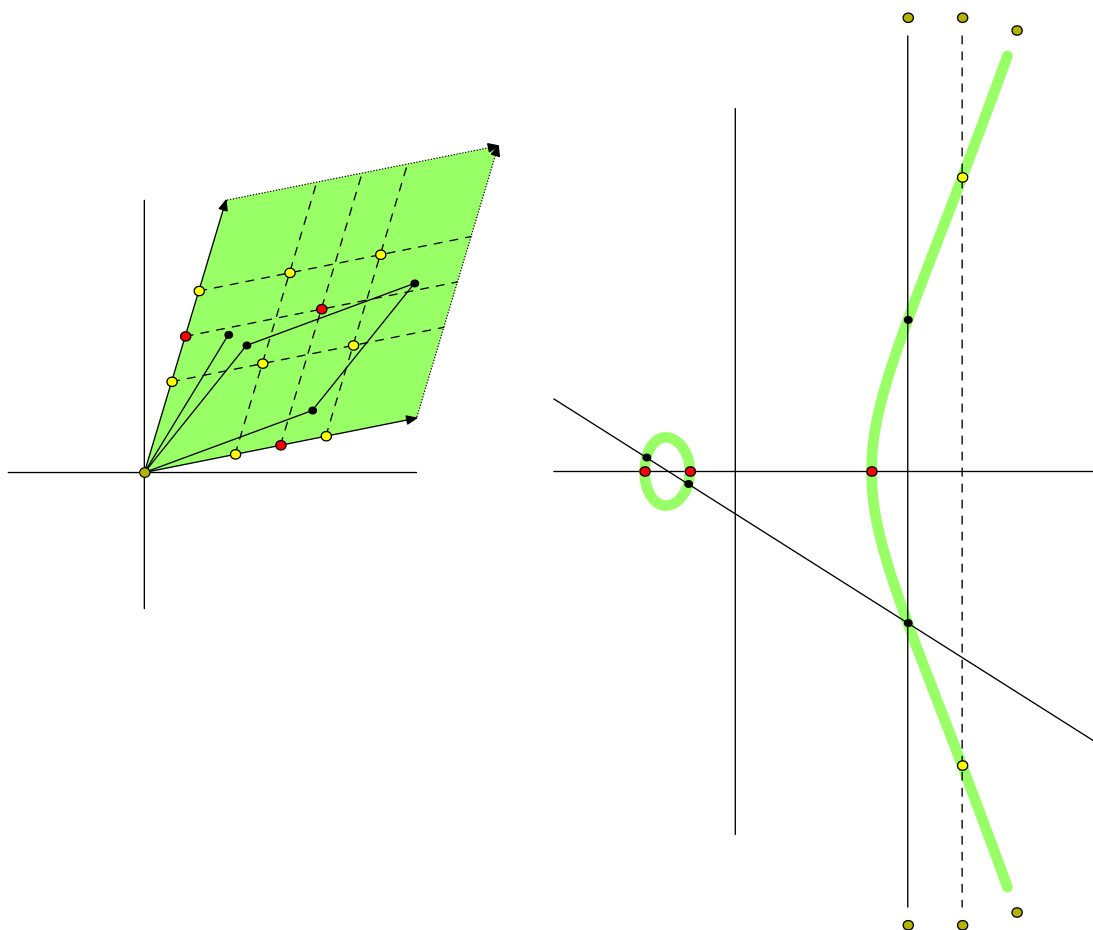




SdRc

Superficie di Riemann compatte

Avvertenza. Questo testo è stato distribuito nell'anno accademico 2015/16 per il corso di Superficie di Riemann (6 CFU, 48 ore) del Corso di Studi in Matematica dell'Università di Padova. Una versione pdf si può ottenere dalla mia pagina web: <http://www.math.unipd.it/~maurizio/>.

giugno 2016

Da dove viene e dove va questo testo. Essenzialmente non vi è nulla di originale, se non un lavoro di riordino di conoscenze classiche per le quali consultavo spesso i libri di A.Cassa, H.M.Farkas, O.Forster, Ph.A.Griffiths, F.Kirwan, R.Miranda, D.Mumford, R.Narasimhan, E.Reyssat, V.V.Shokurov, ... e anche altri che ora non ricordo. Naturalmente, sono miei tutti gli errori, e ringrazio fin d'ora chi volesse segnalarli...

Info T_EXniche. Questo testo è stato scritto in PlainT_EX, e le figure state prodotte usando **Meta-Post**. Siano ringraziati DEK e JDH. La figura iniziale vorrebbe visualizzare la corrispondenza tra tori e curve ellittiche; quella finale come passare da una configurazione ad un'altra di un bitoro.

Copyright. Tutti i diritti di questo testo sono riservati all'autore (incluse le eventuali edizioni precedenti). Non ne è consentito alcun uso a scopi commerciali. Sono consentite la riproduzione e la circolazione in formato cartaceo o su supporto elettronico portatile ad esclusivo uso scientifico, didattico o documentario, purché il documento non venga alterato in alcun modo, ed in particolare mantenga le corrette indicazioni di data e fonte originale e la presente nota di copyright.

giugno 2016



Indice

Capitolo O. Preliminari a Geometria Variabile	1
1. Oggetti Geometrici.	1
2. Funzioni e Mappe.	3
3. Gioco.	3
 Capitolo I. Superficie reali compatte.	 5
1. Superficie reali compatte: definizione, esempi.	5
2. Triangolazioni e Caratteristica di Eulero-Poincaré.	8
3. Genere Topologico e Classificazione.	10
4. Rivestimenti ramificati e Teorema di Riemann-Hurwitz.	12
5. Genere di Curve Algebriche Piane Complesse: formule di Plücker.	14
 Capitolo II. Superficie di Riemann.	 19
0. Richiami di Analisi Complessa.	19
1. Superficie di Riemann, Funzioni e Mappe.	21
2. Esempi: sfera di Riemann.	23
3. Esempi: tori complessi.	25
4. Esempi: curve modulari.	35
5. Esempi: superficie di germi di funzioni.	38
6. Esempi: curve algebriche complesse.	39
 Capitolo III. Teorema di normalizzazione (desingularizzazione).	 41
0. Strategie di desingularizzazione.	41
1. Struttura locale delle singolarità.	42
2. Teorema di desingularizzazione (via SdRc).	43
3. Applicazioni ed Esempi.	43
4. Aspetto topologico delle singolarità (nodi algebrici).	45
5. Teorema di desingularizzazione (via blow-up).	50
 Capitolo IV. Teorema di Riemann-Roch.	 57
0. Differenziali.	57
1. Divisori sulle Superficie di Riemann Compatte.	60
2. Spazi di Funzioni e Differenziali associati a Divisori (enunciato di Riemann-Roch).	62
3. Sistemi lineari e mappe proiettive associate a Divisori.	64
4. Sistemi molto ampi.	67
5. Sistemi canonici (e SdR iperellittiche).	68
6. Classificazione di SdRc per generi piccoli.	70
7. Equivalenza tra SdRc e curve algebriche complesse.	72
8. Teorema di Riemann-Roch (dimostrazione).	74
9. Divisori Speciali e Teorema di Clifford.	77
10. Punti di inflessione e di Weierstrass, Automorfismi.	80
11. Cenni sugli spazi di moduli	83
 Capitolo V. Varietà Jacobiane di Superficie di Riemann compatte.	 85
0. Omologia delle superficie.	85
1. Periodi e varietà Jacobiana di una Superficie di Riemann.	86
2. Mappa di Abel-Jacobi.	88

3. Teoremi di Abel e di Jacobi.	89
4. Divisori Theta e teoremi di Riemann e Torelli.	91
Appendice A. Temi d'esame SdR (Superficie di Riemann)	93
1. Problemi risolti (a.a. 2006/7)	93
2. Problemi (a.a. 2014/15)	106
3. Problemi (a.a. 2015/16)	110

Capitolo O

Preliminari a Geometria Variabile

In questo capitolo preliminare richiameremo un importante risultato di Analisi Matematica come motivazione per una strategia di definizione degli oggetti di interesse della Geometria in generale.

1. Oggetti Geometrici.

Ricordiamo l'importante risultato di Analisi Matematica:

1.1. TEOREMA (DEL DINI, O DELLA FUNZIONE IMPLICITA). *Il sottinsieme di $\mathbb{R}^2$ descritto da $f(x, y) = 0$, con f funzione differenziabile, si può scrivere localmente come grafico di una funzione nell'intorno di ogni suo punto in cui $\nabla f(x, y) \neq 0$. Precisamente: se $f(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \neq 0$, allora esistono intorno U di x_0 in X e V di y_0 in Y , ed esiste una funzione $\varphi : U \rightarrow V$ tali che $f(x, y) = 0$ se e solo se $y = \varphi(x)$ (per $x \in U$ e $y \in V$), cioè*

$$\{(x, \varphi(x)) : x \in U\} = \{(x, y) \in U \times V : f(x, y) = 0\}.$$

Inoltre tale φ è derivabile e risulta

$$\frac{d}{dx} \varphi(x_0) = - \frac{\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, \varphi(x_0))}{\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, \varphi(x_0))}$$

(come risulta “subito” differenziando totalmente $f(x, \varphi(x)) = 0$).

1.1.1. Il teorema si estende a funzioni di più variabili usando come ipotesi la massimalità del rango della matrice Jacobiana.

1.1.2. Il teorema si estende a funzioni di variabili complesse, usando ipotesi e conclusioni di differenziabilità in senso complesso.

1.1.3. Una delle osservazioni importanti da fare a proposito del risultato citato, è che un oggetto abbastanza complicato (quale l'insieme degli zeri di una funzione con qualche proprietà di differenziabilità) si comporta *localmente* come un oggetto decisamente più semplice (il grafico di una funzione differenziabile). Questo suggerisce una buona strategia per la definizione di oggetti geometrici usando come oggetti base certi tipi speciali e semplici di quegli stessi oggetti.

1.2. MODELLI LOCALI E OGGETTI GLOBALI. Chiamiamo “oggetti locali ammissibili” una certa classe di oggetti geometrici, e “mappe ammissibili” una certa classe di mappe tra oggetti locali ammissibili. Per noi vi saranno essenzialmente tre tipi di questi oggetti, che daranno luogo a tre tipi di geometrie:

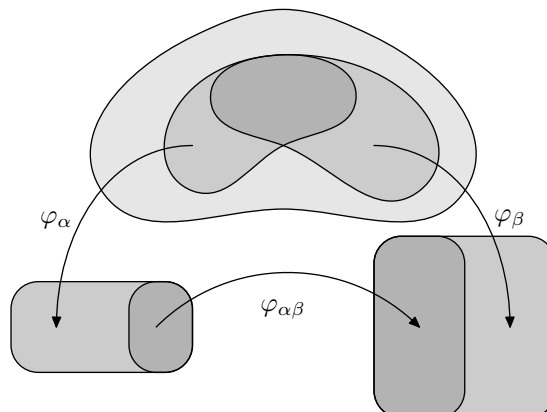
- (1) aperti di $\mathbb{R}^n$ e mappe differenziabili di classe $\mathcal{C}^m$ per $m \geq 0$ (geometria reale di classe $\mathcal{C}^m$);
- (2) aperti di $\mathbb{C}^n$ e mappe differenziabili in senso complesso (geometria analitica complessa o olomorfa);
- (3) aperti (di Zariski) di varietà algebriche in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ e mappe razionali tra esse (geometria algebrica complessa).

1.2.1. Una volta decisi gli oggetti locali ammissibili per una certa geometria, definiamo gli oggetti ammissibili per quella geometria nel modo seguente: *sono gli spazi topologici X (con eventualmente fissate condizioni) che ammettono un ricoprimento fatto di aperti U_α ciascuno dei quali omeomorfo (in quanto spazio topologico) a un oggetto locale ammissibile V_α tramite $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$, e tali inoltre che ogni qual volta due aperti del ricoprimento si intersecano, le mappe di transizione tra oggetti locali ammissibili che ne vengono indotte*

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

siano mappe ammissibili.

Ecco la nostra versione del classico disegno:



È chiaro che affinché una tale definizione sia ben posta è necessario che gli oggetti locali ammissibili e le mappe ammissibili abbiano certe proprietà di stabilità (per esempio: aperti di oggetti locali ammissibili devono essere ancora oggetti locali ammissibili; composizione di mappe ammissibili deve essere ammissibile, e simili ovvie proprietà).

1.2.2. CARTE E ATLANTI. Di solito, mutuando una terminologia geografica, le mappe φ_α si chiamano le carte di X , e la collezione delle carte di un ricoprimento aperto si chiama un atlante di X . Un atlante massimale per l'ordine naturale tra gli atlanti (restrizione delle carte ad aperti più piccoli) si chiama una struttura geometrica su X ; è chiaro che per dare una struttura geometrica è sufficiente dare un atlante, cioè le carte di un ricoprimento.

1.2.3. FUNZIONI DI TRANSIZIONE. Le mappe $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ sono dette mappe di transizione dell'atlante, e si possono usare per trasportare proprietà e definizioni dagli oggetti locali ammissibili agli oggetti ammissibili di quella geometria: ogni proprietà o definizione invariante per queste mappe ammette una estensione.

1.2.4. ATTENZIONE. Naturalmente ogni oggetto locale ammissibile è anche ammissibile (atlante con una unica carta...), ma le proprietà globali degli oggetti ammissibili possono essere molto diverse da quelle dei modelli locali; per esempio un oggetto può essere compatto come spazio topologico, anche se nessun modello locale lo è. Classificare gli oggetti che si ottengono usando questo tipo di definizioni è spesso difficile se non impossibile.

1.3. VEDIAMO ALCUNI CASI IMPORTANTI PER IL NOSTRO CORSO.

1.3.1. VARIETÀ REALI. Una varietà reale (di classe $\mathcal{C}^n$) è uno spazio topologico separato (o di Hausdorff: ogni due punti distinti hanno interni disgiunti) a base numerabile dotato di un atlante verso aperti di $\mathbb{R}^m$ con mappe di transizione differenziabili (di classe $\mathcal{C}^n$).

1.3.2. VARIETÀ ANALITICHE COMPLESSE. Una varietà complessa è uno spazio topologico separato (o di Hausdorff: ogni due punti distinti hanno interni disgiunti) a base numerabile dotato di un atlante verso aperti di $\mathbb{C}^m$ con mappe di transizione differenziabili (in senso complesso, cioè olomorfe; si ricordi che si tratta allora automaticamente di funzioni analitiche, cioè indefinitamente differenziabili e convergenti alla loro serie di Taylor).

1.3.3. VARIETÀ ALGEBRICHE. Una varietà algebrica su un corpo K è uno spazio topologico T_0 (o di Kolmogoroff: per ogni due punti distinti vi è un intorno dell'uno che non contiene l'altro), o T_1 (o di Fréchet: per ogni due punti distinti vi è un intorno di ciascuno che non contiene l'altro) a base numerabile dotato di un atlante verso aperti di varietà algebriche (zeri di polinomi in spazi affini) con mappe di transizione funzioni razionali. Si osservi che in questo caso i modelli ammissibili locali sono in corrispondenza con le algebre finitamente generate su $\mathbb{C}$, e le mappe ammissibili con le funzioni razionali tra tali algebre (nella direzione opposta): in questo caso il modello locale è quindi puramente algebrico.

1.3.4. Si osservi che una varietà complessa si può riguardare anche come varietà reale, e che una varietà algebrica su $\mathbb{R}$ (risp. su $\mathbb{C}$) si può riguardare come varietà reale (risp. complessa).

