DOMANDE SUL COMPITINO:

0. GLI ISCRITTI RICEVERANNO ISTRUZIONI PRECISE IL GIORNO STESSO

1. BISOGNA AVERE:

   - CARTA / PENNA + STRUMENTI DI DIGITALIZZAZIONE (scanner / foto) in modo da inviare 1 solo file
   - oppure tablet per scrivere a mano e poi produrre 1 solo file

   no TEX o altre tipografie: i testi devono essere autografi.

   i file devono essere pdf o jpg

2. Si useranno due contemporanee:

   una sessione zoom

   una attività "COMPITO" su Moodle

3. il testo del compito si potrà ottenere via zoom o via moodle

4. La consegna si potrà fare:

   - preferibilmente via moodle,
   - se non funziona moodle via zoom,
   - se non funziona nulla, via mail

DOMANDE SUGLI APPELLI:

In sostanza ci hanno detto che nessun modo per fare scritti è sicuro!

E anche per gli orali non c'è che sia tanto meglio: dobbiamo occuparci noi se qualcosa non va ...

DOMANDE:

① COSA VUOL DIRE "ESSERE PROPRIETÀ INTRINSECA DI UNA SUPERFICIE"?

R: vuol dire che <u>dipende solo dalla pff</u> della sup

(<u>quindi</u>: è invariante per isometrie locali; può essere calcolata tramite misure locali sulla sup.)

② localm. isom $\Rightarrow$ stessa curvatura

$\not\Leftarrow$ anche nel caso di curvatura 0.

(S isom. piano $\underset{\not\Leftarrow ?}{\Rightarrow}$ $K_S = 0$)

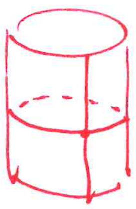
③ CURVA DI MINIMA DISTANZA $\overset{?}{\Rightarrow}$ GEODETICA

$\not\Leftarrow$

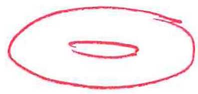
bisogna specificare "tra due fissati punti", allora ?= sì, perché una caratterizzazione delle geodetiche (sist. diff.) è di essere punti critici del funzionale lunghezza (o energia)

④ Quanto "si somigliano" due geodetiche su una superficie?

R: poco:



, sul toro



ce ne sono di chiuse e di dense...

DARBOUX PER CURVE PIANE

γ piana $\subseteq$ piano π $\perp$ versore b

Frénet: $t=\gamma'$, n, b $\quad (t\,n\,b)' = (t\,n\,b)\begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$

Darboux: $t=\gamma'$, n, b

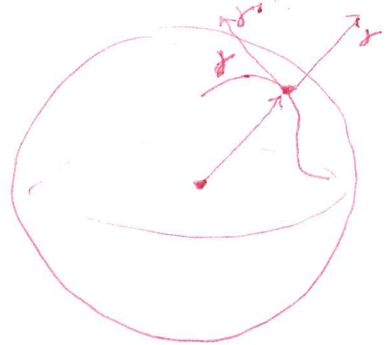
$n = b \times t$

b: normale alla sup. π

quindi è esattamente Frénet!

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} \kappa_g &= \kappa \\ \kappa_n &\equiv 0 \\ \tau_g &= \tau \end{aligned}$$

Riferimento ed equazioni di Darboux per γ spazio unitario $\subseteq S^2$ sfera unitaria.



Frénet : $e_1 = \gamma'$, $e_2 = \dfrac{\gamma''}{\|\gamma''\|}$, $e_3 = \dfrac{\gamma' \times \gamma''}{\|\gamma''\|}$

Darboux : $v_1 = \gamma'$, $v_2 = v_3 \times v_1 = \gamma \times \gamma'$, $v_3 = n_S = \gamma$

$$(v_1\ v_2\ v_3)' = (\gamma'', \gamma \times \gamma'', \gamma') = (v_1\ v_2\ v_3)\begin{pmatrix} 0 & -J & 1 \\ J & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

