabile su ogni circonferenza), quindi C2.
In particolare è T2 normale.

È connesso per archi e localm. conn. per archi: il cammino tra due punti passante per 0 è continuo, perché lo è composto con $X \hookrightarrow \mathbb{R}^2$:



È uno spazio COMPATTO T2, quindi i chiusi sono i compatti.

Ora usiamo su ogni C_n la topologia indotta dal piano, e consideriamo le inclusioni $C_n \hookrightarrow X$ $(\hookrightarrow \mathbb{R}^2)$, diciamo σ la topologia su X forte per la famiglia delle inclusioni $C_n \hookrightarrow X$.

Quindi U è aperto di σ sse $U \cap C_n$ è aperto di C_n per $\forall n$.

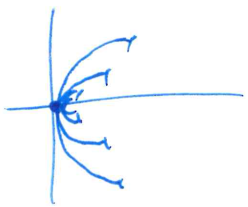
Certamente $\tau \leq \sigma$ perché se U è aperto per τ, allora $U = A \cap X$ con A aperto di $\mathbb{R}^2$,

e quindi $U \cap C_n = A \cap X \cap C_n = A \cap C_n$ aperto di C_n per ogni n.

D'altra parte $\sigma \gneq \tau$ perché gli intorni di O per τ contengono tutte le circonf per $n \gg 0$, mentre gli intorni di O per σ basta che contengano un aperto su ogni C_n.

In particolare non c'è una base numerabile per gli intorni di O per σ, quindi la topologia σ non è nemmeno C1, quindi non metrizzabile.

Però σ e τ coincidono su $X \setminus \{O\}$.



intorno di O per σ, non per τ.