1.4. ESEMPLI.

1.4.1. SPAZI PROIETTIVI. Gli spazi proiettivi ammettono ricoprimenti aperti fatti con spazi affini e mappe di transizione razionali (esplicitare per bene, se non lo si è mai visto): quindi si tratta di varietà algebriche. Si osservi che gli spazi proiettivi sono compatti (in quanto spazi topologici), mentre i modelli locali (spazi affini) non lo sono.

1.4.2. CURVE ALGEBRICHE COMPLESSE LISCE. Le curve algebriche complesse non singolari ammettono un ricoprimento con carte su aperti del piano complesso, e mappe di transizione olomorfe (differenziabili in senso complesso); dunque si tratta di varietà complesse, in particolare anche reali. Si tratta di varietà compatte.

1.4.3. CURVE ALGEBRICHE. Lo stesso vale per curve algebriche complesse qualsiasi, una volta che ne siano tolti i punti singolari (e allora non sono più compatte).

2. Funzioni e Mappe.

2.1. MAPPE TRA OGGETTI GEOMETRICI. Una volta definiti degli oggetti geometrici tramite modelli locali ammissibili (e mappe di transizione ammissibili tra le carte), viene spontaneo definire le mappe ammissibili tra questo tipo di oggetti nel modo seguente: *una mappa continua $f : X \rightarrow Y$ è ammissibile se per un atlante $\{\varphi_\alpha\}$ di X e un atlante $\{\psi_\beta\}$ di Y si ha che tutte le mappe composte $\varphi_\alpha^{-1} \circ f \circ \psi_\beta$ opportunamente ristrette sono mappe ammissibili di modelli locali.*

Di nuovo, la classe di modelli locali ammissibili e delle mappe ammissibili deve essere tale che la definizione sia indipendente dall'atlante scelto, cioè che valga per ogni atlante una volta che vale per uno.

2.2. FUNZIONI. Nei casi che in effetti ci interesseranno durante il corso, vi sono tra i modelli locali dei casi speciali che di solito si dicono “di dimensione uno” ($\mathbb{R}$ per le geometrie reali, $\mathbb{C}$ per la geometria analitica complessa, la retta affine per la geometria algebrica), e le mappe tra un oggetto geometrico X e questo modello locale di dimensione uno si dicono *funzioni su X* , e assumono una rilevanza speciale per studiare gli oggetti stessi.

Per esempio, spesso le mappe $X \rightarrow Y$ tra oggetti geometrici si possono caratterizzare come quelle funzioni continue che per composizione mandano funzioni su Y in funzioni su X .

2.2.1. Vi possono essere più modelli importanti di dimensione uno: per esempio nel caso delle geometrie complesse analitica ed algebrica, anche la retta proiettiva complessa assumerà una importanza strategica.

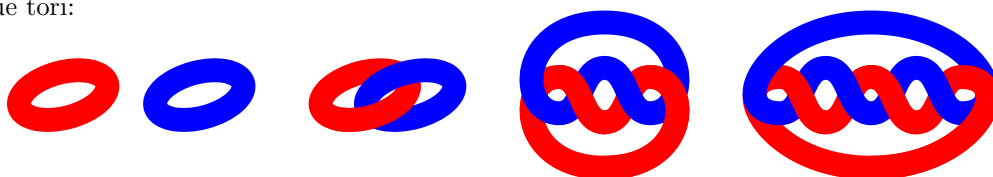
2.2.2. CENNO SUGLI SPAZI ANELLATI? In effetti, nella geometria algebrica moderna si preferisce dare una definizione che include primariamente sia lo spazio topologico che le “funzioni” in qualche senso definite sui suoi aperti, ricorrendo alla nozione di fascio (di anelli) su uno spazio topologico; noi non insisteremo su queste definizioni, che portano velocemente ad un eccesso di risultati formali troppo astratti per un corso elementare.

3. Gioco.

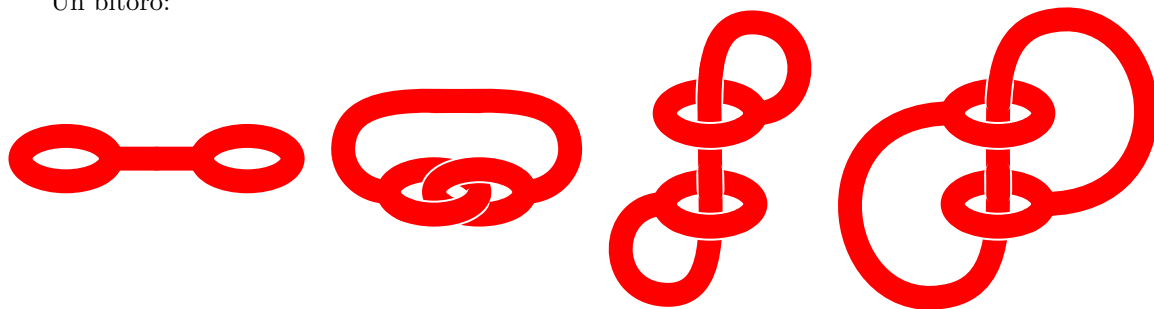
Due superficie reali X, Y immerse in $\mathbb{R}^n$ si dicono omotope, o topologicamente equivalenti, se esiste una applicazione continua $\varphi : [0, 1] \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi(0, \cdot)$ sia l'immersione di X in $\mathbb{R}^n$, $\varphi(1, \cdot)$ sia un omeomorfismo di X su Y , e per ogni t si abbia un omeomorfismo di X in $X_t = \text{im } \varphi(t, \cdot)$. Si tratta di avere un “disegno animato” che trasforma X in Y senza ricorrere a tagli, strappi, cuciture o altri accidenti discontinui.

Si considerino allora le seguenti superficie immerse in $\mathbb{R}^3$, e si dica quali sono equivalenti tra loro, e quali no, giustificando le risposte positive tramite qualche fotogramma del “disegno animato”. Come è possibile giustificare delle risposte negative?

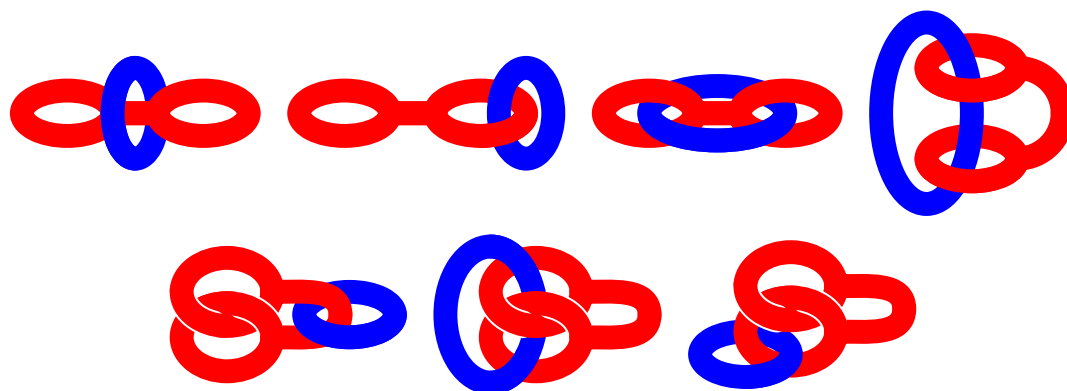
Due tori:



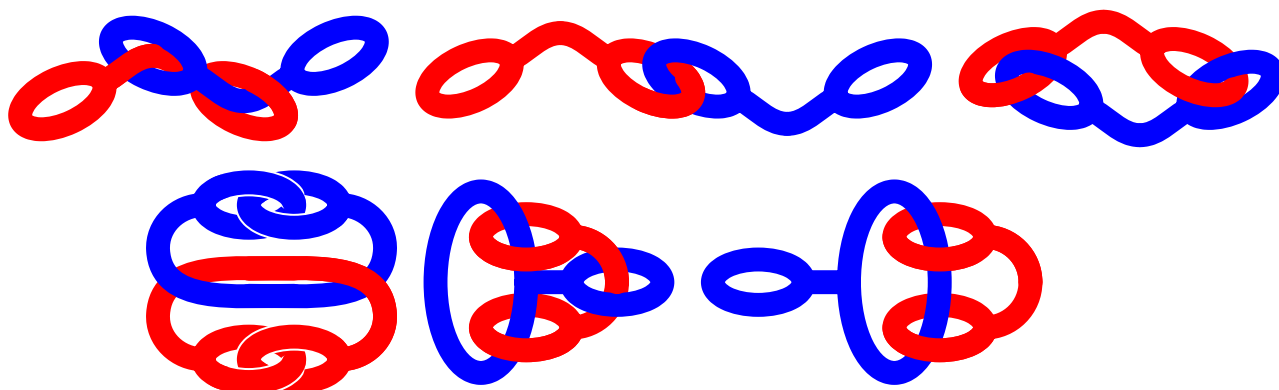
Un bitoro:



Un toro e un bitoro:



Immaginarsi tutte le configurazioni possibili di due bitori tipo quello rosso. Per esempio:



Si osservi invece che tutte le configurazioni precedenti di superficie possono essere “sciolte” in $\mathbb{R}^4$: in particolare il miglior strumento per un ladro di biciclette sembra essere una palla aperta di $\mathbb{R}^4$ (dove immergere le catene).

Capitolo I

Superficie reali compatte.

In questo capitolo presentiamo gli strumenti fondamentali per la classificazione delle superficie reali compatte e introdurremo la nozione di genere topologico, invariante fondamentale della classificazione. Il calcolo del genere è spesso difficile, e noi introdurremo il teorema di Riemann-Hurwitz quale principale strumento per questo, mostrandone l'applicazione al caso di curve algebriche piane complesse.

1. Superficie reali compatte: definizione, esempi.

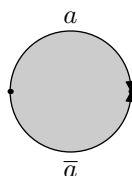
1.1. DEFINIZIONE (SUPERFICIE REALI). Seguendo la filosofia illustrata nel capitolo zero, una superficie reale S è uno spazio topologico separato e connesso localmente omeomorfo ad aperti di $\mathbb{R}^2$ (oppure a dischi aperti di $\mathbb{R}^2$) con mappe di transizione differenziabili. La superficie si dirà compatta se lo è in quanto spazio topologico. Una superficie si dirà orientabile se ammette un atlante tale che le mappe di transizione abbiano Jacobiane di determinante positivo in ogni punto; equivalentemente, se ogni cammino chiuso sulla superficie conserva l'orientamento.

1.1.1. Con cammino chiuso intendiamo una mappa φ dall'intervallo chiuso $[0, 1]$ in S tale che $\varphi(0) = \varphi(1)$, con orientamento intendiamo la scelta di un orientamento nello spazio tangente ad S nel punto iniziale (e finale).

1.1.2. NOTA SULLA CONNESSIONE: per comodità abbiamo richiesto che una superficie sia connessa; naturalmente tutto quello che vedremo si applicherebbe anche ad ogni componente connessa di una “superficie reale non connessa”.

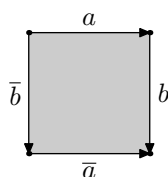
1.2. ESEMPLI. Vediamo subito alcuni esempi fondamentali che saranno i “pezzi base” della classificazione.

1.2.1. SFERA. La sfera $\mathbb{S}$, come ben noto, è una superficie reale compatta orientabile che si può presentare con un atlante di due carte (le proiezioni stereografiche dai due poli sul piano dell'equatore). Essa si può ottenere identificando in senso “discorde” i due lati di un poligono chiuso formato da due soli lati (un di-agono): si tratta di chiudere con un zip le due semicirconferenze di un cerchio del piano reale.



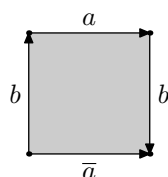
Rappresenteremo questa costruzione con il simbolo $a\bar{a}$ (girando intorno al bordo del poligono, si incontra uno dei due lati in un verso, l'altro nel verso opposto).

1.2.2. TORO. Il toro $\mathbb{T}$ è la superficie reale compatta orientabile che si ottiene identificando i lati di un quadrato secondo il simbolo $ab\bar{a}\bar{b}$;



identificando prima una coppia di lati si ottiene un cilindro $\mathcal{C}$, e successivamente si identificano i due bordi rimanenti. Un atlante reale per il toro si può ottenere usando tre carte, quali?

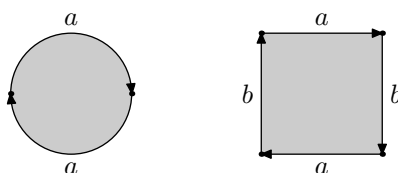
1.2.3. OTRE DI KLEIN. L'otre di Klein $\mathbb{K}$ è la superficie reale compatta non orientabile che si ottiene identificando i lati di un quadrato secondo il simbolo $ab\bar{a}b$;



come per il toro, identificando i due lati a si ottiene un cilindro, ma poi i due bordi rimanenti sono identificati con l'orientamento opposto che per il toro. Atlante? Si veda per divertimento: <http://www.kleinbottle.com/> ma si faccia attenzione in quanto il genere dichiarato è sbagliato...

È importante osservare che l'otre di Klein si può costruire prima identificando i due lati b , il che dà luogo ad una figura $\mathcal{M}$ chiamata nastro di Moebius, e poi identificando i due lati a che nel nastro si sono uniti a formare un circuito chiuso (una circonferenza). Questa costruzione rende chiaro che la superficie non è orientabile, poiché $\mathcal{M}$ contiene un percorso chiuso che inverte l'orientamento.

1.2.4. PIANO PROIETTIVO. Il piano proiettivo (reale) $\mathbb{P}$ è la superficie compatta non orientabile che si ottiene identificando i lati di un di-agono secondo il simbolo aa , oppure i lati di un quadrato secondo il simbolo $abab$;



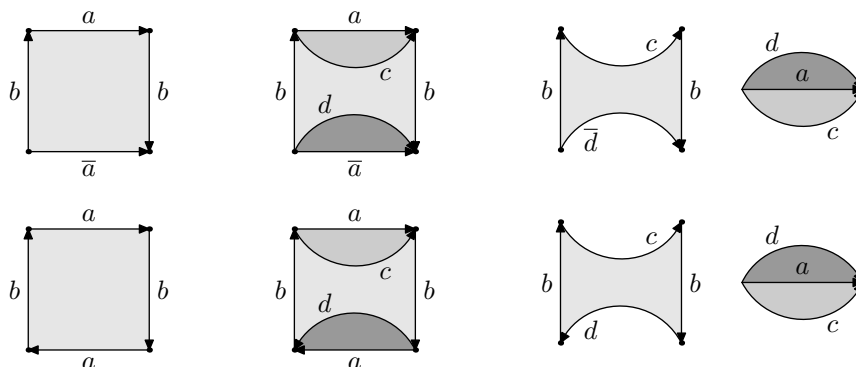
questa seconda costruzione rende chiaro che $\mathbb{P}$ contiene nastri di Moebius, e dunque non è orientabile. Si può descrivere con un ben noto atlante formato di tre piani affini (si tratta del “solito piano proiettivo reale” ottenuto dal disco modulo antipodia del bordo...).

1.3. CHIRURGIA SULLE SUPERFICIE. Gli esempi visti sono stati costruiti partendo da poligoni piani con un numero pari di lati, ed identificandone a coppie i lati; implicitamente abbiamo dato alla superficie risultante la topologia quoziente della relazione di equivalenza che consiste nella identificazione dei lati nel modo via via indicato. Si osservi per inciso che in tutti i casi i vertici del poligono vengono tutti identificati in un unico punto della superficie.