γ'

da cui
$$k_g = J$$
$$k_n = -1$$
$$\tau_g = 0$$

$$\gamma'' = \underbrace{(\gamma''\cdot v_1)}_{\substack{\gamma''\cdot\gamma' \\ = 0}} v_1 + \underbrace{(\gamma''\cdot v_2)}_{\substack{\gamma\times\gamma'\cdot\gamma'' \\ = J}} v_2 + \underbrace{(\gamma''\cdot v_3)}_{\substack{\gamma\cdot\gamma'' \\ = -1}} v_3 = J\,\gamma\times\gamma' - \gamma$$

$\left(\gamma\cdot\gamma' = 0 \quad \gamma'\cdot\gamma' + \gamma\cdot\gamma'' = 0\right)$

Otteniamo infatti $k_\gamma = \sqrt{1+J^2} = \sqrt{k_n^2 + k_g^2}$

e verifichiamo che τ_γ è tutta dovuta alla deriva dei due riferimenti!

se θ = angolo tra e_2 e v_3 (normale princ. γ e normale superficie):

$$\cos\theta = e_2\cdot v_3 = \frac{\gamma\cdot\gamma''}{\|\gamma''\|} = -\frac{1}{\|\gamma''\|} = -\frac{1}{\sqrt{1+J^2}}$$

$$-\theta'\sin\theta = -\left(\frac{1}{\|\gamma''\|}\right)'$$

$$\theta'\sqrt{1-\frac{1}{\|\gamma''\|^2}} = -\frac{\gamma''\cdot\gamma'''}{\|\gamma''\|^3} \Rightarrow \theta' = \dots = -\tau_\gamma .$$

oppure: $-\theta'\sin\theta = -\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+J^2}}\right)'$

$$\theta'\sqrt{1-\frac{1}{1+J^2}} = -\frac{JJ'}{(1+J^2)\sqrt{1+J^2}}$$

$$\theta' = -\frac{J'}{1+J^2} = -\tau_\gamma .$$

Esercizio 1. Sia $\gamma(s)$ una curva biregolare unitaria in $\mathbb{R}^3$ (t, n, b il suo riferimento di Frenet, κ e τ curvatura e torsione, supposte entrambe non nulle).

(a) Esistono curve β che abbiano il versore $b(s)$ come versore tangente? Determinare riferimento di Frenet, curvatura e torsione di tali curve.

(b) Esistono curve α che abbiano il versore $n(s)$ come versore tangente? Determinare riferimento di Frenet, curvatura e torsione di tali curve.

(c) Le curve dei punti precedenti sono uniche, eventualmente a meno di quali trasformazioni? Esse determinano la curva di partenza γ, eventualmente a meno di quali trasformazioni?

Esercizio 2. Si consideri la superficie σ formata dalla unione delle rette tangenti all'elica cilindrica $\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ \theta\end{smallmatrix}\right)$ con $\theta \in \mathbb{R}$. Scrivere una parametrizzazione di σ usando come parametri u e θ.

(a) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(b) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(c) Per le linee coordinate della parametrizzazione data, determinare la famiglia delle curve ortogonali su σ.

(d) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee di curvatura su σ.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema? La superficie è localmente isometrica al piano?

22 aprile 2016

(a) basta usare come $\beta(s)$ una primitiva di $b(s)$

allora:

$\beta' = b$ (β unitaria!)

$\beta'' = b' = -\tau n$

$$\begin{aligned}\beta''' &= -(\tau n)' \\ &= -\tau' n - \tau n' \\ &= -\tau' n - \tau(-\kappa t + \tau b) \\ &= \kappa\tau t - \tau' n - \tau^2 b\end{aligned}$$

quindi:

$\kappa_\beta = \|\beta''\| = |\tau|$.

$$\tau_\beta = \frac{|\beta'\beta''\beta'''|}{\|\beta''\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \kappa\tau \\ 0 & -\tau & \vdots \\ 1 & 0 & \vdots \end{vmatrix}}{|\tau|^2} = \frac{\kappa\tau^2}{|\tau|^2} = \kappa.$$

(b) basta usare come $\alpha(s)$ una primitiva di $n(s)$

allora:

$\alpha' = n$ (α unitaria!)

