Esercizio sulle aule 30 aprile 2015

prima prova parziale Geometria 2 parte B - 30 aprile 2015

Vanno consegnati: questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento (leggibile e ben giustificato) del compito.

Riportare i seguenti dati anche sui fogli protocollo con lo svolgimento:

Cognome: ______________________ **Nome:** ______________________

Matricola: ___________________

Testo del compito:

Esercizio 1. Sia $\gamma(s)$ una curva biregolare in $\mathbb{R}^3$ unitaria (t, n, b il suo riferimento di Frenet, κ e τ curvatura e torsione, supposte entrambe non nulle). Poniamo $\delta(s)$ la curva descritta (sulla sfera unitaria) dal vettore binormale b (con parametro s).

(a) È vero che δ è curva biregolare? Quando risulta unitaria?

(b) Determinare il riferimento di Frenet di δ in funzione di quello di γ.

(c) Determinare la curvatura κ_δ di δ in funzione di curvatura e torsione di γ.

(d) Determinare la torsione τ_δ di δ in funzione di curvatura e torsione di γ. Quali curve γ danno $\tau_\delta = 0$?

(e) Dire se la curva δ determina la curva γ di partenza (a meno di isometrie dello spazio?).

Esercizio 2. Si consideri la superficie rigata σ con direttrice $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$ e generatrice $\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$.

(a) Usando come parametri u e v, si scrivano delle parametrizzazioni per σ; si trovi una equazione cartesiana per σ.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee di curvatura su σ.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; quali sono le soluzioni evidenti di questo sistema?

- Sia γ una curva unitaria, con curvatura mai nulla, su σ che incontra ogni generatrice in un punto; mostrare che γ è geodetica se e solo se in ogni suo punto il suo vettore normale è normale alla generatrice.

$\gamma(s)$ biregolare unitaria $\subseteq \mathbb{R}^3$

t, n, b rif. Frenet, κ, τ entrambe non nulle

$\delta(s) := b(s)$

(a) $\delta' = b' = -\tau n = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\delta'' = -(\tau n)' = -\tau' n - \tau n' = -\tau' n - \tau(-\kappa t + \tau b) =$$
$$= +\kappa\tau t - \tau' n - \tau^2 b = \begin{pmatrix} \kappa\tau \\ -\tau' \\ -\tau^2 \end{pmatrix}$$

$$\delta' \times \delta'' = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tau \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \kappa\tau \\ -\tau' \\ -\tau^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau^3 \\ 0 \\ \kappa\tau^2 \end{pmatrix} = \tau^2 \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix}$$

$\|\delta'\| = |\tau|$ quindi δ unitaria sse $|\tau| = 1$

δ', δ'' lin. ind. sse $\delta' \times \delta'' \neq 0$ sse $\tau \neq 0$

sse γ <u>non è piana</u> (altrimenti b è punto!)

(b) $t_\delta = -\mathrm{sgn}(\tau)\, n$, comunque $\pm n$

n_δ versore di $\begin{pmatrix} \kappa\tau \\ 0 \\ -\tau^2 \end{pmatrix}$, cioè $\frac{1}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \begin{pmatrix} \kappa \\ 0 \\ -\tau \end{pmatrix} = \frac{\kappa t - \tau b}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}$

$$b_\delta = t_\delta \times n_\delta = \frac{\mathrm{sgn}(\tau)}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}} \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \\ \kappa \end{pmatrix}$$

(c) $$\kappa_\delta = \frac{\|\delta' \times \delta''\|}{\|\delta'\|^3} = \frac{\tau^2\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}{|\tau|^3} = \frac{\sqrt{\tau^2+\kappa^2}}{|\tau|} = \sqrt{1+\left(\frac{\kappa}{\tau}\right)^2}$$

(d) $$\tau_\gamma = \frac{|\gamma'\,\gamma''\,\gamma'''|}{\|\gamma'\times\gamma''\|^2} = \frac{\tau^2\begin{pmatrix}\tau\\0\\\kappa\end{pmatrix}\cdot\gamma'''}{\tau^4(\tau^2+\kappa^2)} = \frac{\begin{pmatrix}\tau\\0\\\kappa\end{pmatrix}\cdot\gamma'''}{\tau^2(\tau^2+\kappa^2)}$$

serve:

$$\gamma''' = (\kappa\tau t - \tau' n - \tau^2 b)'$$
$$= (\kappa'\tau + \kappa\tau' + \kappa\tau')t + \underbrace{*}_{\text{non serve}} n + (-\tau'\tau - 2\tau\tau')b$$
$$= (\kappa'\tau + 2\kappa\tau')t + * n + (-3\tau\tau')b$$

dunque:

$$\tau_\gamma = \frac{\begin{pmatrix}\tau\\0\\\kappa\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\kappa'\tau+2\kappa\tau'\\ *\\ -3\tau\tau'\end{pmatrix}}{\tau^2(\kappa^2+\tau^2)} = \frac{\tau(\kappa'\tau+2\kappa\tau'-3\kappa\tau')}{\tau^2(\kappa^2+\tau^2)} =$$

$$= \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}\,\frac{\kappa'\tau-\kappa\tau'}{\tau^2} = \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}(\kappa/\tau)'$$

quindi $\tau_\gamma = 0$ sse $(\kappa/\tau)' = 0$ sse κ/τ costante
sse γ ELICA.