Parleremo di “chirurgia delle superficie” quando passeremo da una rappresentazione di una superficie come “poligono modulo identificazione di lati” ad un'altra tale rappresentazione senza alterarne la topologia e la struttura di superficie reale.

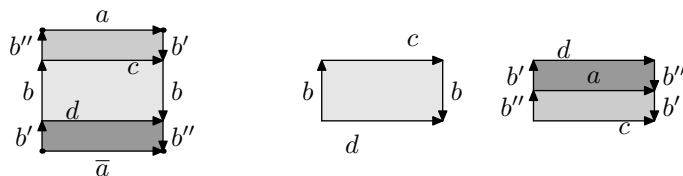
Per esempio possiamo osservare che:

1.3.1. Sia $\mathbb{P}$ che $\mathbb{K}$ si ottengono incollando (in modo diverso) un disco $\mathcal{D}$ ad un nastro di Moebius.



In particolare, togliendo un disco $\mathcal{D}$ a $\mathbb{P}$ (oppure a $\mathbb{K}$) si ottiene un nastro di Moebius.

1.3.2. L'otre $\mathbb{K}$ si ottiene come unione di due nastri di Möbius.



In particolare si osservi come vengono incollati i bordi dei due nastri per ottenere l'otre.

1.4. SOMMA CONNESSA. L'operazione chirurgica più importante per la classificazione delle superficie reali compatte è la somma connessa. Date due superficie S_1 ed S_2 , la somma connessa $S_1 \# S_2$ si ottiene tramite la costruzione seguente: si sceglie un disco D_i su S_i e un omeomorfismo $\varphi : B_1 \rightarrow B_2$ tra i bordi dei due dischi; allora $S_1 \# S_2$ è la superficie che si ottiene incollando secondo φ i due bordi B_i delle superficie bucate $S_i \setminus D_i$. Scrivere per bene il procedimento. Come si ottiene un atlante per $S_1 \# S_2$ a partire da atlanti di S_1 ed S_2 ?

Vediamo alcune proprietà evidenti (uguaglianza significa essere canonicamente isomorfi):

1.4.1. $S_1 \# S_2 = S_2 \# S_1$.

1.4.2. $(S_1 \# S_2) \# S_3 = S_1 \# (S_2 \# S_3)$.

1.4.3. $S \# \mathbb{S} = S$ ($\forall S$).

Dunque $\#$ è operazione commutativa ed associativa, con elemento neutro $\mathbb{S}$; ma non esiste in generale il simmetrico di un fissato elemento S .

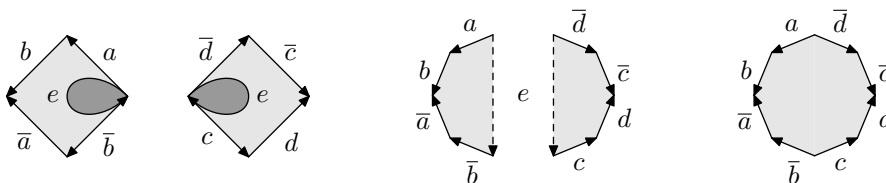
Vediamo alcuni esempi importanti per la classificazione:

1.4.4. $\mathbb{K} = \mathbb{P} \# \mathbb{P}$. L'abbiamo osservato prima: togliendo un disco al piano proiettivo si ottiene un nastro di Möbius, ed incollando due nastri per il bordo si ottiene un'otre di Klein.

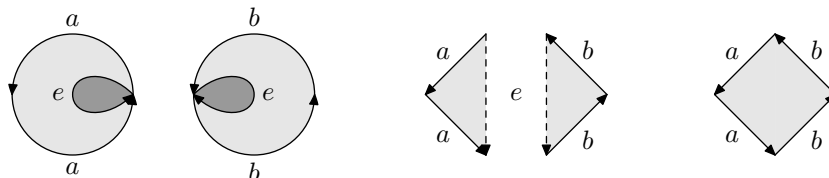
1.4.5. $\mathbb{K} \# \mathbb{P} = \mathbb{T} \# \mathbb{P}$. Questa formula è sorprendente, e si può verificare a partire dalla seguente: $\mathbb{K} \# \mathcal{M} = \mathbb{T} \# \mathcal{M}$, poiché $\mathbb{P}$ si ottiene con opportune identificazioni da $\mathcal{M}$. Il punto essenziale è che sia $\mathbb{K}$ sia $\mathbb{T}$ si ottengono da cilindri per identificazione dei bordi (in due modi diversi), e la somma amalgamata di qualunque superficie S con un cilindro è semplicemente la superficie stessa a cui sono stati rimossi due dischi; questi due dischi sono poi incollati per il bordo seguendo le identificazioni richieste.

1.4.6. $\mathbb{T} \# \mathbb{P} = \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P}$. È una conseguenza delle prime due osservazioni. Però non si può "cancellare" $\mathbb{P}$ e scrivere che $\mathbb{T}$ sia $\mathbb{P} \# \mathbb{P}$, altrimenti anche $\mathbb{T}$ e $\mathbb{K}$ sarebbero uguali!

1.4.7. SOMMA CONNESSA DI n TORI. Si può rappresentare come un poligono con $4n$ lati con i bordi identificati secondo la sequenza $a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 a_2 b_2 \bar{a}_2 \bar{b}_2 \cdots a_n b_n \bar{a}_n \bar{b}_n$. Si può vedere facilmente per induzione a partire dalla seguente costruzione, che serve sia per il caso base che per il passo induttivo:



1.4.8. SOMMA CONNESSA DI n PIANI PROIETTIVI. Si può rappresentare come un poligono con $2n$ lati con i bordi identificati secondo la sequenza $a_1 a_1 a_2 a_2 \cdots a_n a_n$. Si può vedere facilmente per induzione a partire dalla seguente costruzione, che serve sia per il caso base che per il passo induttivo:



2. Triangolazioni e Caratteristica di Eulero-Poincaré.

Il triangolo euclideo standard Δ è la regione del piano reale descritta dall'involuppo convesso dei punti O (origine), $O + e_1$, $O + e_2$ (versori degli assi), ovvero $\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq x, y, x+y \leq 1 \right\}$. Qualche volta conviene usare triangoli equilateri, nel qual caso si considerano come vertici le tre radici cubiche dell'unità nel piano di Gauss oppure i tre punti unità degli assi coordinati dello spazio usuale. Scrivere esplicitamente un omeomorfismo del triangolo euclideo nel triangolo equilatero standard.

Se S è una superficie, un triangolo di S è una mappa iniettiva e continua $\tau : \Delta \rightarrow S$ che sia un omeomorfismo sull'immagine. Chiamiamo lati e vertici dei triangoli di S le immagini dei lati e dei vertici dei corrispondenti triangoli euclidei.

2.1. DEFINIZIONE-TEOREMA (TRIANGOLAZIONI). Una triangolazione di una superficie reale S è una collezione di triangoli di S tale che:

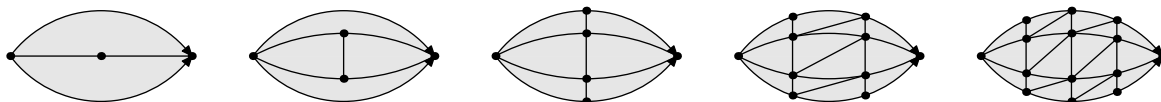
- (1) ogni punto P di S che non sia un vertice e non appartenga ad un lato, appartiene ad un unico triangolo che ne è un intorno;
- (2) ogni punto P di S che non sia un vertice ma appartenga ad un lato, appartiene ad esattamente due triangoli che si intersecano esattamente in quel lato, e la cui unione è un intorno di P ;
- (3) ogni punto P di S che sia un vertice appartiene ad un numero finito di triangoli che sono numerabili in modo tale che ciascuno abbia esattamente un lato in comune con il successivo nell'ordine ciclico, e l'unione di tutti è un intorno di P .

Ogni superficie reale ammette una triangolazione; una superficie è compatta se e solo se ammette una triangolazione finita (e allora tutte lo sono). Vale anche il viceversa in questo senso: uno spazio topologico separato e connesso è una superficie reale se e solo se ammette una triangolazione.

La dimostrazione di questo fatto non è banale. Ovviamente possiamo per definizione ricoprire la superficie S con un insieme (finito se compatta) di (immagini omeomorfe di) dischi chiusi; nel caso che ogni bordo di tali dischi sia diviso in un numero finito di segmenti dai bordi degli altri dischi, il risultato diventa facile: abbiamo a disposizione una “poligonazione” della superficie, e per ottenerne una triangolazione basta suddividere ogni poligono in triangoli. Tuttavia può presentarsi in caso in cui bordi di dischi si incontrano in infiniti punti, e per ricondursi al caso “finito” occorre un argomento delicato di deformazione dei bordi. $\square$

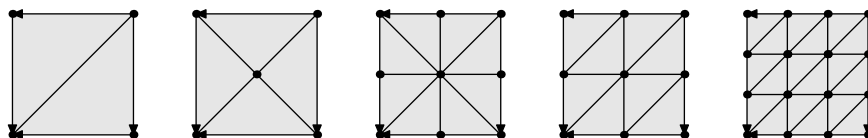
2.2. ESEMPI.

2.2.1. SFERA. Alcune possibili triangolazioni della sfera vista come di-agono, alcune delle quali non rispettano la nostra definizione:



(si provi a disegnare tali triangolazioni sulla superficie sferica; sientino vertici, lati e triangoli).

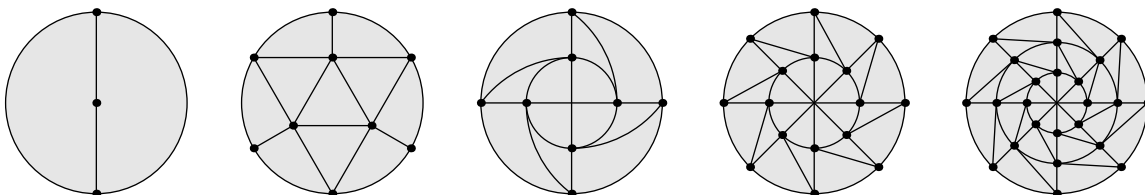
2.2.2. TORO. Alcune possibili triangolazioni del toro visto come quadrangolo, alcune delle quali non rispettano la nostra definizione:



(si provi a disegnare tali triangolazioni sulla superficie torica; sientino vertici, lati e triangoli).

2.2.3. OTRE DI KLEIN. Esercizio.

2.2.4. PIANO PROIETTIVO. Alcune possibili triangolazioni del piano proiettivo visto come di-agono, alcune delle quali non rispettano la nostra definizione:



(si contino vertici, lati e triangoli). Si osservi che togliendo il triangolo centrale alla prima triangolazione si ottiene un nastro di Möbius.

2.2.5. SOMME CONNESSE. Facile esercizio.

2.3. DEFINIZIONE-TEOREMA (CARATTERISTICA DI EULERO-POINCARÉ). *Data una superficie S , e una sua triangolazione $\mathcal{T}$, siano t il numero di triangoli, e il numero di lati, v il numero di vertici. La caratteristica di Eulero-Poincaré di S è per definizione l'intero $\chi(S) = t - e + v$. Tale intero non dipende dalla triangolazione scelta, ma solo dalla superficie S .*

Infatti, date due triangolazioni di una superficie, possiamo trovarne un'altra che è un raffinamento di entrambe, nel senso che ogni triangolo di ciascuna delle due è formato dalla unione di triangoli del raffinamento comune (questo fatto non è proprio banale, e richiede un argomento simile a quello del teorema precedente, per evitare che un lato sia diviso in infiniti segmenti). Di conseguenza, basta confrontare le caratteristiche di Eulero-Poincaré di una triangolazione e di un suo raffinamento. Ma ogni raffinamento si ottiene con un numero finito di operazioni simili ai seguenti tipi:

- (1) aggiungere un nuovo vertice interno ad un triangolo, e come lati i segmenti dal nuovo vertice ai tre vertici del triangolo: vi sono un vertice, tre lati e due triangoli più di prima;
- (2) aggiungere un nuovo vertice interno ad un lato, e due lati che congiungono il nuovo vertice con i vertici opposti a quel lato dei due triangoli che lo condividono: vi sono un vertice, tre lati (dove?) e due triangoli più di prima;
- (3) aggiungere un nuovo vertice interno ad un lato per i tre lati di un triangolo, il triangolo che li congiunge, e tre nuovi lati che congiungono i nuovi vertici ai vertici opposti dei tre triangoli adiacenti: vi sono tre vertici, nove lati e sei triangoli più di prima;

e in ogni caso si vede che la caratteristica di Eulero-Poincaré non è variata.

Una alternativa è di mostrare che si può passare da una triangolazione di S ad una qualsiasi altra tramite un numero finito di "poligonazioni", con operazioni che non modificano il valore della caratteristica di Eulero-Poincaré (estendendo la definizione nel modo ovvio alle poligonazioni di una superficie). $\square$

2.4. ESEMPLI.

2.4.1. SFERA. $\chi(\mathbb{S}) = 2$.

2.4.2. TORO. $\chi(\mathbb{T}) = 0$.

2.4.3. OTRE DI KLEIN. $\chi(\mathbb{K}) = 0$.

2.4.4. PIANO PROIETTIVO. $\chi(\mathbb{P}) = 1$.

2.4.5. SOMME CONNESSE. $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$. In particolare si ha:

$$\chi(\#_{i=1}^n \mathbb{T}) = 2 - 2n,$$

$$\chi(\#_{i=1}^n \mathbb{P}) = 2 - n,$$

$$\chi(\mathbb{P} \# (\#_{i=1}^n \mathbb{T})) = 1 - 2n,$$

$$\chi(\mathbb{K} \# (\#_{i=1}^n \mathbb{T})) = -2n.$$

2.5. PROBLEMA: POLIEDRI REGOLARI. Usando la nozione di triangolazione, e sapendo che la caratteristica di Eulero-Poincaré della sfera è 2, si mostri che vi sono solo cinque poliedri regolari (tetraedro: 4 triangoli, cubo: 6 quadrati, octaedro: 8 triangoli, dodecaedro 12 pentagoni, icosaedro: 20 triangoli) specificando quali poligoni regolari si usano, quanti, e quanti si incontrano in ogni vertice. Conviene per esempio chiamare n il numero di poligoni, L il numero di lati di ogni poligono, V il numero di poligoni che si incontrano in un vertice; si hanno allora n poligoni, $nL/2$ lati, nL/V vertici nella poligonazione, e la relazione di Eulero permette di limitare $L < 6$, poi $V (< 6, \leq 3, \leq 3$ rispettivamente per $L = 3, 4, 5$), e infine gli n possibili.