$\alpha'' = n' = -\kappa t + \tau b$

$$\begin{aligned}\alpha''' &= -\kappa' t - \kappa t' + \tau' b + \tau b' = \\ &= -\kappa' t - (\kappa^2+\tau^2) n + \tau' b\end{aligned}$$

quindi:

$\kappa_\alpha = \|\alpha''\| = \sqrt{\kappa^2+\tau^2}$.

$$\tau_\alpha = \frac{|\alpha'\alpha''\alpha'''|}{\|\alpha''\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -\kappa & -\kappa' \\ 1 & 0 & * \\ 0 & \tau & \tau' \end{vmatrix}}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}^{\,2}} = \frac{\kappa\tau' - \kappa'\tau}{\kappa^2+\tau^2} = \frac{(\kappa/\tau)'\,\tau^2}{\kappa^2+\tau^2} = \frac{(\kappa/\tau)'}{1+(\kappa/\tau)^2}.$$

(c) A meno di casi particolari, α e β sono definite a meno di traslazioni, perché [illegible] solo il rif. Frenet.

Data β, conosciamo κ e $|\tau|$, quindi τ dove >0, quindi γ mod isom. spazio. Siccome possiamo ricostruire rif Frenet di γ, conosciamo γ a meno di traslazioni.

Data α, conosciamo n

e $-\kappa t + \tau b$
$-\kappa' t + \tau' b$

quindi se $\begin{vmatrix} \kappa & \tau \\ \kappa' & \tau' \end{vmatrix} \neq 0$

ricaviamo t, b, quindi γ mod traslazioni.

Se invece $\begin{vmatrix} \kappa & \tau \\ \kappa' & \tau' \end{vmatrix} = 0$, cioè $\kappa\tau' - \kappa'\tau = 0$, cioè $(\kappa/\tau)' = 0$, (caso di eliche).

D'altra parte eliche non isometriche (eliche cilindriche) possono avere stesse funzioni $n(s)$.

Esercizio 1. Sia $\gamma = \gamma(s)$ una curva regolare unitaria in $\mathbb{R}^n$ ($e_1, \ldots, e_n$ il suo riferimento di Frénet, $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ le curvature, supposte tutte mai nulle).

(a) Dato un punto $P \in \mathbb{R}^n$, definiamo le funzioni $a_i(s) = (\gamma - P) \cdot e_i$. Mostrare che tali funzioni soddisfano al sistema differenziale

$$(\, a_1' - 1 \quad a_2' \quad \cdots \quad a_n' \,) = (\, a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \,)\, K$$

dove K è la matrice di Frénet di γ.
[Sugg.: partire dal sistema di Frénet e moltiplicare scalarmente per $(\gamma - P)$*]*

(b) Mostrare che la curva γ è sferica (cioè è contenuta in una sfera di $\mathbb{R}^n$) se e solo se le seguenti condizioni equivalenti (tra loro) sono soddisfatte:
(1) esiste $P \in \mathbb{R}^n$ tale che $a_1 = 0$ e $a_2^2 + \cdots + a_n^2 = R^2$ (costante);
(2) esiste $P \in \mathbb{R}^n$ tale che il sistema del punto (a) è della forma

$$(\, -1 \quad a_2' \quad \cdots \quad a_n' \,) = (\, 0 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \,)\, K \; ;$$

(3) le curvature $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ soddisfano ad una relazione dedotta dall'ultima delle equazioni del punto (2).
[Sugg.: scrivere e risolvere ricorsivamente il sistema in (2)*]*

(c) Nei casi $n = 2, 3, 4$ esplicitare le relazioni precedenti (punto (b3)) tra le curvature affinché la curva γ sia sferica.

Esercizio 2. Sia $\gamma(s)$ una curva piana regolare unitaria, e si consideri la superficie $\sigma(s,t)$ formata dalla unione delle curve che si ottengono traslando γ nella direzione $tv + \sin(t)w$ dove v è versore ortogonale al piano di γ e w versore del piano di γ. Mostrare che si può ottenere una parametrizzazione di σ della forma

$$\sigma(s,t) = \begin{pmatrix} x(s) + \sin(t) \\ y(s) \\ t \end{pmatrix}$$

con $x_s^2 + y_s^2 = 1$.

