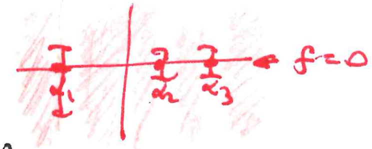
Tu tornato

Zoom - Topologico n. 5

10/12/2020

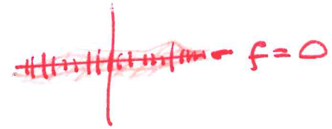
11/06/2019 | 1

$X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R} \to \mathbb{R}\} = \prod_{\alpha \in \mathbb{R}} X_\alpha$ con $X_\alpha = \mathbb{R}$ $(\forall \alpha)$.



$f \in X$: intorni di f per top. prodotto τ : $\{g \in X : g(\alpha_i) \in (f(\alpha_i) - \varepsilon, f(\alpha_i) + \varepsilon),\ i = 1, \dots, n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$

intorni di f per box topology β : $\{g \in X : g(\alpha) \in (f(\alpha) - \varepsilon_\alpha, f(\alpha) + \varepsilon_\alpha)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$ con $\varepsilon_\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$.



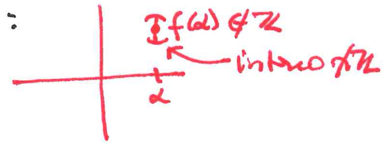
<u>CHIUSURA</u> di A : cercare le f tali che OGNI INTORNO interseca A

<u>INTERNO</u> di A : cercare le f tali che HANNO UN INTORNO contenuto in A.

e sappiamo : $\tau \leq \beta$, quindi interno per $\tau \subseteq$ interno per β (interno $= \cup$ aperti contenuti)
chiusura per $\tau \supseteq$ chiusura per β (chiusura $= \cap$ chiusi contenenti)

Ora :

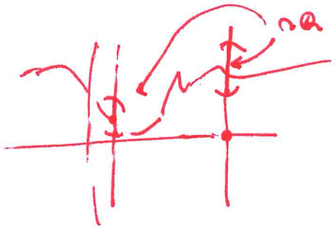
$A = \mathbb{Z}^{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R} \to \mathbb{Z}\}$: l'interno per β è $\emptyset$ perché nessun aperto per β è contenuto in A, e quindi anche l'interno per τ è $\emptyset$.
La chiusura per τ è A stesso, perché il complementare è aperto :
ogni funzione con un valore <u>non</u> intero ha tutto un intorno per τ con valori <u>non interi</u> :



quindi è chiuso anche per β.

11/06/2019 | 2

$B = \mathbb{Q}^{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R} \to \mathbb{Q}\}$: l'interno per β è $\emptyset$ come prima,
quindi anche l'interno per τ.



inoltre è <u>denso</u> per β, cioè la chiusura è tutto X,
perché $\times$ ogni funzione, ogni aperto interseca B
(in ogni intervallo $(f(x)-\varepsilon_x, f(x)+\varepsilon_x)$ ci sono razionali)
quindi è denso anche per τ.

$C = \{f : f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}\}$: è aperto per β perché prodotto di aperti $\mathbb{R} \setminus \{0\}$,
mentre <u>non</u> contiene aperti per τ (in ogni aperto di base per τ ci sono funzioni che si annullano in qc. punto)
è denso per β perché per ogni funzione, ogni intorno interseca C,
cioè contiene funzioni non nulle
quindi è denso anche per τ.

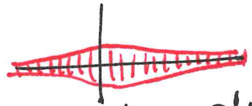
$X \xrightarrow{\varphi} X$

$f \longmapsto \varphi(f) = \tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \tilde{f}(x) = \max\{ |f(n)| : \underset{|n| \le |x|}{n \in \mathbb{Z}} \}$

per calcolare $\tilde{f}(x)$ si controllano i valori di f negli interi di modulo $\le |x|$

quindi se U è aperto di prebase per τ, $U = \{ f : f(x_0) \in U_0 \}$, $\varphi^{-1}(U)$ è insieme di funzioni con restrizioni negli interi di modulo $\le |x_0|$, quindi un numero finito, quindi viene un aperto di τ.