Si veda per esercizio: <http://darkwing.uoregon.edu/~koch/java/FourD.html>

3. Genere Topologico e Classificazione.

3.1. DEFINIZIONE (GENERE TOPOLOGICO). Data una superficie S , definiamo il genere topologico di S come l'intero dato da:

$$g(S) = \begin{cases} \frac{2 - \chi(S)}{2} & \text{se } S \text{ orientabile} \\ 2 - \chi(S) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque abbiamo che

$$\chi(S) = \begin{cases} 2 - 2g(S) & \text{se } S \text{ orientabile} \\ 2 - g(S) & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

3.2. ESEMPLI.

3.2.1. SFERA. $g(\mathbb{S}) = 0$.

3.2.2. TORO. $g(\mathbb{T}) = 1$.

3.2.3. OTRE DI KLEIN. $g(\mathbb{K}) = 2$.

3.2.4. PIANO PROIETTIVO. $g(\mathbb{P}) = 1$.

3.2.5. SOMME CONNESSE. $g(S_1 \# S_2) = g(S_1) + g(S_2)$ se le superficie sono entrambe orientabili o entrambe non orientabili; $g(S_1 \# S_2) = 2g(S_1) + g(S_2)$ se S_1 è orientabile e S_2 è non orientabile (nel qual caso $S_1 \# S_2$ non è orientabile). In particolare:

$$g(\#_{i=1}^n \mathbb{T}) = n,$$

$$g(\#_{i=1}^n \mathbb{P}) = n,$$

$$g(\mathbb{P} \# (\#_{i=1}^n \mathbb{T})) = 2n + 1,$$

$$g(\mathbb{K} \# (\#_{i=1}^n \mathbb{T})) = 2n + 2.$$

3.3. TEOREMA (DI CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE REALI COMPATTE). A meno di omeomorfismi, le superficie reali compatte si classificano nel modo seguente: sfera (rappresentazione poligonale $a\bar{a}$, genere 0), somma connessa di n tori (rappresentazioni poligonali $a_1 b_1 \bar{a}_1 \bar{b}_1 \cdots a_n b_n \bar{a}_n \bar{b}_n$, genere n), somma connessa di n piani proiettivi (rappresentazioni poligonali $a_1 a_1 \cdots a_n a_n$, genere n). Pensando in termini di genere: per $g = 0$ vi è solo la sfera, per ogni genere g positivo vi sono due superficie, una orientabile (somma connessa di g tori) e una non orientabile (somma connessa di g piani proiettivi reali).

Equivalentemente: ogni superficie reale compatta orientabile è una sfera oppure la somma connessa di n tori, e ogni superficie reale compatta non orientabile è la somma connessa di una superficie reale orientabile e di un piano proiettivo o di un'otre di Klein.

La dimostrazione di questo teorema è un esercizio di chirurgia delle superficie; bisogna mostrare che ogni superficie reale compatta si può rappresentare con uno dei poligoni (modulo identificazione dei lati) che abbiamo visto essere delle forme canoniche per le somme connesse di tori e piani proiettivi. Procediamo in due passi, uno geometrico e uno algebrico:

Nel primo, si sceglie una triangolazione della superficie, e se ne ottiene un modello formato da un poligono piano con un numero pari di lati i quali devono essere a due a due identificati per ottenere la superficie di partenza. Questo si ottiene scegliendo un ordine nell'insieme dei triangoli tale che l' i -esimo triangolo τ_i abbia un lato in comune, sia e_i , con almeno uno dei precedenti. Allora è chiaro che possiamo disporre sul piano i triangoli euclidei (equilateri) in modo da rispettare la comunanza dei lati corrispondenti, ed ottenere una figura poligonale piana come detto, e tale che la superficie di partenza si ottiene come quoziente topologico del poligono (la mappa dal poligono alla superficie è chiusa, poiché è mappa continua da un compatto ad uno spazio separato, quindi la superficie ha la topologia quoziente). Ora abbiamo un poligono con un numero pari di lati da identificare a due a due in uno dei due possibili modi; scegliendo un senso di percorrenza del bordo possiamo rappresentare la figura tramite una sequenza di lettere

$$abb\bar{c}\bar{a}\bar{d}\bar{c}d\bar{e}f\bar{e}\bar{f}g\bar{g}...$$

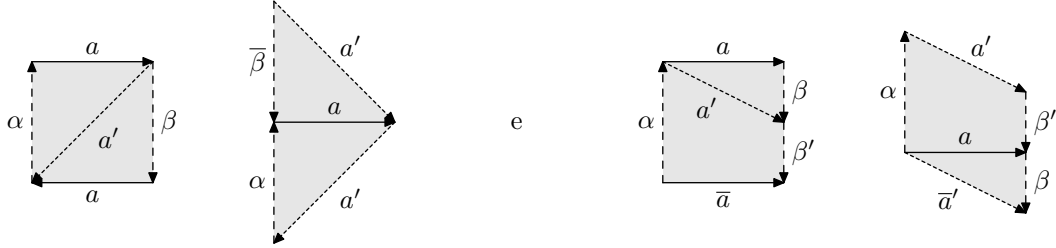
dove ogni lettera compare due volte e può comparire semplice o soprallineata a seconda che si presenti nel verso di percorrenza o meno. Dobbiamo quindi, tramite chirurgia, ridurre questo simbolo a uno di quelli standard.

Nel secondo, si riducono tutte le possibili parole a quelle standard. Diciamo rappresentazione poligonale una qualsiasi sequenza di lettere, ciascuna occorrente due volte semplice o soprallineata

(come sopra, rappresentano i lati da identificare per ottenere la superficie dal poligono), e introduciamo le seguenti regole di equivalenza (usiamo le lettere romane per i lati, lettere greche per sequenze di lati):

- (a) cancellazione: $a\bar{a} \sim \emptyset$ (rappresentazione poligonale della sfera);
- (b) ciclicità: $a\alpha \sim \alpha a$;
- (c) reversibilità: $\alpha \sim \bar{\alpha}$ (il segnato di una sequenza è la sequenza dei segnati nell'ordine inverso, e $\bar{\bar{a}} = a$);
- (d) coppie concordi: $\alpha\beta a \sim \alpha\bar{\beta}aa$ (o equivalentemente, usando la reversione, $\alpha\beta a \sim \alpha a\bar{\beta}$);
- (e) coppie discordi: $\alpha a\beta\beta'\bar{a} \sim \alpha a\beta'\beta\bar{a}$.

Le prime tre regole sono ovvie, le ultime due si giustificano con la chirurgia usuale:



Facciamo subito notare alcune conseguenze facili:

(d') la regola per le coppie concordi si generalizza facilmente in

$$\alpha a\beta\beta' a \sim \alpha\bar{\beta}' a\beta a \sim \alpha a\beta' a\bar{\beta} \sim \alpha\bar{\beta}' a\bar{\beta}$$

Osserviamo anche che le regole (d) ed (e), usando la ciclicità, si generalizzano lasciando invariata una eventuale coda γ , cioè: $\alpha a\beta a\gamma \sim \alpha\bar{\beta}aa\gamma$ e $\alpha a\beta\beta'\bar{a}\gamma \sim \alpha a\beta'\beta\bar{a}\gamma$.

- (f) Blocchi completi di lettere sono mobili (giustificazione euristica: si tratta di una superficie sommata-connessa, quindi si può spostare dove si vuole): basta dimostrarlo per piani proiettivi e tori. Per i piani proiettivi è facile: $\alpha a\alpha\beta \sim \alpha\beta a\alpha$ (passando attraverso $\alpha a\bar{\beta}a$), e si generalizza in $\alpha a\alpha\beta\gamma \sim \alpha\beta a\alpha\gamma$. Per i tori abbiamo $\alpha a\bar{b}\bar{a}\bar{b}\beta \sim \alpha\beta a\bar{b}\bar{a}\bar{b}$ perché

$$\alpha a\bar{b}\bar{a}\bar{b}\beta \sim \beta a\bar{b}\bar{a}\alpha\bar{b} \sim \beta a\bar{b}\alpha\bar{a}\bar{b} \sim \beta a\alpha\bar{b}\bar{a}\bar{b} \sim \alpha\alpha\beta\bar{b}\bar{a}\bar{b} \sim \alpha\beta\bar{b}\bar{a}\bar{b}a$$

e si generalizza in $\alpha a\bar{b}\bar{a}\bar{b}\beta\gamma \sim \alpha\beta a\bar{b}\bar{a}\bar{b}\gamma$.

Segnaliamo anche le facili osservazioni che:

- (1) $\mathbb{K} = \mathbb{P}\#\mathbb{P}$ perché $aabb \sim ab\bar{a}\bar{b}$;
- (2) $\mathbb{T}\#\mathbb{P} = \mathbb{P}\#\mathbb{P}\#\mathbb{P}$ perché $aabbcc \sim ab\bar{a}\bar{c}\bar{b}c \sim ab\bar{b}\bar{c}\bar{a}c$;
- (3) di conseguenza risulta $\mathbb{T}\#\mathbb{P} = \mathbb{K}\#\mathbb{P}$, ma non si può cancellare $\mathbb{P}$.

Vediamo allora la dimostrazione del teorema di classificazione:

- (1) possiamo prima di tutto associare e scorporare tutte le coppie di lettere concordi che compaiono: si tratta di una somma connessa di piani proiettivi:

$$\alpha a\beta a\gamma \sim \alpha\bar{\beta}aa\gamma \sim \alpha\bar{\beta}\gamma aa$$

e restano allora solo coppie discordi;

- (2) se una coppia discorde è separata da un'altra coppia discorde, possiamo associarle in un toro e scorporarlo:

$$\alpha a\beta b\gamma\bar{a}\bar{b}\bar{c} \sim \alpha a\beta\gamma\bar{b}\bar{a}\bar{c} \sim ab\bar{a}\bar{b}\bar{c}\alpha\delta\gamma\beta$$

e si continua con $\varepsilon\alpha\delta\gamma\beta$ fino a scorporare tutti i tori possibili;

- (3) restano allora solo coppie discordi, non divise da altre coppie discordi: facendo induzione sulla distanza tra le due occorrenze di una lettera si arriva ai casi $a\bar{a}$ che si cancellano. $\square$

3.4. TEOREMA (DI CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICIE REALI COMPATTE, SECONDA FORMA).
Due superficie reali compatte sono omeomorfe se e solo se sono entrambe orientabili o entrambe non orientabili, e hanno lo stesso genere oppure hanno la stessa caratteristica di Eulero-Poincaré.

3.4.1. RIASSUNTO:

car\g	0	1	2	3	...	n	...
or	$\mathbb{S}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}\#^2$	$\mathbb{T}\#^3$	...	$\mathbb{T}\#^n$	...
nor		$\mathbb{P}$	$\mathbb{P}\#^2$	$\mathbb{P}\#^3$	...	$\mathbb{P}\#^n$	...

3.5. SIGNIFICATI TOPOLOGICI. In particolare, ogni superficie reale compatta orientabile di genere n è omeomorfa ad una sfera con n manici, oppure a un toro con n buchi (primo significato topologico del genere). E ogni superficie reale compatta non orientabile di genere n è omeomorfa alla somma connessa di un toro con n buchi con un piano proiettivo oppure con un'otre di Klein?

Il genere n di una superficie si può interpretare topologicamente in questi termini:

3.5.1. n è il massimo numero di cammini chiusi disgiunti che si possono togliere da una superficie, facendo in modo che rimanga ancora uno spazio connesso.

3.5.2. $2n$ è il massimo numero di cammini chiusi senza componenti comuni che si possono togliere da una superficie, facendo in modo che rimanga ancora uno spazio connesso.

3.6. PROBLEMA. Studiare la superficie che si ottengono dai seguenti simboli per poligoni:

3.6.1. $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \overline{a_1} \overline{a_2} \cdots \overline{a_{n-1}} \overline{a_n}$ (è una somma connessa di n piani proiettivi);

3.6.2. $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \overline{a_1} \overline{a_2} \cdots \overline{a_{n-1}} \overline{a_n}$ (è una somma connessa di $[n/2]$ tori).

3.7. PROBLEMA. Nel caso di superficie compatte non orientabili, che cosa si può dire del significato topologico del genere? In particolare, se il genere è n , quanti “buchi” ha la superficie?

3.8. PROBLEMA. Ogni parola con tutte le lettere doppie dà una superficie reale compatta?

4. Rivestimenti ramificati e Teorema di Riemann-Hurwitz.

4.1. DEFINIZIONE (RIVESTIMENTO RAMIFICATO). Una mappa continua $f : X \rightarrow Y$ di superficie reali è detta un rivestimento (con n fogli) ramificato (lungo E sottinsieme finito di X) se valgono le seguenti condizioni:

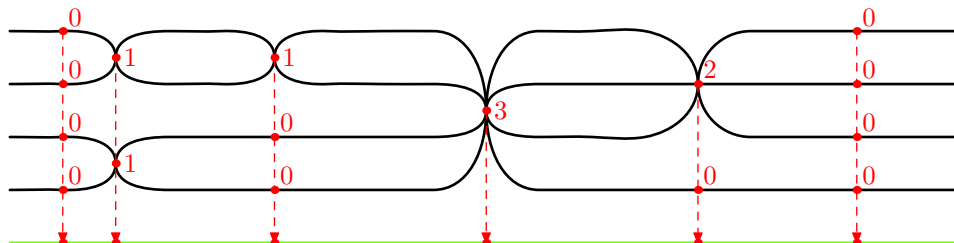
- (1) f è suriettiva, chiusa e a fibre finite;
- (2) f ristretta a $X \setminus f^{-1}(f(E)) \rightarrow Y \setminus f(E)$ è rivestimento (con n fogli), cioè per ogni $y \in Y \setminus f(E)$ esiste un intorno aperto V tale che $f^{-1}V$ è unione disgiunta di n aperti omeomorfi a V tramite f (“una pila di dischi sopra V ”).

4.1.1. Si noti dalla definizione che per ogni $y \in Y$ si ha che la fibra $f^{-1}y$ è finita, con esattamente n elementi se $y \notin f(E)$. Denotiamo con $e(f) = n$ il numero di fogli del rivestimento $X \setminus f^{-1}(f(E)) \rightarrow Y \setminus f(E)$.

4.1.2. RAMIFICAZIONE IN UN PUNTO. Per ogni $x \in X$ e per ogni intorno U sufficientemente piccolo di x abbiamo che la restrizione $f|_U : U \rightarrow f(U)$ è un rivestimento fuori di x ; definiamo $e_{x,U}(f)$ il numero di fogli di $f|_U$. Tale funzione a valori interi è decrescente sul filtro degli intorni di x , e quindi diventa stabile per U sufficientemente piccolo: sia $e_x(f)$ tale valore. Diciamo che il punto x è semplice se $e_x(f) = 1$, di ramificazione altrimenti. Definiamo la ramificazione di f in x come $\text{ram}_x(f) = e_x(f) - 1$ (dunque nulla sse il punto è semplice).

4.1.3. RAMIFICAZIONE DI f . La ramificazione (totale) di f è definita dalla somma $\text{ram}(f) = \sum_{x \in X} \text{ram}_x(f)$ (si noti che solo $x \in E$, che possiamo supporre uguale a $f^{-1}(f(E))$, possono dare contributo positivo).

4.1.4. PUNTI, VALORI E LUOGHI DI RAMIFICAZIONE. Per ogni $y \in Y$ abbiamo $f^{-1}y = \{x_1, \dots, x_r\}$ ove $\sum_i e_{x_i}(f) = e(f)$ e poniamo $r = e(f) - \sum_i \text{ram}_{x_i}(f)$.



(il disegno suggerisce un rivestimento ramificato con quattro fogli, specificando la ramificazione in alcuni punti.)

Si dicono punti di ramificazione (*ramification points*) i punti x di X con $\text{ram}_x(f) > 1$, valori di ramificazione (*branch points*) i punti y di Y nella cui fibra c'è almeno un punto di ramificazione (si

tratta dei punti che hanno meno di $e(f)$ antimmagini distinte per f); l'insieme dei punti di ramificazione si dice luogo di ramificazione (*ramification locus*), l'insieme dei valori di ramificazione si dice anche luogo di ramificazione (*branch locus*).