(a) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(b) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(c) Determinare la famiglia delle curve ortogonali delle linee coordinate della parametrizzazione data su σ.

(d) Determinare (equazioni differenziali per) le linee asintotiche e le linee di curvatura di σ.

(e) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ. Vi sono linee coordinate che siano anche geodetiche? Vi sono casi in cui σ è localmente isometrica al piano?

21 aprile 2017

$\gamma(s)$ regolare unitaria in $\mathbb{R}^n$, $e_1, \dots, e_n$ rif. Frénet
$k_1, \dots, k_{n-1}$ curvature (mai nulle).

(a) $a_i(s) := (\gamma - P) \cdot e_i$

$$(e_1, \dots, e_n)' = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & & & \\ k_1 & 0 & -k_2 & & \\ & k_2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & -k_{n-1} \\ & & & k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$
$(e_1', \dots, e_n')$

$$\begin{cases} e_1' = k_1 e_2 \\ e_2' = -k_1 e_1 + k_2 e_3 \\ \vdots \\ e_i' = -k_{i-1} e_{i-1} + k_i e_{i+1} \\ \vdots \\ e_{n-1}' = -k_{n-2} e_{n-2} + k_{n-1} e_n \\ e_n' = -k_{n-1} e_{n-1} \end{cases}$$

allora

$$a_i' = ((\gamma - P) \cdot e_i)' = \gamma' \cdot e_i + (\gamma - P) \cdot e_i' = \begin{cases} 1 + (\gamma - P) \cdot e_1' & \text{se } i = 1 \ (e_1 = \gamma') \\ (\gamma - P) \cdot e_i' & \text{per } i > 1 \end{cases}$$

quindi dal sistema di Frenet, usando $(\gamma - P) \cdot$

$$(a_1' - 1, a_2', \dots, a_n') = (a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & & & \\ k_1 & 0 & -k_2 & & \\ & k_2 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & -k_{n-1} \\ & & & k_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

i.e.

$$\begin{cases} a_1' - 1 = k_1 a_2 \\ a_2' = -k_1 a_1 + k_2 a_3 \\ \vdots \\ a_i' = -k_{i-1} e_{i-1} + k_i a_{i+1} \\ \vdots \\ a_{n-1}' = -k_{n-2} e_{n-2} + k_{n-1} a_n \\ a_n' = -k_{n-1} a_{n-1} \end{cases}$$

(b) se γ sferica (ie $\gamma \subseteq$ sfera centro P e raggio R)

$\Rightarrow$

$(\gamma - P) \cdot e_1 = (\gamma - P) \cdot \gamma' = 0 \ (= a_1)$

$\| \gamma - P \|^2 = \| \sum a_i e_i \| = \sum a_i^2 = R^2 \quad \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=2}^n a_i^2 \text{ perché } a_1 = 0 \right)$

quindi vale (1), ie viceversa ovvio.

Se vale (1) basta scrivere il sistema con $a_1 = 0$, e si trova (2)

viceversa confrontando i due sistemi si vede $a_1 = 0$,
e poi si calcola $(\sum a_i^2)' = 2 \sum a_i a_i'$ come

$$(a_1', \dots a_n') \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} & & \\ & K & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \quad (K \text{ antisimm})$$

anche $a_1' - 1$ perché $a_1 = 0$

se vale (2), scriviamo e risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} -1 = k_1 a_2 \\ a_2' = k_2 a_3 \\ a_3' = -k_2 a_2 + k_3 a_4 \\ \vdots \\ a_i' = -k_{i-1} a_{i-1} + k_i a_{i+1} \\ \vdots \\ a_{n-1}' = -k_{n-2} a_{n-2} + k_{n-1} a_n \\ a_n' = -k_{n-1} a_{n-1} \end{cases}$$

da cui:

$$\begin{cases} a_2 = -\frac{1}{k_1} \\ a_3 = \frac{1}{k_2} a_2' = -\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)' \\ a_4 = \frac{1}{k_3}(a_3' + k_2 a_2) = \dots \\ \vdots \\ a_{i+1} = \frac{1}{k_i}(a_i' + k_{i-1} a_{i-1}) \\ \vdots \\ a_n = \frac{1}{k_{n-1}}(a_{n-1}' + k_{n-2} a_{n-2}) \end{cases}$$

