Esercizi per Sviluppare l'Immaginazione - Matematica Due - 2003

1. Il nuovo appartamento (F. Baldassarri). Un Tizio compra un nuovo appartamento, sottinsieme dello spazio euclideo reale 4-dimensionale, della forma:

$$A = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}^4(\mathbb{R}) \text{ tali che } x_i \in [0,1] \text{ per ogni } i \text{ e } x_i \in \{0,1\} \text{ per almeno un } i \right\}$$

(si tratta della "buccia tridimensionale" dell'ipercubo unitario $[0,1]^4$ di $\mathbb{E}^4(\mathbb{R})$).

Diciamo che una stanza sia un insieme in biiezione con $[0,1]^3$, e una parete sia un insieme in biiezione con $[0,1]^2$.

1.1. Quante stanze vi sono nell'appartamento A? Per ciascuna stanza trovare una biiezione con $[0,1]^3$ che rispetti le strutture metriche (distanze ed angoli).

1.2. Se ogni parete (compresi soffitti e pavimenti) di ogni stanza dell'appartamento ha una porta, quante porte ci sono? Quante porte di ingresso?

1.3. Tizio vuole dipingere le stanze, in modo che stanze adiacenti abbiano colori diversi, usando il minimo numero possibile di colori. Quanti ne occorrono?

1.4. Fare un disegno dell'appartamento in cui si possano controllare i risultati precedenti.

Suggerimenti e sviluppi.

1.5. Può essere utile pensare all'esercizio che un matematico bidimensionale darebbe ai propri studenti circa la buccia bidimensionale del cubo tridimensionale (per loro una "stanza" è un quadrato e una "parete" è un segmento).

1.6. La buccia tridimensionale dell'ipercubo in dimensione 5 è una villa.

2. La divisione dell'appartamento. Tizio decide di dividere l'appartamento in due unità, e sta considerando le seguenti possibilità:

(1) $A = A_0 \cup A_1$ ove

$$A_0 = \{x \in A \text{ tali che } x_i = 0 \text{ per almeno un } i\}$$
$$A_0 = \{x \in A \text{ tali che } x_i = 1 \text{ per almeno un } i\}$$

(2) $A = B \cup C$ ove

$$B = \{x \in A \text{ tali che } x_i \in \{0,1\} \text{ per almeno un } i \in \{1,2\}\}$$
$$C = \{x \in A \text{ tali che } x_i \in \{0,1\} \text{ per almeno un } i \in \{3,4\}\}$$

2.1. È vero che in entrambi i casi l'appartamento è diviso in parti uguali e senza sovrapposizioni? Per entrambe le possibilità, fare un disegno delle due parti.

2.2. Quale divisione bisognerà scegliere per minimizzare in numero di porte di comunicazione tra le due parti?

2.3. Quale divisione bisognerà scegliere affinché in entrambe le parti siano presenti stanze di tutti i colori possibili (avendo colorato le stanze come nell'esercizio precedente)?

3. Parallelepipedi e tetraedri. Dati m vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^n$ ricordiamo che il parallelepipoide m-dimensionale (parallelogramma se $m = 2$, parallelepipedo se $m = 3$) da essi generato è l'insieme delle loro combinazioni lineari con coefficienti compresi tra 0 e 1; mentre il simplesso m-dimensionale (triangolo se $m = 2$, tetraedro se $m = 3$) da essi generato è l'insieme delle loro combinazioni lineari con coefficienti compresi tra 0 e 1 sottoposti alla condizione che la somma sia minore o uguale a 1.

Si sa che il volume m-dimensionale di un m-parallelepipoide è $m!$ (m fattoriale) volte quello dell'm-simplesso generato dagli stessi vettori. Come si giustifica "intuitivamente" questo fatto?

3.1. per $m = 2$ possiamo dividere il parallelogramma in due triangoli congruenti, ed in effetti sovrapponibili.

3.2. per $m = 3$ possiamo dividere il parallelepipedo in sei tetraedri congruenti tra loro, ma non necessariamente sovrapponibili. Fare un disegno della situazione e costruirsi un modellino di parallelepipedo (di polistirolo o gommapiuma) così sezionato.

3.3. per $m = 4$ possiamo dividere il parallelepipoide in 24 simplessi congruenti tra loro, ma non necessariamente sovrapponibili. Fare un disegno della situazione.

3.4. in base agli esempi precedenti proporre un metodo ricorsivo per dividere un m-parallelepipoide in $m!$ m-simplessi tra loro congruenti.

4. NIDI DI VESPE. Le vespe di una certa specie costruiscono un nido della forma

$$\{x \in \mathbb{R}^3 | \|x\| \leqslant 1\}$$

(una sfera unitaria) diviso in un certo numero di celle dai piani coordinati di $\mathbb{R}^3$.

4.1. Quante celle vi sono? Quante pareti? Quante pareti ha ogni cella? Quante interne e quante esterne?

4.2. Con quante altre celle comunica ogni cella? Ogni parete è in comune a quante celle?

4.3. Quanti colori bisogna usare per colorare le celle in modo che ogni cella abbia un colore diverso da tutte quelle adiacenti?

Ora una vespa progetta un iper-nido della forma seguente:

$$\{x \in \mathbb{R}^4 | \|x\| \leqslant 1 \text{ ed esiste un indice } i \text{ con } x_i = 0 \ \}$$

(intersezione della palla unitaria di $\mathbb{R}^4$ con gli iperpiani coordinati), e si chiede:

4.4. quanti nidi del tipo precedente vi sono nell'iper-nido?

4.5. quante celle vi sono? quante pareti? quante pareti ha ogni cella? Quante interne e quante esterne?

4.6. con quante altre celle comunica ogni cella? ogni parete è in comune a quante celle?

4.7. quanti colori bisogna usare per colorare le celle in modo che ogni cella abbia un colore diverso da tutte quelle adiacenti?

4.8. vero che ogni cella ha la sua uscita verso l'esterno?

Esaminare analogamente il caso:

$$\{x \in \mathbb{R}^5 | \|x\| \leqslant 1 \text{ ed esistono due indici } i \neq j \text{ con } x_i = x_j = 0 \ \} \ .$$

Provare a fare dei disegni dei progetti.