4.1.5. ESEMPI FONDAMENTALI. Si considerino le mappe $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ date da $f_n(z) = z^n$ ristrette al disco unitario chiuso. L'unico punto di ramificazione è l'origine, in cui tutti gli n fogli si incrociano. Cosa succede se consideriamo $f_\infty : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ data da $f_\infty(z) = e^z$?

4.2. TEOREMA (RIEMANN-HURWITZ). Se $f : X \rightarrow Y$ è un rivestimento ramificato di superficie reali compatte orientabili, allora vale la seguente relazione tra le caratteristiche di Eulero-Poincaré:

$$\chi(X) = e(f)\chi(Y) - \text{ram}(f)$$

e dunque tra i generi:

$$g(X) = e(f)(g(Y) - 1) + \frac{\text{ram}(f)}{2} + 1$$

(in particolare, la ramificazione è pari).

Infatti, possiamo trovare una triangolazione di Y e una corrispondente triangolazione di X tali che ogni punto di ramificazione in Y sia vertice di esattamente $e(f)$ triangoli tali che le loro antimmagini siano triangoli disgiunti in X eventualmente con un vertice comune. Allora abbiamo $t_X = e(f)t_Y$ per il numero di triangoli, $e_X = e(f)e_Y$ per il numero di lati, e $v_X = e(f)v_Y - \sum_x (e_x(f) - 1)$ per il numero di vertici, da cui segue la formula per la caratteristica di Eulero-Poincaré di X . La formula per il genere ne è una conseguenza immediata. $\square$

4.2.1. Poiché $e(f) \geq 1$ e $\text{ram}(f) \geq 0$, abbiamo che $g(X) \geq g(Y)$:

$$g(X) = e(f)(g(Y) - 1) + \frac{\text{ram}(f)}{2} + 1 \geq (g(Y) - 1) + 1 = g(Y)$$

e dunque non possono esistere rivestimenti ramificati da superficie di genere minore a superficie di genere maggiore. In particolare non esistono rivestimenti ramificati dalla sfera al toro.

4.2.2. Nel caso di avere $g(X) = g(Y)$ abbiamo le seguenti situazioni:

$$g(X) = g(Y) = \begin{cases} 0 & \text{allora } \text{ram}(f) = 2(e(f) - 1) \text{ (ramificazione tra sfere)} \\ 1 & \text{allora } \text{ram}(f) = 0 \text{ (tra tori non c'è ramificazione)} \\ > 1 & \text{allora } e(f) = 1, \text{ram}(f) = 0 \text{ e } f \text{ è un isomorfismo} \end{cases}$$

(i primi due casi sono facili, per il terzo si consideri l'espressione con le caratteristiche di Eulero-Poincaré: $e(f) = \frac{\chi(X) + \text{ram}(f)}{\chi(Y)} = 1 + \frac{\text{ram}(f)}{\chi(Y)} \leq 1$, visto che $\chi(Y) < 0$).

4.2.3. Nel caso di avere $g(X) > g(Y)$ abbiamo le seguenti situazioni:

$$g(Y) = \begin{cases} 0 & \text{allora } \text{ram}(f) = 2(g(X) + e(f) - 1) \geq 2(g(X) + 1) \\ 1 & \text{allora } \text{ram}(f) = 2(g(X) - 1) \\ > 1 & \text{allora } \text{ram}(f) = 2(g(X) - e(f)g(Y) + e(f) - 1) \leq 2(g(X) - 2g(Y) + 1) \end{cases}$$

(per il primo e l'ultimo si ricordi che $e(f) \geq 2$).

4.2.4. Notiamo esplicitamente che nel caso $g(Y) = 0$ (rivestimenti della sfera) la formula diviene particolarmente facile e utile:

$$g(X) = 1 - e(f) + \frac{\text{ram}(f)}{2}$$

(useremo questa formula nel prossimo paragrafo).

5. Genere di Curve Algebriche Piane Complesse: formule di Plücker.

5.1. Vogliamo applicare la formula di Riemann-Hurwitz per il calcolo del genere di curve proiettive piane complesse. Se la curva non è singolare, essa è una superficie reale in base al teorema del Dini, che ne fornisce delle carte locali. Nel caso invece che la curva sia singolare, anticipiamo che come genere della curva intenderemo il genere della sua normalizzazione in quanto Superficie di Riemann. Questa si ottiene sostituendo opportuni intornoi dei punti singolari con opportune parametrizzazioni dei rami di quei punti: ai fini attuali possiamo sostituire la curva $\mathcal{C}$ con l'insieme dei suoi posti (invece che dei suoi punti, si cambia qualcosa solo per i punti singolari).

5.2. L'argomento chiave su cui si basano le nostre applicazioni alle curve algebriche è il seguente. Sia $\mathcal{C}$ la curva proiettiva piana di equazione $f(X_0, X_1, X_2) = 0$ di grado d . Eventualmente cambiando il riferimento possiamo supporre che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \mathcal{C}$ e che la retta impropria $X_0 = 0$ non sia tangente a $\mathcal{C}$. Sia $e = \deg_{X_2} f$ e consideriamo la mappa $\pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ che manda (X_0, X_1, X_2) in (X_0, X_1) (nella parte affine manda (X, Y) in X , una "proiezione"). Allora i punti di ramificazione di π sono tutti e soli quelli con tangente "verticale", cioè i punti della curva $\mathcal{C}$ che appartengono anche alla polare $\mathcal{C}'$ di $\mathcal{C}$ rispetto a $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (ma non alla retta impropria). Si tratta dei punti affini che soddisfano alle equazioni $f = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial X_2} = 0$.

Possiamo allora usare la formula di Riemann-Hurwitz per π e scrivere che $g(\mathcal{C}) = 1 - e + \text{ram}(\pi)/2$, osservando che $e_P(\pi) = \text{ord}_Y f(x, Y)$ e $\text{ram}_P(\pi) = \text{ord}_Y \frac{\partial f}{\partial Y}(x, Y)$ se $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

5.2.1. In qualche caso si possono fare i conti anche violando le condizioni richieste.

5.3. CASO DI CURVE NON SINGOLARI. Se $\mathcal{C}$ è non singolare, e il suo grado è d , possiamo supporre $d = \deg_{X_2} f$, e basta calcolare i punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con la polare $\mathcal{C}' = \mathcal{P}_{e_2}(\mathcal{C})$, che sono esattamente $d(d-1)$ per il teorema di Bézout (più precisamente, per punti lisci P abbiamo $\text{ram}_P(\pi) = m_P(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$). Dunque risulta:

$$g(\mathcal{C}) = 1 - d + \frac{d(d-1)}{2} = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

(formula genere-grado per curve proiettive piane lisce). In particolare abbiamo la seguente tabella grado-genere:

grado	1	2	3	4	5	6	7	8	...
genere	0	0	1	3	6	10	15	21	...

da cui si nota che rette e coniche sono entrambe di genere zero (curve razionali), e che non esistono curve piane lisce di generi 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, ... Vedremo comunque in futuro che esistono curve algebriche proiettive lisce immerse in qualche $\mathbb{P}^n$ (anche con $n = 3$) di ogni genere.

5.4. CASO DI CURVE IPERELLITTICHE. Se consideriamo le curve di equazione $Y^2 = \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i)$ ($\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$) sappiamo che l'unico punto singolare è il punto improprio dell'asse Y , e con tangente esattamente la retta impropria. Tuttavia, la proiezione sull'asse delle X è chiaramente un rivestimento ramificato con due fogli, sono di ramificazione (uno) tutti i punti della curva sull'asse delle X , e l'unica incertezza riguarda il comportamento del punto improprio, che potrebbe portare ramificazione 1 oppure 0. D'altra parte, poiché la ramificazione totale dev'essere pari, risulta necessariamente questo: se $m = 2n$ è pari, allora il punto improprio non ramifica, se $m = 2n+1$ è dispari, allora il punto improprio ha ramificazione 1. Quindi abbiamo

$$g(\mathcal{C}) = \begin{cases} 1 - 2 + 2n/2 = n - 1 & \text{se } m = 2n \\ 1 - 2 + (2n+2)/2 = n & \text{se } m = 2n+1. \end{cases}$$

Otteniamo quindi la seguente tabellina che distingue di casi pari e dispari delle iperellittiche:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	...
genere $m = 2n$	0	1	2	3	4	5	6	7	...
genere $m = 2n+1$	1	2	3	4	5	6	7	8	...

da cui si osserva che ogni genere può essere realizzato da curve proiettive piane (iperellittiche), anche se si tratta quasi sempre di curve singolari. Si noti anche che curve ellittiche (iperellittiche di grado 3, non singolari) e iperellittiche di grado 4 sono ambedue di genere 1:

grado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
genere	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	...

In alternativa, o per conferma, si poteva ricordare che il punto singolare delle curve iperellittiche presenta due posti nel caso di grado pari (quindi non ramificato), e un solo posto nel caso di grado dispari (quindi un solo punto, ramificato).

5.5. CASO DI CURVE SINGOLARI. Per trattare in generale il caso di curve singolari, bisogna nel ragionamento generale prima esposto tener conto di quanto i punti singolari contribuiscono alla intersezione della curva con la polare descritta, e di quanto effettivamente essi contribuiscono alla ramificazione totale. Siccome ogni punto è sostituito dai propri posti opportunamente parametrizzati, è importante capire la ramificazione in tali posti.

Conviene perciò che il sistema di riferimento sia tale che nessuna tangente nei punti singolari sia una retta “verticale”. Per ogni tale punto P possiamo distinguere i rami $\mathfrak{P}_i$; allora è chiaro che ciascuno contribuisce con $m_{\mathfrak{P}_i}(\mathcal{C}')$ al calcolo di intersezione di $\mathcal{C}$ con $\mathcal{C}'$, mentre dal procedimento di normalizzazione sarà chiaro che contribuisce con $m_{\mathfrak{P}_i} - 1$ alla ramificazione totale (una parametrizzazione del posto sarà del tipo $(\frac{z}{z^m})$ e la mappa localmente si comporta come $z \mapsto z^m$). Questo porta alle formule di Plücker generalizzate per il genere:

$$g(\mathcal{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{\sum_{\mathfrak{P} \in \mathcal{C}} (m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{C}') - m_{\mathfrak{P}} + 1)}{2}$$

ove la somma è estesa a tutti i posti sui punti singolari di $\mathcal{C}$. Questa formula si può usare con una polare generica $\mathcal{C}'$ e anche usando polari diverse da posto a posto, purché per ogni posto si usi una polare generica per quel posto, cioè tale che $m_{\mathfrak{P}}(\mathcal{C}')$ sia minimo tra le polari.

In particolare abbiamo i seguenti casi speciali:

5.5.1. NODI. Un nodo ha due posti lineari, ciascuno dei quali ha molteplicità di intersezione 1 con la polare, e dà contributo nullo alla ramificazione; quindi ogni nodo contribuisce con $-(1+1)/2 = -1$ alla formula generalizzata.

5.5.2. CUSPIDI. Una cuspidi ordinaria ha un solo posto di molteplicità 2, ha molteplicità di intersezione 3 con la polare, e dà contributo 1 alla ramificazione; quindi ogni nodo contribuisce con $-(3-1)/2 = -1$ alla formula generalizzata.

5.5.3. CURVE DI PLÜCKER. Quindi per curve di Plücker, cioè curve che hanno solo nodi e cuspidi ordinarie come singolarità, abbiamo che

$$g(\mathcal{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \tau - \kappa,$$

ove τ è il numero dei nodi, e κ quello delle cuspidi. In particolare, coincide con la deficienza della curva $\mathcal{C}$.

5.5.4. PUNTI ORDINARI. Un punto ordinario m -uplo ha m posti lineari, ciascuno dei quali ha molteplicità di intersezione $m-1$ con la polare, e dà contributo nullo alla ramificazione; quindi ogni punto ordinario contribuisce con $-m(m-1)/2$ alla formula generalizzata.

5.5.5. SUPERCUSPIDI ORDINARIE. Una supercuspidi ordinaria di molteplicità r (come punto singolare) ha un solo posto di molteplicità r , ha molteplicità di intersezione $r^2 - 1$ con la polare, e dà contributo $r - 1$ alla ramificazione; quindi ogni supercuspidi ordinaria contribuisce con $-(r^2 - 1 - r + 1)/2 = -r(r-1)/2$ alla formula generalizzata.

5.5.6. In particolare, per curve che abbiano solo singolarità ordinarie o supercuspidi ordinarie abbiamo una formula per il genere data da

$$g(\mathcal{C}) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - \frac{\sum_P m_P(m_P - 1)}{2},$$

ove la somma è estesa ai punti singolari e m_P è la molteplicità dei punti.

5.5.7. PROBLEMA. Determinare il contributo alla formula generalizzata di singolarità di molteplicità due, con unica tangente che interseca la curva con molteplicità $p \geq 3$ (il caso $p = 3$ è quello delle cuspidi ordinarie); conviene distinguere i casi pari e dispari di p .

Altro caso interessante è quello di punti di molteplicità m , con una unica tangente che interseca la curva con molteplicità $p \geq m + 1$ (il caso $p = m + 1$ è quello delle supercuspidi ordinarie).

5.5.8. PROBLEMA. Che cosa succede se qualche posto $\mathfrak{P}$ (su punti singolari) della curva ha come tangente la direzione di proiezione della mappa che stiamo usando? Si mostri che il contributo alla ramificazione diventa $m_{\mathfrak{P}} + c_{\mathfrak{P}} - 1$.

5.5.9. PROBLEMA. Che cosa succede se si decide di proiettare da un punto $P \in \mathcal{C}$ verso una retta r (ovviamente non contenente P)? È facile estendere per continuità la proiezione π definita da $\mathcal{C} \setminus P \rightarrow r$ ad una mappa $\pi : \mathcal{C} \rightarrow r$ (mandando ogni posto $\mathfrak{P}$ di centro P nell'intersezione con r della sua tangente), e si vede trattarsi di un rivestimento con $d(\mathcal{C}) - m_P(\mathcal{C})$ fogli. Poi si vede che $m_{\mathfrak{P}}(\pi) = m_{\mathfrak{P}}(t_{\mathfrak{P}}) - m_{\mathfrak{P}} = c_{\mathfrak{P}}$, da cui si ricava $\text{ram}_{\mathfrak{P}}(\pi) = c_{\mathfrak{P}} - 1$.

5.6. ALTRI ESEMPLI.

5.6.1. Le curve di equazioni $Y^3 = \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i)$ con $m \geq 4$ (e $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$) hanno genere dato da

$$g(\mathcal{C}) = \begin{cases} m-2 & \text{se } d \equiv 0(3) \\ m-1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque otteniamo questa tabellina grado-genere:

grado	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
genere	3	4	4	6	7	7	9	10	10	...

5.6.2. Le curve di equazioni $Y^4 = \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i)$ con $m \geq 5$ (e $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$) hanno genere dato da

$$g(\mathcal{C}) = \begin{cases} 3m/2 - 3 & \text{se } d \equiv 0(4) \\ 3m/2 - 2 & \text{se } d \equiv 2(4) \\ 3(m+1)/2 - 3 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque otteniamo questa tabellina grado-genere:

grado	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
genere	6	7	9	9	12	13	15	15	18	19	21	21	...

5.6.3. Le curve di equazioni $Y^5 = \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i)$ con $m \geq 6$ (e $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$) hanno genere dato da

$$g(\mathcal{C}) = \begin{cases} 2m-4 & \text{se } d \equiv 0(5) \\ 2m-2 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque otteniamo questa tabellina grado-genere:

grado	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	...
genere	10	12	14	16	16	20	22	24	26	26	30	...