e RESTA: $a_n' = -k_{n-1} a_{n-1}$

quindi possiamo scrivere i coefficienti $a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ come funzioni delle curvature (e derivate!) e sostituirle nell'ultima, trovando relazione

$$a_n(k_1, \dots, k_{n-1})' = -k_{n-1} a_{n-1}(k_1, \dots, k_{n-2})$$

tra le curvature

Viceversa: se vale questa relazione tra le curvature, definiamo $a_1 = 0$, $a_2, \dots, a_n$ come nell'ultimo sistema, e quindi vale il sistema di (2).

Definiamo il punto P tramite ($\gamma - P = \sum a_i e_i \dots$)

$$P := \gamma - \sum a_i e_i \quad (\text{che a priori dipende da } s \dots)$$

e verifichiamo che P è costante (ie $P' = 0$)

(e poi $\|\gamma - P\|^2 = \sum a_i^2$ è costante per (2) essendo $a_i = (\gamma - P)\cdot e_i$):

$$\begin{aligned} P' &= (\gamma - \textstyle\sum a_i e_i)' \\ &= \gamma' - \textstyle\sum a_i' e_i - \sum a_i e_i' \\ &= (1 - a_1', -a_2', \dots, -a_n') \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} - (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} e_1' \\ \vdots \\ e_n' \end{pmatrix} \\ &= -(a_1 \dots a_n) K \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} - (a_1 \dots a_n) K^t \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

(perché K antisimm.)

(c) $\underline{n=2}$:

$$\begin{cases} -1 = k_1 a_2 \\ a_2' = -k_1 a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -1/k_1 \\ a_2' = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{1}{k_1}\right)' = 0 \Rightarrow k_1' = 0.$$

(K COSTANTE)

$\underline{n=3}$:

$$\begin{cases} -1 = k_1 a_2 \\ a_2' = k_2 a_3 \\ a_3' = -k_2 a_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{k_1} \\ a_3 = \frac{1}{k_2} a_2' = \frac{1}{k_2}\left(-\frac{1}{k_1}\right)' \\ a_3' = -k_2 a_2 \end{cases} \Longrightarrow \left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)' = -\frac{k_2}{k_1}$$

oppure $a_2^2 + a_3^2 = \text{costante}$

$$\left(\frac{1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)^2 = \text{costante}$$

$\underline{n=4}$

$$\begin{cases} -1 = k_1 a_2 \\ a_2' = k_2 a_3 \\ a_3' = -k_2 a_2 + k_3 a_4 \\ a_4' = -k_3 a_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_2 = -1/k_1 \\ a_3 = \frac{1}{k_2} a_2' = \frac{1}{k_2}\left(-\frac{1}{k_1}\right)' \\ a_4 = \frac{1}{k_3}\left(a_3' + k_2 a_2\right) = -\frac{1}{k_3}\left(\left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)' + \frac{k_2}{k_1}\right) \\ a_4' = -k_3 a_3 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{1}{k_3}\left(\left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)' + \frac{k_2}{k_1}\right)\right)' = -\frac{k_3}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'$$

oppure $a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = \text{costante}$

$$\left(\frac{1}{k_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)^2 + \left(\frac{1}{k_3}\left(\frac{1}{k_2}\left(\frac{1}{k_1}\right)'\right)' + \frac{k_2}{k_1}\right)^2 = \text{costante}.$$

Esercizio 1. Sia $\gamma(s)$ una curva unitaria sulla sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$ (κ e τ curvatura e torsione).

(a) Usando il sistema mobile ortonormale $\gamma, \gamma', \gamma \times \gamma'$ e l'invariante $J = \det(\gamma\,\gamma'\,\gamma'')$ mostrare che $\gamma'' = -\gamma + J(\gamma \times \gamma')$. Esprimere anche γ''' nel sistema detto e calcolare κ e τ in funzione di J.

(b) Definiamo ora la curva λ come una primitiva di γ. Determinare sistema di Frénet, curvatura κ_λ e torsione τ_λ di λ. In quali casi λ è un'elica o una curva piana?