Se invece V è aperto di β della forma  ($\le \varepsilon$ $\forall \varepsilon$) su $\mathbb{Z}$, allora in $\varphi^{-1}(V)$ possono stare solo funzioni che valgono 0 e questo non è aperto per β

$X \xrightarrow{\psi} X$

$f \longmapsto \psi(f) = \bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \bar{f}(x) = \inf\{ |f(y)| : y \le x \}$

per calcolare $\bar{f}(x)$ si controllano i valori di f per ogni $y \le x$ (semiretta $(-\infty, x]$),

quindi questa funzione non è continua per τ: $\varphi^{-1}(U)$ è insieme di funzioni con restrizioni su infiniti indici $y \in \mathbb{R}$, e questo non è un aperto di τ.

Se si prende un aperto V della β (condizione su ogni indice in $\mathbb{R}$), l'antiimmagine comporta condizioni del tipo "fuori di valori piccoli" per ogni indice minore, quindi è aperto di β

intermezzo teorico

CR & T2 $\Leftrightarrow$ sottospazio (con topol. indotta) di un cubo di Hilbert I^A con $I=[0,1]$

$\Leftarrow$ chiaro: I è T2, I^A è T2; I è metrico, I^A è def. famiglia pseudom., cioè CR.

$\Rightarrow$ usiamo la caratterizzazione per cui CR $\Leftrightarrow$ definito da famiglia di pseudometriche $\mathcal{P}$ (limitate da 1)

poniamo $A=\{d_y : X\to I \mid d\in\mathcal{P},\ y\in X\}$ dove $d_y : X\to I$ è $d_y(x):=d(x,y)$

e consideriamo la mappa

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow I^A \\ x &\longmapsto \begin{pmatrix} A\to I \\ d_y\mapsto d_y(x)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

che è iniettiva perché X è T2, e la topol indotta su X è quella definita dalla famiglia $\mathcal{P}$.

possiamo con lo stesso argomento usare $A=\{\varphi : X\to I \text{ continue}\}$.

Piccolo esercizio teorico

: X spazio pseudometrico con pmetrica $d\leq 1$

- per ogni $y\in X$ la funzione $d_y : X\to I$ def da $d_y(x):=d(x,y)$ è continua
- la topologia di X (indotta dalla metrica d) è la topologia debole della famiglia di funzioni $\{d_y : X\to I : y\in X\}=:D$
- definiamo la mappa $X\longrightarrow I^D$, valutazione in $x\in X$: $x\longmapsto\begin{pmatrix} D\to I \\ d_y\mapsto d_y(x)=d(x,y)\end{pmatrix}$

e allora
  - iniettiva sse X è T2,
  - composizione con la proiezione $I^D\xrightarrow{\pi_{d_y}} I$ è $d_y : X\to I$,
  - la topologia indotta su X dalla topologia prodotto di I^D è la topol. indotta da d.

11/06/2019 | esercizio 2 $X = \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
$v \longmapsto \|v\|$

poniamo su X la topologia debole τ usando su $\mathbb{R}$ la topologia usuale.
Certo $\|-\|$ è continua per topol. euclidea τ_E di $\mathbb{R}^n$, quindi $\tau \leq \tau_E$.

aperti di base per τ sono antiimmagini di intervalli di $\mathbb{R}$:
quindi sembrano corone aperte centrate in 0.
(oppure dischi aperti centrati in 0,
o complementari di dischi chiusi centrati in 0)

un intorno di un punto $v \in X$ contiene una corona aperta attorno alla circonferenza di raggio $\|v\|$ (centro 0).

S perché meno fine di una topologia separabile
C1 e C2 perché eredita queste proprietà dalla topologia di $\mathbb{R}$.
pseudometrizzabile: basta usare la pseudometrica $d(v,w) = d_{\mathbb{R}}(\|v\|, \|w\|) = |\|v\| - \|w\||$,
che descrive le corone aperte di base.
quindi è CR, e anche N.
Non è T2, quindi nemmeno T0 essendo pseudometrizzabile: punti $v \in X$ con stesse $\|v\|$ hanno proprio gli stessi intorni.
Gli archi continui $[0,1] \longrightarrow X$ usando su X la topologia τ_E sono continui anche per τ,
quindi le proprietà di conn. per archi e loc. conn. per archi sono vere
Non è compatto: i dischi aperti centrati in 0 sono ricoprimento aperto che non ammette sotto ricoprimenti finiti. Invece è localmente compatto, usando le corone piccole chiuse.
Vi sono più compatti che per la τ_E: per esempio una circonferenza centrata in 0 e tolti alcuni punti non è compatto di τ_E, ma lo è di E.