5.6.4. Per esercizio, esplorare il caso di curve di equazioni $Y^n = \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i)$ con $m \geq n+1$ (e $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$).

5.7. PROBLEMI. Determinare, sia tramite analisi dei posti e formule di Plücker, sia tramite opportune mappe di rivestimento ramificato della retta proiettiva (per esempio le proiezioni sugli assi coordinati), il genere delle seguenti curve piane:

- (5.7.1) $X_1^n + X_2^n = X_0^n$ (Fermat)
- (5.7.2) $(X+Y)(X-Y) = X^4 + Y^4$
- (5.7.3) $Y^2 = X^3 + Y^4$
- (5.7.4) $Y^2 = X^4 + Y^3$
- (5.7.5) $Y^2 = X^4 + XY^3$
- (5.7.6) $Y^2 = X^4 + Y^4$
- (5.7.7) $(Y - X^2)^2 = Y^3$
- (5.7.8) $(Y - X^2)^2 = XY^3$
- (5.7.9) $XY(X - Y) = X^4 + Y^4$
- (5.7.10) $Y^2X = X^4 + Y^4$
- (5.7.11) $Y^3 = X^4$
- (5.7.12) $(X-1)(X+Y)(X-Y) = X^4 + Y^4$
- (5.7.13) $(X+Y)(X-Y) = X^4$
- (5.7.14) $(X+Y)(X-Y) = X^5 + Y^5$
- (5.7.15) $X^2 = Y^5$
- (5.7.16) $(Y - X^2)^2 = Y^5$
- (5.7.17) $(Y - X^2)^2 = Y^5 + XY^4$
- (5.7.18) $XY(X - Y) = Y^5 + X^5$

$$(5.7.19) \quad X^2Y = Y^5 + X^5$$

$$(5.7.20) \quad X^3 = Y^5$$

$$(5.7.21) \quad X(Y - X^2)^2 = Y^4$$

$$(5.7.22) \quad X(Y - X^2)^2 = Y^5$$

$$(5.7.23) \quad X^4 = Y^5$$

$$(5.7.24) \quad X^3Y = X^5 + Y^5$$

$$(5.7.25) \quad X^2Y^2 = X^5 + Y^5$$

$$(5.7.26) \quad XY(X + 2Y)(X - 2Y) = X^5 + Y^5$$

$$(5.7.27) \quad X^2 + Y^3 = X^5$$

$$(5.7.28) \quad (X + Y)(X - Y) = X^5$$

Capitolo II

Superficie di Riemann.

In questo capitolo, dopo un veloce richiamo delle nozioni legate alle funzioni olomorfe (funzioni di variabile complessa differenziabili in senso complesso), diamo la definizione di superficie di Riemann, di funzioni e mappe olomorfe e meromorfe tra superficie di Riemann, e vedremo i primi esempi importanti.

0. Richiami di Analisi Complessa.

0.1. DEFINIZIONE (FUNZIONE OLOMORFA). Sia U un aperto di $\mathbb{C}$. Una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ si dice *olomorfa* se è derivabile in senso complesso, cioè se per ogni punto $z \in U$ esiste il limite $\lim_{\mathbb{C} \ni \varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}$. Una funzione olomorfa su $U = \mathbb{C}$ si dice *intera*.

0.1.1. Si osservi che la condizione posta è molto forte, poiché si richiede di variare $\varepsilon \in \mathbb{C}$: quindi ε varia su tutto un intorno di 0 in $\mathbb{C}$, e si sta “controllando” il comportamento di f in tutto un intorno di ogni $z \in U$ (e non solo, per esempio, sulle rette per z).

0.2. CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN. Usando che $\mathbb{C}$ è in biiezione con $\mathbb{R}^2$, e le usuali identificazioni $z = x + iy$, $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u, v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dunque identificando $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ con $(u, v) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, si vede che f è olomorfa se e solo se (u, v) è differenziabile in senso reale (come funzione di due variabili), e il suo differenziale in ogni punto è $\mathbb{C}$ -lineare come funzione $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Per questo è necessario e sufficiente che il differenziale commuti con la “moltiplicazione per i ”, che è rappresentata in $\mathbb{R}^2$ dalla matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Quindi una funzione f è olomorfa (differenziabile in senso complesso) se e solo se è differenziabile in senso reale e vale la seguente relazione:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Questa condizione si traduce nelle due relazioni seguenti

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

dette relazioni di Cauchy-Riemann.

0.3. SIMBOLOGIA COMPLETA. Conviene forse richiamare la simbologia completa di derivazioni e differenziali, con il dizionario complesso/reale:

$$\begin{aligned} z &= x + iy & x &= \Re(z), \quad y = \Im(z) \\ \bar{z} &= x - iy & \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ iz &= -y + ix & \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ dz &= dx + idy & dx &= \frac{dz + d\bar{z}}{2} \\ d\bar{z} &= dx - idy & dy &= \frac{dz - d\bar{z}}{2i} \\ dz \wedge d\bar{z} &= -2idx \wedge dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial &= \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) & \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \bar{\partial} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) & \frac{\partial}{\partial y} &= i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \end{aligned}$$

e possiamo allora scrivere che f è olomorfa se e solo se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, ovvero se e solo se $f dz$ è una forma differenziale chiusa (cioè il differenziale complesso $d(f dz) = \bar{\partial}(f) d\bar{z} \wedge dz$ è nullo).

0.3.1. FUNZIONI ANTIOLOMORFE. Si dice spesso che una funzione $f = u + iv$ è antiolomorfa se $\bar{f} = u - iv$ è olomorfa, cioè sse $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, sse $f d\bar{z}$ è una forma differenziale chiusa, sse valgono le antirelazioni di Cauchy-Riemann (esplicitare).

0.4. INTEGRAZIONI. Funzioni e differenziali di variabile complessa si possono integrare lungo cammini nel modo usuale per varietà reali:

0.4.1. se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ (I intervallo reale, $\gamma(x) \in \mathbb{C}$, continua) allora $\int_{\gamma} f dz = \int_I (f \circ \gamma) dx \in \mathbb{C}$, e se ω è una 1-forma differenziale complessa, $\int_{\gamma} \omega = \int_I \omega \circ \gamma \in \mathbb{C}$;

0.4.2. se $\Sigma : S \rightarrow \mathbb{C}$ (S aperto del piano reale, $\Sigma(x, y) \in \mathbb{C}$, continua) allora $\int_{\Sigma} f dz \wedge d\bar{z} = \int_S (f \circ \Sigma) dx \wedge dy \in \mathbb{C}$, e se η è una 2-forma differenziale complessa, $\int_{\Sigma} \eta = \int_S \eta \circ \Sigma \in \mathbb{C}$.

0.4.3. Naturalmente, valgono le formule di Gauss-Green: $\int_{\partial \Sigma} \omega = \int_{\Sigma} d\omega$.

0.5. TEOREMA (CAUCHY). Supponiamo f funzione di classe $\mathcal{C}^1$ (in quanto funzione reale); allora f è olomorfa se e solo se per ogni regione (aperto limitato) Σ si ha $\int_{\partial \Sigma} f(z) dz = 0$.

0.6. FORMULE INTEGRALI DI CAUCHY. Se f è funzione olomorfa in z_0 e limitata in un intorno Δ , allora per ogni $z \in \Delta$ valgono:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} f(\zeta) \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

0.6.1. SVILUPPI DI TAYLOR. Conseguenze dalle formule integrali sono:

- (a) una funzione è olomorfa se e solo se è indefinitamente differenziabile (dunque ammette sviluppo di Taylor) e analitica (la sua serie di Taylor converge alla funzione);
- (b) una funzione è olomorfa se e solo se è limite uniforme di polinomi in z .

0.7. TEOREMA (LIOUVILLE). Se f è funzione olomorfa intera, allora f è limitata se e solo se è costante, ed è un polinomio (di grado minore ad n) se e solo se è $o(|z|^n)$.

0.7.1. ORDINE DI ZERO. Se $f(z) = \sum_{i \geq m} a_i (z - z_0)^i$ è lo sviluppo di Taylor di f in z_0 , e $a_m \neq 0$, allora m si dice ordine di zero di f a z_0 ; si scrive $\text{ord}_{z_0} f(z) = \min\{m \in \mathbb{N} : a_m \neq 0\}$.

0.8. TEOREMA (PRINCIPIO DI IDENTITÀ O CONTINUAZIONE ANALITICA). Se f è funzione olomorfa su un connesso, allora f è (identicamente) nulla se (e solo se) si annulla su un insieme con un punto di accumulazione.

0.9. TEOREMA (PRINCIPIO DEL MASSIMO MODULO). Se f è funzione olomorfa e z_0 è punto di massimo relativo per $|f|$, allora f è costante nella componente connessa di z_0 .

0.9.1. Ne segue subito che: se $K \rightarrow \mathbb{C}$ è funzione continua non costante su un compatto connesso K di $\mathbb{C}$ ed è olomorfa nell'interno, allora il modulo assume valore massimo nella frontiera di K .

0.10. TEOREMA (WEIERSTRASS-VITALI). Sia f_n successione convergente uniformemente sui compatti ad f . Se f_n è olomorfa per ogni n allora f è olomorfa e le derivate $f_n^{(i)}$ della successione convergono uniformemente sui compatti alle derivate $f^{(i)}$ di f .

0.11. TEOREMA (M-TEST DI WEIERSTRASS). Se $f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ con U aperto di $\mathbb{C}$ sono funzioni olomorfe limitate in modulo da una successione con somma convergente ($\|f_n\|_U \leq M_n$ con $\sum_n M_n$ convergente), allora la serie $\sum_n f_n$ converge ad una funzione olomorfa f , e la serie $\sum_n f_n^{(i)}$ delle derivate converge alla derivata $f^{(i)}$ di f (tutto uniformemente sui compatti).

0.12. FUNZIONI MEROMORFE E ORDINI DI POLO. Una funzione $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ si dice meromorfa in $z_0 \in U$ se è olomorfa fuori di z_0 e ammette uno sviluppo di Laurent finito (negativamente)

$$f(z) = \sum_{i \geq -m} a_i (z - z_0)^i \quad \text{con } m \geq 0.$$

Il punto z_0 si dice un polo (isolato) di f , e l'intero m si dice l'ordine di polo di f a z_0 .

0.12.1. RESIDUI. Se f è meromorfa in z_0 , si dice residuo di f in z_0 il numero complesso a_{-1} dello sviluppo di Laurent. Vale che

$$\operatorname{res}_{z_0} f = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} f(\zeta) d\zeta$$

ove Δ è intorno di z_0 ove f converge (questo segue dal fatto che l'integrale su un circuito attorno a zero di $1/z$ vale $2\pi i$, parametrizzando il circuito con $e^{2\pi it}$ per $t \in [0, 1]$). Ne segue il calcolo per residui di integrali su circuiti.

0.12.2. INDICATORE LOGARITMICO. Se f è meromorfa e D è un disco chiuso senza poli di f nel bordo, allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} d \log f = (\text{numero di zeri}) - (\text{numero di poli}) \text{ di } f \text{ nel disco } D.$$

ove $d \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ è il differenziale logaritmico di f . Si tratta infatti di una funzione che presenta poli semplici dove f ha poli e zeri, con residui pari alle molteplicità (positive per gli zeri, negative per i poli). In particolare:

- (a) se f ha uno zero di ordine m in z_0 , allora $\operatorname{res}_{z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = m$;
- (b) se f ha un polo di ordine m in z_0 , allora $\operatorname{res}_{z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = -m$.

1. Superficie di Riemann, Funzioni e Mappe.

1.1. DEFINIZIONE (SUPERFICIE DI RIEMANN). Una Superficie di Riemann è una varietà complessa di dimensione 1. Cioè è uno spazio topologico S hausdorff, a base numerabile e connesso con ricoprimento aperto $\{U_i\}$ e carte (omeomorfismi) $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$, ove V_i sono aperti di $\mathbb{C}$ tali che le mappe di transizione $\varphi_{i,j} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ siano mappe olomorfe.

1.2. ESEMPI OVVI.

1.2.1. Gli aperti di $\mathbb{C}$ sono superficie di Riemann (non compatte).

1.2.2. In particolare sono Superficie di Riemann: $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (piano bucato), $D(0, 1^-)$ (disco unità) e $D^*(0, 1^-) = D(0, 1^-) \setminus \{0\}$ (disco unità bucato), $C(0, r, 1) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$ per $r < 1$ (corone).

1.2.3. Aperti di Superficie di Riemann sono Superficie di Riemann.

1.2.4. Prodotti cartesiani di Superficie di Riemann *non* sono Superficie di Riemann (perché?).

1.3. ESEMPIO NON OVVIO. Ogni superficie triangolabile può essere resa, non in modo canonico, una SdR; come trasformare una triangolazione in un atlante olomorfo?

1.4. ATTENZIONE. Come sempre, in queste definizioni, si sarebbe portati, partendo da un insieme S con le biiezioni φ_i , a definire la topologia di S imponendo che le “carte”, essendo biettive, siano omeomorfismi, cioè trasportando la topologia dagli aperti di $\mathbb{C}$ tramite le carte. Questo si può fare, ma bisogna verificare che la topologia così introdotta su S (trattasi di una topologia quoziente sulle carte) abbia le proprietà richieste: non è automatico.

1.5. DEFINIZIONE (FUNZIONI OLOMORFE E MEROMORFE). Una funzione $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ da una Superficie di Riemann a valori complessi si dice olomorfa (risp. meromorfa) nel punto $P \in S$ se esistono un aperto U di S contenente P e una carta $\varphi : U \rightarrow V$ (V aperto di $\mathbb{C}$) tale che $f \circ \varphi^{-1}$ sia olomorfa (risp. meromorfa) nel punto $z = \varphi(P)$. La funzione si dice olomorfa (risp. meromorfa) se lo è in ogni punto di S . L'insieme delle funzioni olomorfe su S si indica con $\mathcal{O}(S)$ ed ha chiaramente struttura d'anello (somma e prodotto definiti puntualmente su S). L'insieme delle funzioni meromorfe su S si indica con $\mathcal{M}(S)$ ed ha chiaramente struttura di corpo (ma non è necessariamente il corpo delle frazioni di $\mathcal{O}(S)$...).

Vi sono alcune considerazioni che discendono subito dalle proprietà delle funzioni olomorfe su aperti di $\mathbb{C}$.

1.5.1. PRINCIPIO DI IDENTITÀ. Una funzione olomorfa (risp. meromorfa) è identicamente nulla se e solo se si annulla su un insieme con un punto di accumulazione. Due funzioni olomorfe (risp. meromorfe) sono uguali se e solo se coincidono su un insieme con un punto di accumulazione.

1.5.2. DISCRETEZZA DI ZERI E POLI. Se una funzione olomorfa su S è non nulla, allora l'insieme degli zeri è discreto. Se una funzione meromorfa su S è non nulla, allora l'insieme degli zeri e l'insieme dei poli sono entrambi discreti.

1.5.3. MASSIMO MODULO. Una funzione olomorfa il cui modulo ammetta massimo relativo è costante nella componente connessa del massimo.

1.5.4. CASO COMPATTO. Se S è compatta, allora ogni funzione olomorfa è costante, cioè $\mathcal{O}(S) = \mathbb{C}$. Infatti il modulo ammette massimo, ed S è connessa. Invece le funzioni meromorfe non sono necessariamente banali.