(c) È vero o falso che ogni curva unitaria (nello spazio) di curvatura costante è una primitiva di una curva sferica? Nel caso, come si costruisce tale curva sferica, e quanto valgono curvatura e torsione?

Nota: la terza domanda com'è formulata è banale (non serve neppure l'ipotesi di curvatura costante) e doveva essere: È vero o falso che ogni curva unitaria (nello spazio) di curvatura costante è una primitiva di una curva sferica unitaria? Nel caso, come si costruisce tale curva sferica, e quanto valgono curvatura e torsione?

Moralmente si tratta di caratterizzare le curve unitarie a curvatura costante nello spazio. Quando si usa una primitiva di una curva data, il risultato dipende dalla parametrizzazione scelta, cioè non è invariante (come curva) per riparametrizzazioni, e quindi si deve scegliere una parametrizzazione canonica (quella d'arco) per dare senso alla definizione.

Esercizio 2. Si consideri la superficie σ formata dalla unione delle rette normali (principali) dell'elica cilindrica $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \theta \end{pmatrix}$ con $\theta \in \mathbb{R}$. Scrivere una parametrizzazione di σ usando come parametri u e θ.

(a) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(b) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(c) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee di curvatura su σ.

(d) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; vi sono soluzioni evidenti di questo sistema?

(e) Ridurre il sistema del punto precedente ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine. A quali limitazioni su u e θ sono soggette le linee geodetiche?

27 aprile 2018

γ curva sferica unitaria $\subseteq \mathbb{S}^2$ (sfera unitaria).

(a) usiamo il sist. mob. ortonormale $\gamma, \gamma', \gamma\times\gamma'$, sia $J = |\gamma\,\gamma'\,\gamma''|$.

allora:

$$\gamma'' = (\gamma\cdot\gamma'')\gamma + (\gamma'\cdot\gamma'')\cdot\gamma' + ((\gamma\times\gamma')\cdot\gamma'')\,\gamma\times\gamma'$$

ma: $\gamma\cdot\gamma' = 0 \Rightarrow \gamma'\cdot\gamma' + \gamma\cdot\gamma'' = 0 \Rightarrow \gamma\cdot\gamma'' = -1$

$\gamma'\cdot\gamma'' = 0$

$(\gamma\times\gamma')\cdot\gamma'' = |\gamma\,\gamma'\,\gamma''| = J$

$$= -\gamma + J(\gamma\times\gamma')$$

$$\gamma''' = (\gamma\cdot\gamma''')\gamma + (\gamma'\cdot\gamma''')\gamma' + ((\gamma\times\gamma')\cdot\gamma''')\,\gamma\times\gamma'$$

ma: $\gamma\cdot\gamma'' = -1 \Rightarrow \underbrace{\gamma'\cdot\gamma''}_{0} + \gamma\cdot\gamma''' = 0$

$\gamma'\cdot\gamma'' = 0 \Rightarrow \gamma''\cdot\gamma'' + \gamma'\cdot\gamma''' = 0$

$\Rightarrow \gamma'\cdot\gamma''' = -\|\gamma''\|^2 = -(1+J^2)$

$$= -(1+J^2)\gamma' + J'(\gamma\times\gamma')$$

perché $\gamma\times\gamma'\cdot\gamma''' = |\gamma\,\gamma'\,\gamma'''|$

$= |\gamma\,\gamma'\,\gamma''|' = J'$

da cui:

$$k = \|\gamma''\| = \sqrt{1+J^2}$$

$$\tau = \frac{|\gamma'\,\gamma''\,\gamma'''|}{\|\gamma''\|^2} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1-J^2 \\ 0 & J & J' \end{vmatrix}}{1+J^2} = \frac{J'}{1+J^2}.$$

(b) se λ primitiva di γ otteniamo:

$\lambda' = \gamma$

$\lambda'' = \gamma'$ (quindi unitaria)

$\lambda''' = \gamma''$

da cui: $k = \|\lambda''\| = \|\gamma'\| = 1$

$$\tau = \frac{|\lambda'\,\lambda''\,\lambda'''|}{\|\lambda''\|^2} = \frac{|\gamma\,\gamma'\,\gamma''|}{\|\gamma'\|^2} = J.$$

(c) se una curva δ è unitaria con $k_\delta = 1$

allora è primitiva di una γ sferica unitaria, $\subseteq S^2$

che abbia $J = \tau_\delta$.

in generale, no: se $\delta(s)$ è unitaria con $k_\delta = c$ costante,

allora $c\delta\left(\frac{s}{c}\right)$ è unitaria con curvatura $= 1$,

quindi è primitiva di $\gamma(s)$ come prima,

ma non $\delta(s)$.