11/06/2019 | es. 2.

Le traslazioni non banali sono affinità (anche isometrie euclidee) ma non sono continue per τ.

Le trasformazioni affini continue per τ devono avere $\underline{0}$ come punto fisso, e se fanno dilatazioni diverse lungo diversi assi, allora non sono continue (altrimenti gli aperti come le "corone aperte" non sarebbero aperti per τ).

Quindi le uniche affinità continue sono le composizioni di isometrie euclidee centrate in $\underline{0}$ e omotetie centrate in $\underline{0}$.

13/09/2016

Usiamo $X=\{0,1\}^{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R}\to\{0,1\}\}$ dotato della topologia PRODOTTO delle top DISCRETE su $\{0,1\}$

l'insieme di indici è $\mathbb{R}$ (continuo non numerabile),

lo spazio $\{0,1\}$ è discreto, quindi S, C1, C2, T2, N, metrizzabile, TS, LAC, K, LK.

dunque lo spazio prodotto è S, ~~C1~~, ~~C2~~, T2, CR con pseudometr., TS, $\not{c}$, ~~LC~~, K, LK.

Consideriamo la funzione $\mathbb{R}\xrightarrow{\chi} X$ data da $x\longmapsto \chi_x$ ($\mathbb{R}\to\{0,1\}$ caratt di x; $\chi_x(z)=\delta_{x,z}$).

per vedere se è continua, siccome X ha la topologia prodotto,

basta vedere se tutte le composizioni $\mathbb{R}\xrightarrow{\chi} X \xrightarrow{\pi_y}\{0,1\}$ sono continue ($\forall y\in\mathbb{R}$)

$\varphi\longmapsto \pi_y(\varphi)=\varphi(y)$

ora questa composizione è $x\longmapsto \chi_x(y)=\begin{cases}1 & x=y\\ 0 & x\neq y\end{cases}$,

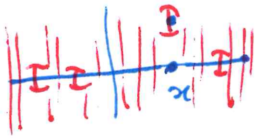
e l'antiimmagine dell'aperto $\{1\}$ di $\{0,1\}$ è esattamente $\{y\}$, che non è aperto di $\mathbb{R}$,

quindi χ non è continua (antiimmagine di $\{0\}$ invece è $\mathbb{R}\setminus\{y\}$ che è aperto).

Ora perché tali composizioni, e quindi χ, siano continue serve però

che ogni $\{y\}\subseteq\mathbb{R}$ sia aperto, e quindi che $\mathbb{R}$ abbia topol discreta.

alternativa: data $\chi_x\in X$, gli intorni di questa funzione sono del tipo



$U=\{\varphi:\mathbb{R}\to\{0,1\} : \varphi(x_1)=\dots=\varphi(x_n)=0$, event. $\varphi(x)=1\}$

e $\chi^{-1}(U)=\{y\in\mathbb{R}$ tali che $\chi_y\in U\}$ è solo $\{x\}$ se c'è la condizione.

e si arriva alle stesse conclusioni.

12/09/2017 | 1

$X = \mathbb{R}/\sim$ dove $x \sim y$ sse $x, y \in \mathbb{Z}$, con topol. quoziente di $\mathbb{R} \twoheadrightarrow X$

punti di X sono $[0] = \mathbb{Z}$ e $[x] = \{x\}$ $\forall x \notin \mathbb{Z}$, e tutti i segmenti $[n, n+1]$ di $\mathbb{R}$ hanno gli estremi identificati:

aperti di τ sono $U \subseteq X$ tali che $\pi^{-1}(U)$ aperto $\mathbb{R}$,

quindi: per $x \notin \mathbb{Z}$ intorno di x in X contiene l'immagine di $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ con ε piccolo

per $[0]$ gli intorni contengono le immagini di $(n-\varepsilon_n, n+\varepsilon_n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ con ε_n piccolo DIPENDENTE da n.

in particolare $[0]$ non può avere una base di intorni che sia numerabile:
se $U_0, U_1, U_2, \dots, U_n$ fosse una tale base, e $U_0 \supsetneq (0-\varepsilon_0, 0+\varepsilon_0) = V_0$
$U_1 \supsetneq (1-\varepsilon_1, 1+\varepsilon_1) = V_1 \dots U_i \supsetneq (i-\varepsilon_i, i+\varepsilon_i) = V_i \dots$
allora l'unione dei V_i (e $-V_i$) è intorno di $[0]$ che non contiene nessuno U_i.