1.5.5. ORDINI. L'ordine di una funzione (olomorfa o meromorfa) in $P \in S$ si definisce nel modo ovvio usando una qualsiasi carta in un intorno di P . Si scrive $\text{ord}_P(f)$, se $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ è la funzione, ed è intero positivo, nullo o negativo a seconda che f abbia valore nullo, non nullo o polo in P .

Naturalmente valgono le solite regole di compatibilità della funzione ord_P :

$$\text{ord}_P(f) = \infty \text{ sse } f = 0 \text{ (in un intorno di } P, \text{ e allora ovunque),}$$

$$\text{ord}_P(fg) = \text{ord}_P(f) + \text{ord}_P(g),$$

$$\text{ord}_P(1/f) = -\text{ord}_P(f),$$

$$\text{ord}_P(f \pm g) \geq \min\{\text{ord}_P(f), \text{ord}_P(g)\} \text{ (e vale l'uguaglianza se sono diversi).}$$

1.5.6. ESISTENZA! Per contro, non è assolutamente evidente che in una SdR qualsiasi esistano funzioni olomorfe e/o meromorfe: il fatto che ne esistano localmente (localmente trattandosi di aperti di $\mathbb{C}$), non garantisce l'esistenza globale di funzioni definite su tutta la SdR (a parte le funzioni costanti). Le dimostrazioni di esistenza richiedono tecniche avanzate di tipo analitico (e soprattutto tempo che non abbiamo nel corso): si possono trovare in Cassa e Reyssat per esempio.

Noi useremo come esempi soprattutto le (desingularizzazioni di) curve algebriche, in cui l'esistenza di funzioni e differenziali olomorfi e meromorfi è chiara.

L'esistenza di "abbastanza" funzioni meromorfe è essenziale nel dimostrare che parlare di SdR compatte è la stessa cosa che parlare di campi di funzioni di trascendenza 1 su $\mathbb{C}$ (cioè di campi che siano estensioni algebriche, finite in effetti, di $\mathbb{C}(X)$ con X trascendente su $\mathbb{C}$), o anche parlare di curve algebriche.

1.6. DEFINIZIONE (MAPPE OLOMORFE). Una funzione $f : S \rightarrow S'$ tra Superficie di Riemann si dice mappa olomorfa nel punto $P \in S$ se esistono un aperto U di S contenente P e una carta $\varphi : U \rightarrow V$ (V aperto di $\mathbb{C}$) un aperto U' di S' contenente $P' = f(P)$ e una carta $\varphi' : U' \rightarrow V'$ (V' aperto di $\mathbb{C}$) tale che $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ sia olomorfa nel punto $z = \varphi(P)$. La funzione si dice mappa olomorfa se lo è in ogni punto di S . Indicheremo con $\mathcal{O}(S, S')$ le mappe olomorfe da S in S' .

1.6.1. IDENTITÀ. L'applicazione identica di ogni SdR in sè è mappa olomorfa.

1.6.2. COMPOSIZIONE. È facile verificare che la composizione di due mappe olomorfe è ancora olomorfa.

1.6.3. Si osservi che le funzioni meromorfe da S in $\mathbb{C}$ sono esattamente le mappe olomorfe da S in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ (in quanto Superficie di Riemann), mandando ogni polo nel punto ∞ . Dunque $\mathcal{O}(S, \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) = \mathcal{M}(S)$.

1.6.4. ISOMORFISMI. Diremo che due Superficie di Riemann sono isomorfe (o biolomorfe) se esiste una mappa olomorfa tra loro che sia invertibile e la cui inversa sia una mappa olomorfa.

1.7. FORMA LOCALE DI MAPPE OLOMORFE. Data una funzione $f : S \rightarrow S'$ olomorfa in $P \in S$, è sempre possibile trovare una carta $\varphi : V \rightarrow U$ con V aperto di $\mathbb{C}$, U aperto di S contenente P , e una carta $\varphi' : V' \rightarrow U'$ con V' aperto di $\mathbb{C}$, U' aperto di S' contenente $f(P)$, tale che $\varphi'^{-1} \circ f \circ \varphi(z) = z^m$ con $m \in \mathbb{N}$. Infatti, per ipotesi possiamo trovare carte in modo da avere una espressione locale del tipo $z^m g(z)$ con $m \in \mathbb{N}$ e $g(z)$ olomorfa con $g(0) \neq 0$; si tratta quindi di cambiare φ componendo con una determinazione della radice m -esima di $g(z)$.

1.7.1. MOLTEPLICITÀ E ORDINI. Si dice molteplicità di f in P il naturale m , e si indica con $\text{molt}_P(f)$. La molteplicità si può calcolare come l'ordine di annullamento nel punto della derivata di una forma locale, aumentato di 1.

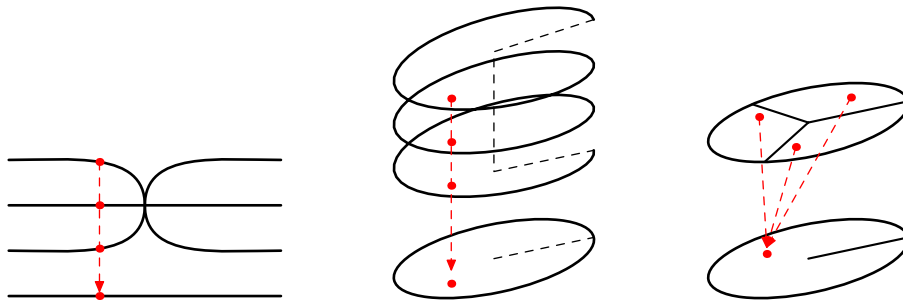
1.7.2. RELAZIONE CON GLI ORDINI PER FUNZIONI MEROMORFE. Si osservi che per una funzione meromorfa f su S , pensata come funzione olomorfa da S in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, $\text{molt}_P(f) = \text{ord}_P(f)$ se P non è polo, e $\text{molt}_P(f) = -\text{ord}_P(f)$ se P è un polo.

1.7.3. GRADO. Supponiamo S ed S' SdR compatte. Per ogni punto $P' \in S'$, la somma delle molteplicità

$$\sum_{P: f(P)=P'} \text{molt}_P(f)$$

è indipendente da P' , e si dice il grado di f . Infatti si tratta di una funzione localmente costante su S' , che è connessa. Si indica con $\deg(f)$.

1.7.4. RIVESTIMENTI. Come conseguenza, si vede che ogni funzione olomorfa f tra SdR compatte è un rivestimento ramificato con $\deg(f)$ fogli, e sono punti di ramificazione solo i punti di $P \in S$ con $\text{molt}_P(f) > 1$, con $r_P(f) = \text{molt}_P(f) - 1$. In particolare sono mappe aperte, quindi suriettive perché anche chiuse.



1.7.5. ZERI E POLI. In particolare, per ogni SdR compatta e per ogni funzione meromorfa vale che $\sum_P \text{ord}_P(f) = 0$, poiché si tratta della differenza tra il numero di zeri e il numero dei poli, cioè

$$\sum_{P: f(P)=0} \text{molt}_P(f) - \sum_{P: f(P)=\infty} \text{molt}_P(f) = \deg(f) - \deg(f) = 0$$

(si tratta dei punti delle fibre di f in $0, \infty \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$).

1.7.6. È utile, anche se facile, osservare che mappe olomorfe tra SdR compatte sono isomorfismi se e solo se sono di grado 1 (cioè rivestimenti con un foglio, nel qual caso non hanno ramificazione).

1.8. TEOREMA DI UNIFORMIZZAZIONE. Poiché le SdR sono spazi topologici (semi)localmente semplicemente connessi, essi ammettono rivestimento universale (cioè con gruppo fondamentale banale: tutti i circuiti chiusi sono omotopi alle mappe costanti), ed è chiaro che i rivestimenti di SdR ottengono una ben definita struttura di SdR per cui la mappa di rivestimento sia olomorfa.

Viene quindi spontaneo chiedersi quali siano le SdR semplicemente connesse, e la risposta è semplice, anche se per dimostrarla serve ragionare sulla struttura delle funzioni meromorfe:

1.8.1. TEOREMA. *A meno di isomorfismi, ci sono solo tre SdR semplicemente connesse: la sfera $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, il piano complesso $\mathbb{C}$ e il disco unitario $\mathbb{D}$ nel piano complesso (o equivalentemente il semipiano di Poincaré $\mathbb{H}$: trovare un isomorfismo di SdR tra i due).*

1.8.2. Inoltre, è chiaro che la sfera è rivestimento universale solo di sé stessa in quanto SdR, il piano è il rivestimento universale di tutti i tori, e (meno chiaro che) il disco (o il semipiano di Poincaré) è rivestimento universale di tutte le SdR di genere $g \geq 2$.

2. Esempi: sfera di Riemann.

2.1. $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ COME SUPERFICIE DI RIEMANN. La retta proiettiva complessa $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ diventa una Superficie di Riemann compatta usando come atlante quello definito dalle due carte affini usuali:

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = U_1 \xleftarrow{\psi_1} \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \xrightarrow{\psi_2} U_2 = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \longleftarrow z \longrightarrow \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$$

con inverse date da

$$\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = U_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \xleftarrow{\varphi_2} U_2 = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} z_1 \\ z_0 \end{pmatrix} \longleftarrow \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

L'unica mappa di transizione è data da

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \setminus 0 = \mathbb{C}^* \xrightarrow{\psi_1} U_1 \cap U_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathbb{C}^* = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \setminus 0$$

$$z \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{1}{z}$$

che è chiaramente olomorfa.

Si ricordi che la topologia di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ è definita dal fatto di rendere omeomorfismi le due carte affini, e quindi $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ risulta connessa (perché U_1 e U_2 lo sono e $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$), a base numerabile (lo sono sia U_1 che U_2), hausdorff (lo sono sia U_1 che U_2 e in questo caso basta verificare che i due punti $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ si separino con aperti disgiunti, che è facile), compatta (perché è unione dei due compatti $K_1 = \{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 : |\varphi_1(P)| \leq 1\}$ e $K_2 = \{P \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 : |\varphi_2(P)| \leq 1\}$).

2.2. S COME SUPERFICIE DI RIEMANN. Ricordiamo anche che la proiezione stereografica dal polo nord identifica la sfera unitaria $\mathbb{S}$ di $\mathbb{R}^3$ con $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ (identificato con il piano equatoriale reale) mandando il polo nord nel punto $\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si osservi che la proiezione della sfera dal polo nord sul piano equatoriale ha inversa data da $z \mapsto \frac{1}{1+|z|^2} \begin{pmatrix} |z|^2-1 \\ 2z \end{pmatrix}$ (con $z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$). La proiezione dal polo sud ha inversa data da $z \mapsto \frac{1}{1+|z|^2} \begin{pmatrix} 1-|z|^2 \\ 2z \end{pmatrix}$, e le due mappe inducono su $\mathbb{C}^*$ la mappa di transizione che manda z in $1/\bar{z}$. Dunque si tratta di un atlante antiolomorfo (basta comporre una delle due carte col coniugio per ottenere un atlante in quanto SdR).

Si può allora verificare che le due carte sono omeomorfismi usando come topologia su $\mathbb{S}$ quella indotta dalla topologia di $\mathbb{R}^3$.

2.3. FUNZIONI OLOMORFE SULLA SFERA DI RIEMANN. Essendo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ SdR compatta, $\mathcal{O}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) = \mathbb{C}$: le funzioni olomorfe sulla sfera sono solo le costanti.

2.4. TEOREMA (FUNZIONI MEROMORFE SULLA SFERA DI RIEMANN). Abbiamo i seguenti isomorfismi di corpi:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) & \cong & \mathcal{R}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1) & \cong & \mathcal{M}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) \\ \parallel & & \parallel & & \\ \mathcal{Q}_0(\mathbb{C}[Z_0, Z_1]_{\text{h}}) & \cong & \mathcal{Q}(\mathbb{C}[Z]) & & \end{array}$$

dove $\mathcal{R}$ indica “funzioni razionali su” e $\mathcal{Q}$ indica “corpo delle frazioni di” ($\mathcal{Q}_0$ indica “corpo delle frazioni di grado zero di”). Quindi il corpo delle funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann si identifica con il corpo delle funzioni razionali sulla retta (affine o proiettiva) complessa.

Procediamo con vari passaggi:

2.4.1. Nel quadrato abbiamo le funzioni razionali su $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$, che sono le funzioni $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ che si scrivono come frazioni di polinomi in z , e quindi si identificano con $\mathcal{Q}(\mathbb{C}[Z])$ essendo $\mathbb{C}$ (algebricamente chiuso) di caratteristica nulla. A sinistra nel quadrato abbiamo le funzioni razionali su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, che per definizione sono le funzioni $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ che si scrivono come frazioni di polinomi omogenei dello stesso grado in z_0, z_1 , e quindi si identificano con $\mathcal{Q}_0(\mathbb{C}[Z_0, Z_1]_{\text{h}})$.

Inoltre i due corpi di frazioni sono identificato tra loro dalle usuali applicazioni di omogeneizzazione/disomogeneizzazione (che per gli anelli di polinomi non sono isomorfismi, ma lo diventano per i corpi di frazioni: verificare).

Dunque il quadrato è chiaramente composto da isomorfismi.

2.4.2. Ora vediamo che esiste una applicazione $\mathcal{R}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)$, mostrando che ogni funzione razionale sulla retta affine si estende ad una funzione meromorfa sulla retta proiettiva. Sia $\varphi : \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ funzione razionale, $\varphi = f/g$ con f, g funzioni polinomiali e consideriamo l'insieme $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_r, \infty\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ ove $P_i = \begin{pmatrix} 1 \\ z_i \end{pmatrix}$ e $g(z_i) = 0$ (punti corrispondenti agli zeri di g). Allora è chiaro che φ definisce una funzione olomorfa su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \setminus \mathcal{P}$, avente poli o singolarità eliminabili (quando?) nei punti $P_1, \dots, P_r$. Bisogna controllare il comportamento nel punto improprio ∞ . Poiché $\text{ord}_P(f/g) = \text{ord}_P(f) - \text{ord}_P(g)$, basta controllare il comportamento sui polinomi. Allora per f polinomio abbiamo la funzione definita da $\varphi(P) = f(\psi_1(P))$ e vogliamo studiare il comportamento per $P = \infty$; studiamo allora il comportamento a zero della funzione $\varphi(\varphi_2(z)) = f(\psi_1(\varphi_2(z))) = f(1/z)$. Se $f(z) = \sum_i a_i z^i$, di grado d , allora $f(1/z) = z^{-d} \sum_i a_i z^{d-i}$, e quindi presenta un polo di ordine d in zero. Quindi: *funzioni polinomiali sulla retta affine si estendono a funzioni meromorfe sulla retta proiettiva con un polo nel punto improprio di ordine pari al grado del polinomio; funzioni razionali sulla retta affine si estendono a funzioni meromorfe sulla retta proiettiva con ordine nel punto improprio pari alla differenza dei gradi di numeratore e denominatore.*

2.4.3. Ora è sufficiente mostrare che ogni funzione meromorfa sulla sfera di Riemann si ottiene nel modo descritto a partire da funzioni razionali (sulla retta affine); infatti l'applicazione $\mathcal{R}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1) \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)$ trovata è chiaramente iniettiva e basta mostrarne la suriettività. Sia allora φ una funzione

meromorfa non nulla di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, e sia $\{P_1, \dots, P_r\}$ l'insieme (finito per compattezza) di poli e zeri di φ . Sia $P_i = \begin{pmatrix} a_0^{(i)} \\ a_1^{(i)} \end{pmatrix}$ e $e_i = \text{ord}_{P_i}(\varphi)$. Allora la funzione razionale

$$\gamma_i = Z_0^{-e_i} (a_1^{(i)} Z_0 - a_0^{(i)} Z_1)^{e_i}$$

ha ordine in P pari a:

$$\text{ord}_P \gamma_i = \begin{cases} 0 & \text{se } P \neq P_i, \infty \\ e_i & \text{se } P = P_i \\ -e_i & \text{se } P = \infty. \end{cases}$$

Dunque la funzione razionale $\gamma = \prod_i \gamma_i$ ha $\text{ord}_P(\gamma) = \text{ord}_P(\varphi)$ per ogni P , tranne al più $P = \infty$.