Esercizio 1. Sia $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow Rig(\mathbb{R}^n)$ una mappa differenziabile di gruppi dal gruppo additivo $\mathbb{R}$ al gruppo (per composizione) delle rigidità euclidee di $\mathbb{R}^n$, cioè $\phi(0) = \text{id}$ e $\phi(t+s) = \phi(t) \circ \phi(s)$. La mappa ϕ e la sua immagine si dicono un sottogruppo 1-parametrico delle rigidità.

(*a*) Mostrare che l'immagine di ϕ è un sottogruppo commutativo di $Rig(\mathbb{R}^n)$, che $\phi'(t) = \phi(t) \circ \phi'(0) = \phi'(0) \circ \phi(t)$ e dedurre che $\phi^{(i)}(t) = \phi(t) \circ \phi'(0)^i$.

(*b*) Consideriamo ora un punto P_0 e definiamo la curva $\gamma(t)$ come la traiettoria di P_0 sotto l'azione del gruppo $\phi(t)$, cioè $\gamma(t) := \phi(t)(P_0)$. Mostrare che $\gamma^{(i)}(t) = \phi(t)\gamma^{(i)}(0)$. Dedurre che tutte le curvature di γ sono costanti. *[sugg.: cosa si può dire del riferimento di Frénet di γ?]*

(*c*) Viceversa, consideriamo una curva $\gamma(t)$ in $\mathbb{R}^n$ le cui curvature siano tutte costanti; mostrare che γ può essere descritta come nella costruzione precedente, cioè che γ è la traiettoria di un punto sotto l'azione di un sottogruppo 1-parametrico delle rigidità. *[sugg.: definire $\phi(t)$ nel modo ovvio a partire da $\gamma(t)$, poi mostrare che si tratta di un sottogruppo 1-dimensionale.]*

(*d*) Usare i punti precedenti e la struttura delle rigidità di $\mathbb{R}^n$ *[sugg.: forme canoniche con blocchi diagonali per $SO_n(\mathbb{R})$, e traslazioni nulle per i blocchi con autovalori $\neq 1$]* per dare delle forme canoniche semplici per le curve a curvature costanti non nulle per $n = 2, 3, 4, 5$.

Esercizio 2. Si consideri la superficie ottenuta ruotando la curva $\gamma(u) = \begin{pmatrix} 1/\cosh(u) \\ 0 \\ u-\tanh(u) \end{pmatrix}$ per $u > 0$ attorno all'asse verticale. Scrivere una parametrizzazione σ usando come parametri u e θ.

(*a*) Determinare le matrici di prima e seconda forma fondamentale di σ.

(*b*) Determinare la matrice dell'applicazione di Weingarten, e la curvatura K di σ; che tipi di punti vi sono su σ?

(*c*) Determinare le linee asintotiche di σ e le linee di curvatura su σ.

(*d*) Determinare le equazioni differenziali delle linee geodetiche di σ; ridurre il sistema ad una equazione differenziale ordinaria del prim'ordine.

(*e*) Descrivere le limitazioni a cui sono soggette le geodetiche, e in particolare determinare la minima distanza dall'asse di rotazione e la massima altezza che possono essere raggiunta da una geodetica.