(e) noto $\gamma = b$, derivando,

$\gamma' = -\tau n$, quindi noto $\pm n$ e $|\tau|$
(n e τ dove τ non si annulla)

e derivando ancora

$$\gamma'' = \kappa\tau t - \underbrace{\tau' n}_{\sim\text{noto}} - \underbrace{\tau^2 b}_{\text{noto}}$$

quindi si ricava κ e $\pm t$.

Supponendo $\tau > 0$ (o nelle zone in cui $\tau > 0$)
conosciamo t, quindi γ = primitiva di t
è nota a meno di traslazioni in $\mathbb{R}^3$.

Alternativa: supponendo $\tau > 0$, conosciamo κ e τ,
quindi γ a meno di isometrie di $\mathbb{R}^3$,
ma conoscendo anche b, se $\tau \neq 0$, possiamo
concludere solo per traslazioni di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio sulle superficie del 26 agosto 2019

terzo appello Geometria 2 parte B - 26 agosto 2019

Vanno consegnati: questo testo e al più due fogli protocollo con lo svolgimento (leggibile e ben giustificato) degli esercizi.

Riportare i seguenti dati anche sui fogli protocollo con lo svolgimento:

Cognome: ______________ Nome: ______________ Matricola: _______

Testo del compito:

Esercizio 1. Sia data la superficie di rotazione ottenuta ruotando il profilo $z = 1/x$ attorno all'asse z.

(a) Trovare una parametrizzazione ed una equazione cartesiana per σ.

(b) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(c) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ? Quali sono le isometrie di σ in sè?

(d) Determinare le linee asintotiche di σ, le linee di curvatura di σ e le linee che formano angolo costante con le linee di curvatura.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; quali geodetiche possono assumere valori arbitrariamente alti di z?

Esercizio 2. Si consideri l'insieme $X = \mathbb{R}^2$ (piano reale usuale), e l'insieme $\mathcal{C}$ dei suoi sottinsiemi dati dagli zeri di insiemi di polinomi in due variabili.

(a) Mostrare che l'insieme $\mathcal{C}$ è l'insieme dei chiusi per una topologia τ (detta di Zariski). La topologia τ è separabile, (topologicamente) localmente numerabile, (topologicamente) numerabile?

(b) Quali proprietà di separazione sono verificate? La topologia τ è pseudometrizzabile e/o completamente regolare?

(c) Quali sono le proprietà di (locale) connessione (per archi) di τ?

(d) Lo spazio è compatto e/o localmente compatto? Quali sono i sottinsiemi compatti per τ?

(e) Quali sono le funzioni continue di X in $\mathbb{R}$ (quest'ultimo dotato della topologia usuale)?

Superficie di rotazione del profilo $z = 1/x$:

(a) $\sigma(x,\theta) = \begin{pmatrix} x\cos\theta \\ x\sin\theta \\ 1/x \end{pmatrix}$

da $\begin{cases} X = x\cos\theta \\ Y = x\sin\theta \\ Z = 1/x \end{cases}$ abbiamo $x^2 = X^2+Y^2$, $Z^2 = 1/x^2$ quindi $\underline{Z^2(X^2+Y^2)=1}$

Sembra una specie di catenoide (dove ha senso).

(b) $\sigma_x = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ -1/x^2 \end{pmatrix}$, $\sigma_\theta = \begin{pmatrix} -x\sin\theta \\ x\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

dunque $G_I = \begin{pmatrix} \sigma_x\cdot\sigma_x & \sigma_x\cdot\sigma_\theta \\ & \sigma_\theta\cdot\sigma_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{x^4} & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+x^4}{x^4} & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$

$\sigma_x \times \sigma_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{x}\cos\theta \\ \frac{1}{x}\sin\theta \\ x \end{pmatrix}$ dunque $n = \frac{\sigma_x\times\sigma_\theta}{\|\sigma_x\times\sigma_\theta\|} = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^4}}\begin{pmatrix} \frac{1}{x}\cos\theta \\ \frac{1}{x}\sin\theta \\ x \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ x^2 \end{pmatrix}$ $\underline{\text{dove } x>0}$ supponiamo d'ora in poi.