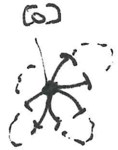
dunque X non è C1, né C2,
ma è separabile perché l'immagine di $\mathbb{Q}$ è densa (e numerabile):
$X = \pi(\mathbb{R}) = \pi(\overline{\mathbb{Q}}) \subseteq \overline{\pi(\mathbb{Q})}$, essendo π continua
non essendo C1 non può essere pseudometrizzabile
è chiaramente T2 (distinguere a seconda che uno dei punti sia $[0]$)
e anche normale (chiusi disgiunti hanno controimmagini chiuse disgiunte in $\mathbb{R}$.)

nota: $X \setminus \{[0]\}$ è invece omeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, quindi sottospazio metrizzabile.

12/09/2017 / 2

Siccome $\mathbb{R} \xrightarrow{\pi} X$ è continua, dato un cammino continuo $I \to \mathbb{R}$, anche la composizione $I \to \mathbb{R} \to X$ è continua, e quindi possiamo trovare archi continui tra due punti qls di X, quindi X è arcoconnesso.

Visti gli intorni di ogni punto : 

o 

è chiaro loc. arcoconnesso.

Lo spazio non è compatto : possiamo usare un ricoprimento aperto con un intorno di $[0]$ e un aperto su ogni petalo che $\not\ni 0$, e allora <u>non</u> ci sono sottoricoprimenti finiti.

non è nemmeno loc. compatto a causa di $[0]$: nessun intorno di $[0]$ è compatto perché ...

<u>Compatti sono</u> le unioni finite di compatti su ciascun petalo.

La topologia σ indotta da τ tramite π ha come aperti le antiimmagini di aperti di τ_0

Siccome τ_ε rende continua π (per definizione) e σ è la topologia debole di π, abbiamo $\sigma \leq \tau_\varepsilon$ e in effetti $\neq$ perché $(-\varepsilon, \varepsilon)$ è intorno di 0 per τ_ε e non per σ (intorni di 0 per σ, essendo π^{-1}(intorni di $[0]$), contengono un intorno per ogni $z \in \mathbb{Z}$)

Due punti in $\mathbb{Z}$ non possono avere intorni disgiunti per σ, e anzi un intorno di $z \in \mathbb{Z}$ deve contenere tutto $\mathbb{Z}$, quindi σ non è nemmeno T0.

già visto?

La convergenza di reti (o di filtri) determina l'operatore di chiusura, quindi determina la topologia: ogni topologia è caratterizzata dalle condizioni di convergenza di reti (filtri):

BANALE : OGNI RETE CONVERGE AD OGNI PUNTO!

DISCRETA : le reti convergenti sono SOLO quelle definitivamente costanti.

Naturalmente ci sono molti casi intermedi.

Vediamo uno spazio prodotto $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$

TOPOLOGIA PRODOTTO : CONVERGENZA PUNTUALE SUGLI INDICI, cioè

$x_n = (x_{n\alpha})_{\alpha \in A}$ converge in X ($\to (y_\alpha)$) sse $\forall \alpha \in A$ $x_{n\alpha}$ converge in X_α ($\to y_\alpha$).

Convergenza uniforme? convergenza per la box topology?

Vediamo un esempio: il caso di $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{\mathbb{R} \to \mathbb{R}\} = \prod_{\alpha \in \mathbb{R}} X_\alpha$ con $X_\alpha = \mathbb{R}$ (per $\forall \alpha$).

Topologie	Convergenze
- prodotto	- puntuale
- ?	- uniforme sui compatti
- ?	- uniforme
- box	- più che uniforme!