29 aprile 2019

$\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{Rig}(\mathbb{R}^n)$ mappa diff gruppi : $\phi(0) = \mathrm{id}$, $\phi(t+s) = \phi(t)\circ\phi(s)$

(a) $\phi(t), \phi(s) \in \mathrm{im}\,\phi$: $\phi(t)\circ\phi(s) = \phi(t+s) = \phi(s+t) = \phi(s)\circ\phi(t)$

(imm. di gruppi commutativi per om. gruppi è commutativa!)

$$\phi'(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\phi(t+\varepsilon)-\phi(t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\phi(t)\circ\phi(\varepsilon)-\phi(t)}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \phi(t)\circ \frac{\phi(\varepsilon)-\phi(0)}{\varepsilon} = \phi(t)\circ\phi'(0) = \text{similm.} = \phi'(0)\phi(t).$$

per induzione

$$\phi^{(i)}(t) = \left(\phi^{(i-1)}(t)\right)' = \left(\phi(t)\circ\phi'(0)^{i-1}\right)' = \phi'(t)\circ\phi'(0)^{i-1} =$$

$$= \phi(t)\circ\phi'(0)\circ\phi'(0)^{i-1} = \phi(t)\circ\phi'(0)^{i}.$$

(b) per $P_0 \in \mathbb{R}^n$: $\gamma(t) := \phi(t)P_0$

allora $\gamma^{(i)}(t) = (\phi(t)P_0)^{(i)} = \phi^{(i)}(t)\,P_0 = \phi(t)\circ\phi'(0)^i P_0 = \phi(t)\gamma^{(i)}(0)$

ma $\gamma^{(i)}(0) = \underbrace{\phi(0)}_{\mathrm{id}}\circ\phi'(0)^i P_0 = \phi'(0)^i P_0$

NOTA : qualcuno confonde $\phi'(0)$ con $\phi(0)'$ ⚠

$\phi'(0) = \phi'(t)\big|_{t=0}$ $\qquad$ $\phi(0)' = (\mathbb{1})' = 0$

Quindi per i rif. mobili $\Gamma(t)$ e $E(t)$ (Frenet = ortog. GS di $\Gamma(t)$)

si ha $\Gamma(t+\varepsilon) = \phi(t)\Gamma(\varepsilon)$ e $E(t+\varepsilon) = \phi(t)E(\varepsilon)$,

perché $\phi(t)$ è trasf ortogonale, quindi il calcolo di E'

è lo stesso attorno a 0 e attorno a t: $K(0) = K(t)$,

cioè le curvature sono tutte costanti in quanto

invarianti per trasformazioni ortogonali.

Cioè da $\quad E(t) = \phi(t)E(0)$

$$E'(t) = \phi(t)E'(0)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{E(t+\varepsilon)-E(t)}{\varepsilon} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\phi(t)E(\varepsilon)-\phi(t)E(0)}{\varepsilon} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\phi(t)\left(\frac{E(\varepsilon)-E(0)}{\varepsilon}\right)$$

$$\underline{E(t)K(t)} = \underline{\phi(t)E(0)K(0)}$$

(c) Viceversa, sia γ curva in $\mathbb{R}^n$ con curvature costanti - definiamo $\phi(t)$ tramite:

$\gamma(t) = \phi(t)(\gamma(0))$ (questo definisce la parte di traslazione)

$E(t) = \phi(t)(E(0))$ (questo definisce la parte lineare, necessariamente in $SO_3(\mathbb{R})$ perché $E(0)$ e $E(t)$ sono riferimenti ortogonali)

quindi certamente ϕ ha valori in $Rig(\mathbb{R}^n)$,
e certamente $\phi(0) = id$,
poi da $\phi'(t) = \phi(t) K$ con K matrice costante (curvature)
si ha $\phi(t) = e^{Kt}$, che dà un gruppo 1-parametro.

(d) <u>$n=2$</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ R\cos\vartheta \\ R\sin\vartheta \end{pmatrix} \Big] \text{ CERCHI}$$

<u>$n=3$</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ b\vartheta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ R\cos\vartheta \\ R\sin\vartheta \\ b\vartheta \end{pmatrix} \Big] \text{ ELICHE CIRCOLARI}$$

<u>$n=4$</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & 0 & 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ R \\ 0 \\ S \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ R\cos\vartheta \\ R\sin\vartheta \\ S\cos\vartheta \\ S\sin\vartheta \end{pmatrix} \Big] \text{ ELICHE TORICHE}$$