Calcoliamo

$\sigma_{xx} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2/x^3 \end{pmatrix}$, $\sigma_{x\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} -x\cos\theta \\ -x\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

dunque $G_{II} = \begin{pmatrix} n\cdot\sigma_{xx} & n\cdot\sigma_{x\theta} \\ & n\cdot\sigma_{\theta\theta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\begin{pmatrix} 2/x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$

(c) $L = G_I^{-1}G_{II} = \begin{pmatrix} \frac{x^4}{1+x^4} & 0 \\ 0 & 1/x^2 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\begin{pmatrix} 2/x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\begin{pmatrix} \frac{2x^3}{1+x^4} & 0 \\ 0 & -1/x \end{pmatrix}$

$K = |L| = \frac{|G_{II}|}{|G_I|} = -\frac{2x^2}{(1+x^4)^2}$

Sempre <0, quindi tutti i punti sono $\underline{\text{iperbolici}}$.

Naturalmente, le rotazioni sono isometrie.

$(x,\theta) \mapsto (x, \theta+\theta_0)$

Una eventuale isometria $(x,\theta)\mapsto(\bar{x}(x,\theta),\bar{\theta}(x,\theta))$

deve mantenere K, per cui $\frac{x^2}{(1+x^4)^2}=\frac{\bar{x}^2}{(1+\bar{x}^4)^2}$

e si vede che $\bar{x}$ dipende solo da x (oltre a ovvie soluzioni $\bar{x}=\pm x$)

Usando $J=\begin{pmatrix}\bar{x}_x & 0\\ \bar{\theta}_x & \bar{\theta}_\theta\end{pmatrix}$ e imponendo $J^t\begin{pmatrix}\frac{1+\bar{x}^4}{\bar{x}^4} & 0\\ 0 & \bar{x}^2\end{pmatrix}J=\begin{pmatrix}\frac{1+x^4}{x^4} & 0\\ 0 & x^2\end{pmatrix}$

$$\shortparallel$$

$$\begin{pmatrix}\bar{x}_x^2\frac{1+\bar{x}^4}{\bar{x}^4}+\bar{x}^4\bar{\theta}_x^2 & \bar{x}^4\bar{\theta}_\theta\bar{\theta}_x\\ & \bar{x}^4\bar{\theta}_\theta^2\end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo $\bar{\theta}_x=0$ ($\bar{\theta}$ non dipende da x)

e allora $\bar{x}^4\bar{\theta}_\theta^2=x^4$ dice $\bar{\theta}_\theta=$ costante indip da θ

(quindi ± 1 viste le possibilità per $\bar{x}$)

e $\bar{x}=\pm x$.

(d) Le linee asintotiche (ne esistono 2 per ogni punto, visto che i punti sono iperbolici) hanno equaz diff

$(x'\,\theta')\,G_{II}\begin{pmatrix}x'\\ \theta'\end{pmatrix}=0$, cioè $\frac{2}{x}x'^2-x\theta'^2=0$,

quindi $\theta'^2=2\frac{x'^2}{x^2}$, $\theta'=\pm\sqrt{2}\frac{x'}{x}$

che si risolve esplicitamente $\theta=\pm\sqrt{2}\lg x+\theta_0$.

Siccome L è già diagonale, le linee di curvatura sono le linee coordinate della parametrizzazione,

le curve con versore tg $\begin{pmatrix}x'\\ \theta'\end{pmatrix}$ che formano angolo costante con queste sono determinate dalle equaz diff

$\frac{(x'\,\theta')\,G_I\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}}{\sqrt{1}\,\sqrt{(0\,1)G_I\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}}}=c$, cioè $\frac{x^2\theta'}{x}=c$

(e unitarietà $\frac{1+x^4}{x^4}x'^2+x^2\theta'^2=1$),

dalla prima otteniamo $\theta'=\frac{c}{x}$

dalla seconda $x'^2=(1-c^2)\frac{x^4}{1+x^4}$

e quindi $\frac{d\theta}{dx}=\frac{\theta'}{x'}=\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}\frac{\sqrt{1+x^4}}{x^3}$, equazione ordinaria

(e) equazioni differenziali delle geodetiche:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1+x^4}{x^4}\, x'\right)' = \dfrac{1}{2}\left[-\dfrac{4}{x^5}\, x'^2 + 2x\,\vartheta'^2\right] \\ (x^2\,\vartheta')' = 0 \end{cases}$$

dalla seconda $x^2\vartheta' = c$, cioè $\vartheta' = \dfrac{c}{x^2}$ (supponiamo $c \neq 0$)

e dalla unitarietà $\dfrac{1+x^4}{x^4}\, x'^2 + x^2\vartheta'^2 = 1$

otteniamo $\dfrac{1+x^4}{x^4}\, x'^2 + x^2\, \dfrac{c^2}{x^4} = 1$

da cui si deduce $\dfrac{c^2}{x^2} \leq 1$, $x^2 \geq c^2$

cioè le geodetiche con $c \neq 0$ hanno sempre valori $x \geq c$,

quindi altezze $z = \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{c}$.

Uniche eccezioni sono i profili, che hanno $c = 0$, sono geodetiche e assumono valori di z arbitrariamente grandi.