10/09/2018 1

$q\in\mathbb{Q}$: r_q = retta di slope q in $\mathbb{R}^2$ per 0
$i_q : r_q \hookrightarrow \mathbb{R}^2$

τ := topologia forte delle inclusioni i_q al variare $q\in\mathbb{Q}$

Aperti per τ sono $V\subseteq\mathbb{R}^2$ tali che $V\cap r_q$ è aperto di r_q per ogni $q\in\mathbb{Q}$,

intersezione $\emptyset$ = aperto con ogni r_q

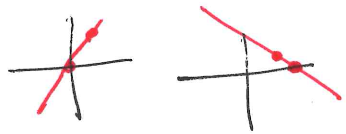
per esempio: i punti non appartenenti a queste rette r_q sono tutti APERTI,

$\cap$ con rette date $\emptyset$ oppure intervallo

gli intervalli aperti in fissate r_q che non contengono 0 sono aperti
un aperto che contiene 0 deve contenere un intervallino su ogni r_q.

topologia indotta da τ sulle rette del piano:

se la retta è una delle r_q, allora la topol. indotta è quella usuale: 

se la retta è un'altra, allora la topol. indotta è discreta: 

questa topologia:

non è separabile (ci sono più che numerabili punti aperti che dovrebbero essere nella base)

non è C1 a causa di 0: ogni intorno di 0 deve contenere un intervallino per ogni r_q, quindi è facile usare il secondo argomento di Cantor: supponiamo data una base di intorni di 0 numerabile (U_i) e COSTRUIAMO un intorno che NON contiene nessuno di quelli usando nella retta r_i un intervallino più piccolo di quello tagliato da U_i (sulla retta r_i)...

non è C2 perché non è C1.

per lo stesso motivo non è pseudometrizzabile

DOMANDA: è sottospazio $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ con topol. indotta da τ?

10/09/2018 | 2

osserva che questa topologia τ è $\geq$ (in effetti $>$) di quella euclidea,
quindi è certamente T2

inoltre è Normale: basta considerare chiusi che siano contenuti nella unione delle r_q
(i punti fuori sono chiusaperti, quindi formano da intorni di sé stessi):
se abbiamo chiusi disgiunti, su ogni retta abbiamo chiusi disgiunti, quindi intorni
aperti disgiunti (perché nelle rette r_q la topol è quella euclidea usuale),
e facendone l'unione per i due chiusi troviamo due intorni aperti disgiunti
come si voleva.

Certamente non è arco-connesso (ci sono punti chiusaperti), quindi nemmeno connesso.
E' <u>localmente</u> arco-connesso: ovvio per i punti chiusaperti (che sono un loro stesso intorno),
facile per i punti sulle rette r_q (la topol. indotta essendo euclidea),
e anche per $\underline{O}$; quindi è localmente connesso.
Le componenti connesse (e arco-connesse) sono i punti chiusaperti e $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} r_q$.

<u>Non è compatto</u>, avendo infiniti punti chiusaperti,
<u>non</u> è localmente compatto a causa di $\underline{O}$: nessun intorno di O per τ
è compatto.
infatti sia V un intorno di $\underline{O}$ per τ, $V_q = V \cap r_q$, V_q' aperto $\ni O$, $\subsetneq V_q$, $V' = \bigcup V_q'$.
allora $V' \cup V_q$ al variare di $q \in \mathbb{Q}$ è ricoprimento aperto di V, infinito non raffinabile
eventualmente $\cup \left(V \setminus \bigcup_q r_q\right)$.

10/09/2018 | 3

funzione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ continua per τ_E e non per τ:

basta usare una rotazione attorno all'origine che porta r_0 in r slope irrazionale.
i punti di r sono aperti (se $\neq \underline{0}$), ma le loro controimmagini in r_0 no,
quindi non è continua per τ,
ma è continua per topol. euclidea

funzione continua per τ e non per top. euclidea:

si può usare l'identità su $\bigcup_{q\in\mathbb{Q}} r_q$ e una permutazione qualsiasi
sui punti fuori dalle r_q: viene ovviamente continua per τ
(fuori di $\bigcup r_q$ induce la topol. discreta per cui ogni funzione è continua),
ma di solito non è continua per τ_E ....