Ora, il quoziente φ/γ è olomorfo invertibile su $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$, e basta vedere come si comporta all'infinito: se $\text{ord}_{\infty}(\varphi/\gamma) \geq 0$ allora φ/γ è olomorfa su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, dunque costante e non nulla, $\varphi = \alpha\gamma$ (con $\alpha \in \mathbb{C}^*$), e di conseguenza anche $\text{ord}_{\infty}(\varphi/\gamma) = 0$. Altrimenti è $\text{ord}_{\infty}(\varphi/\gamma) \geq 0$ e si arriva alle stesse conclusioni. $\square$

2.4.4. ATTENZIONE. Si osservi che abbiamo identificato funzioni razionali su retta affine e retta proiettiva complesse; ma non è assolutamente vero che le funzioni meromorfe sulla retta affine si identifichino con le funzioni meromorfe sulla retta proiettiva (come pure per le funzioni olomorfe): esistono funzioni olomorfe (dunque anche meromorfe) su $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ con singolarità essenziali (non polari) all'infinito, che quindi non sono funzioni meromorfe su $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Ad esempio esponenziali e funzioni trigonometriche. Quindi abbiamo $\mathcal{O}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) \subsetneq \mathcal{O}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1)$ e $\mathcal{M}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1) \subsetneq \mathcal{M}(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1)$.

2.4.5. SOMME DI FRAZIONI ELEMENTARI. È interessante a questo punto ricordare anche l'espressione delle funzioni razionali usando le frazioni elementari (quelle che si usano per l'integrazione), con l'ovvia interpretazione geometrica: stiamo sommando, a parte un polinomio, dei termini che sono strettamente (e univocamente) legati ai poli della funzione razionale in questione.

2.4.6. TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA. Un polinomio non costante di grado d dà una funzione meromorfa non costante di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ (in sè), che quindi è suriettiva; in particolare l'antimmagine di zero è formata da d punti, che sono gli zeri del polinomio.

2.5. CARATTERIZZAZIONE DELLA SFERA DI RIEMANN. Dalla dimostrazione del teorema possiamo ritrovare il risultato per cui ogni funzione meromorfa ha “tanti poli quanti zeri”, cioè somma degli ordini nulla (ciò è infatti verificato per i polinomi, e quindi per le funzioni razionali), cosa già vista in generale per le SdR compatte. La dimostrazione permette però di affermare una reciproca: *per ogni insieme $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ e ogni scelta $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}$ tali che $\sum_i a_i = 0$, esiste, unica a meno di costanti non nulle, una funzione meromorfa $f \in \mathcal{M}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1)$ tale che $\text{ord}_P(f) = \delta_{P, P_i} a_i$ per ogni $P \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ (cioè ha esattamente quell'insieme come insieme di zeri e poli, ed esattamente con le molteplicità assegnate).* Aggiungendo la funzione nulla, si può dire che l'insieme delle funzioni dette è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ di dimensione uno.

2.5.1. In particolare, assegnati due punti distinti $P, Q \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, esiste una funzione meromorfa che ha zero semplice in P , polo semplice in Q e nessun altro zero o polo.

2.5.2. Dunque: se S è SdR compatta, ed esiste una funzione meromorfa con un unico polo semplice $f : S \rightarrow \mathbb{C}$, ovvero una funzione olomorfa $f : S \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ con un unico zero semplice, allora f è un isomorfismo tra S e $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Infatti, S è un rivestimento con un foglio.

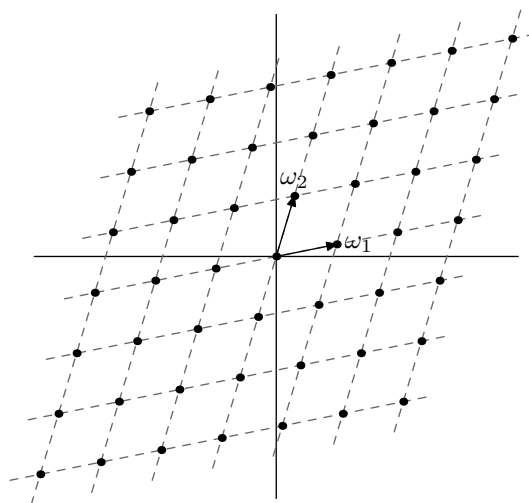
Si osservi che questo dà anche un metodo per parametrizzare le curve razionali, cioè di genere nullo: basta trovare una funzione razionale con un unico polo: l'inversa di questa è una parametrizzazione. Nel caso delle curve algebriche $\mathcal{C}$ di genere nullo, data una funzione razionale $h(\underline{x})$ con un solo polo su di essa, trovare la parametrizzazione corrisponde a risolvere (soluzione punti di $\mathcal{C}$) l'equazione $h(\underline{X}) = \lambda$ per ogni $\lambda \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Questo si può anche interpretare come il punto variabile nella intersezione di $\mathcal{C}$ con il fascio di ipersuperficie di equazione $h(\underline{X}) = \lambda$ (eliminando il denominatore di h si ottiene un fascio al variare di λ); questo tipo di tecniche si usa nel caso delle curve algebriche piane (intersecare una curva con un fascio di curve, in modo che al variare nel fascio l'intersezione vari solo per un punto).

2.5.3. Conclusione: abbiamo caratterizzato la sfera di Riemann come l'unica SdR compatta che ammetta funzioni meromorfe con un unico zero semplice (e dunque un unico polo semplice). Cioè, a meno di isomorfismi esiste una unica SdR compatta di genere zero, ed è caratterizzata dal fatto di ammettere funzioni meromorfe con un unico polo (e dunque un unico zero).

3. Esempi: tori complessi.

3.1. TORI COMPLESSI: QUOZIENTI DI $\mathbb{C}$ PER UN RETICOLO. Abbiamo già introdotto il toro come superficie reale compatta ottenuta per identificazione (discorde) di coppie di lati opposti di un quadrato. Vogliamo ora evidenziare una struttura di SdR, e per questo daremo una definizione più precisa che ci permetta di definire la struttura di atlante olomorfo, e in seguito di discutere quando due tori siano da considerarsi “isomorfi” (come superficie reali compatte lo sono sempre, ma le strutture complesse possono differire).

3.1.1. DEFINIZIONI. Siano ω_1 e ω_2 elementi di $\mathbb{C}$ linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$. Il reticolo generato da ω_1 e ω_2 è per definizione il sottogruppo abeliano di $\mathbb{C}$ generato da ω_1 e ω_2 ; si indica con $\mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ oppure con $\langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$, ed è formato da tutte le combinazioni a coefficienti interi dei due generatori. Si osservi che un reticolo è sempre un sottoinsieme discreto di $\mathbb{C}$ (per l'usuale topologia).



Sia $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$ un reticolo di $\mathbb{C}$; il toro $\mathbb{T}_\Lambda$ relativo a quel reticolo è lo spazio quoziente $\mathbb{C}/\Lambda$ dotato delle seguenti due strutture (indichiamo con $x \mapsto \bar{x}$ la mappa continua quoziente $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda$, se non fa confusione con il coniugio, altrimenti useremo $x \mapsto [x]$):

- (1) la struttura di gruppo abeliano in quanto quoziente del gruppo additivo di $\mathbb{C}$;
- (2) dotato della topologia quoziente, la struttura di superficie di Riemann (compatta) definita dalle seguenti carte: per ogni $\bar{x} \in \mathbb{T}_\Lambda$, con $x \in \mathbb{C}$, sia U_x un intorno di x in $\mathbb{C}$ che contenga al più un punto del reticolo Λ ; la collezione degli insiemi $\bar{U}_x$ forma un atlante olomorfo per il toro (si osservi che le mappe di transizione sono l'identità o una traslazione in $\mathbb{C}$).

3.1.2. Si verifichi che in quanto superficie reale, la definizione appena data coincide con quella del precedente capitolo.

3.1.3. Si verifichi che ogni toro ammette un atlante olomorfo con tre carte.

3.1.4. Si verifichi che ogni toro complesso è isomorfo (in quanto SdR) ad un toro definito da un reticolo generato da 1 e τ con la condizione che $\Im(\tau) > 0$ (quindi in particolare 1 e τ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$). Indicheremo con Λ_τ il reticolo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$, e con $\mathbb{T}_\tau$ il toro corrispondente.

È più difficile chiedersi quando due tori del tipo $\mathbb{T}_\tau$ e $\mathbb{T}_{\tau'}$ sono tra loro isomorfi (in quanto SdR), ed affronteremo il problema in futuro.

3.2. FUNZIONI OLOMORFE E MEROMORFE. Essendo $\mathbb{T}_\Lambda$ SdR compatta, $\mathcal{O}(\mathbb{T}_\Lambda) = \mathbb{C}$: le funzioni olomorfe sui tori sono solo le costanti. D'altra parte, è chiaro che ogni funzione olomorfa sul toro si identifica con una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ periodica sul reticolo Λ : ma allora si tratta di funzione intera e limitata (perché periodica su un compatto), dunque costante.

Per quanto riguarda le funzioni meromorfe, è chiaro che possiamo identificare ogni funzione meromorfa sul toro con una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ periodica sul reticolo Λ ; però una descrizione esplicita in questi termini non è così ovvia. Studieremo prima una particolare funzione meromorfa sul toro, la funzione di Weierstrass, in vista delle sue applicazioni allo studio della struttura di gruppo del toro e alla sua identificazione con curve ellittiche piane; poi usando le funzioni Theta di Riemann daremo

una descrizione generale delle funzioni meromorfe sul toro, similmente a quanto fatto per la sfera, nonché una simpatica immersione del toro in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ come intersezione di quadriche.

3.3. FUNZIONE DI WEIERSTRASS E CURVE ELLITTICHE. Consideriamo il toro $\mathbb{T}_{\Lambda}$ (ricordiamo che è definito dal reticolo Λ generato da ω_1 e ω_2 elementi di $\mathbb{C}$ linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$); la funzione $\wp(z)$ di Weierstrass è definita dalla somma

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$.

3.3.1. TEOREMA. Valgono le seguenti proprietà:

- (0) (MEROMORFIA) la funzione di Weierstrass è meromorfa su $\mathbb{C}$, olomorfa fuori di Λ .
- (1) (DERIVATA) la derivata della funzione di Weierstrass è anch'essa meromorfa su $\mathbb{C}$, olomorfa fuori di Λ , e vale:

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Lambda} \left(\frac{1}{(z - \omega)^3} \right)$$

per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$.

- (2) (PARITÀ) la funzione di Weierstrass è pari, e la sua derivata dispari; cioè

$$\wp(-z) = \wp(z) \quad \text{e} \quad \wp'(-z) = -\wp'(z).$$

- (3) (PERIODICITÀ) la funzione di Weierstrass è periodica sul reticolo Λ , quindi definisce una funzione meromorfa $\wp : \mathbb{T}_{\Lambda} \rightarrow \mathbb{C}$ sul toro, ovvero una funzione olomorfa $\mathbb{T}_{\Lambda} \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ (in quanto SdR).
- (4) (POLI) la funzione di Weierstrass presenta poli d'ordine 2 in ogni $\lambda \in \Lambda$ (con residuo nullo).
- (5) (SURIETTIVITÀ E DIFETTO DI INIETTIVITÀ) la funzione di Weierstrass è suriettiva, inoltre vale che $\wp(z) = \wp(z')$ se e solo se $z' = \pm z + \Lambda$.
- (6) (ZERI DELLA DERIVATA) la derivata della funzione di Weierstrass si annulla nei tre punti (non nulli) di due torsione modulo il reticolo Λ , cioè in $\frac{\omega_1}{2}$, $\frac{\omega_2}{2}$ e $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$.
- (7) (UNICITÀ) la funzione di Weierstrass è l'unica funzione su $\mathbb{C}$ periodica di periodo Λ che in un intorno di zero abbia sviluppo di Laurent $\frac{1}{z^2} + h(z)$ con $h(z)$ olomorfa e $h(0) = 0$.
- (8) (RELAZIONE FUNZIONALE) risulta che

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2(\Lambda)\wp(z) - g_3(\Lambda)$$

ove $g_2(\Lambda) = 60 \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^4}$ e $g_3(\Lambda) = 140 \sum_{0 \neq \omega \in \Lambda} \frac{1}{\omega^6}$.

- (9) (IMMERSIONE PROIETTIVA PIANA COME CURVA ELLITTICA) la funzione

$$\begin{aligned} u : \mathbb{T}_{\Lambda} &\longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \\ z &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \wp(z) \\ \wp'(z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ha immagine contenuta nella curva ellittica (cubica piana non singolare) $\mathcal{C}_{\Lambda}$ di equazione $Y^2 = 4X^3 - g_2(\Lambda)X - g_3(\Lambda)$, e in quanto funzione tra SdR $u : \mathbb{T}_{\Lambda} \rightarrow \mathcal{C}_{\Lambda}$ è biiettiva, bicontinua e biolomorfa.

- (10) (TEOREMA DI ABEL PER I TORI) la mappa $u : \mathbb{T}_{\Lambda} \rightarrow \mathcal{C}_{\Lambda}$ è un (iso)morfismo di gruppi abeliani, cioè per $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ risulta che

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0 \pmod{\Lambda} \quad \text{se e solo se} \quad u(z_1), u(z_2), u(z_3) \text{ sono allineati}$$

$$\text{se e solo se} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \wp(z_1) & \wp(z_2) & \wp(z_3) \\ \wp'(z_1) & \wp'(z_2) & \wp'(z_3) \end{vmatrix} = 0.$$

3.3.2. DIMOSTRAZIONE. La parte più noiosa è il primo punto (si fanno stime in modulo per applicare l' M -test di Weierstrass), mentre il resto della dimostrazione è facile e/o interessante per i metodi e le idee presenti.

- (0) per dimostrare l'olomorfia fuori di 0, consideriamo i dischi compatti $D(0, R^+) = \{z : |z| \leq R\}$, e sia $\Lambda_R = \{\omega \in \Lambda : |\omega| < 2R\}$. Abbiamo allora che Λ_R è contenuto nell'insieme

$$\{n_1\omega_1 + n_2\omega_2 : n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, n_1^2 + n_2^2 \leq 4R^2\delta^{-2}\}$$

per δ tale che $|x_1\omega_1 + x_2\omega_2| \geq \delta\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, ovvero $|\omega| \geq \delta\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. In particolare Λ_R è finito. Stimiamo allora la somma di Weierstrass sul complementare: per $\omega \in \Lambda \setminus \Lambda_R$ risulta

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{\omega^2 - (z-\omega)^2}{\omega^2(z-\omega)^2} \right| = \frac{|z| |z-2\omega|}{|\omega|^2 |z-\omega|^2}$$

ed usando le stime seguenti

$$|z| \leq R,$$

$$|2\omega - z| \leq |2\omega| + |z| \leq 2|\omega| + |\omega|/2 = \frac{5}{2}|\omega|$$

$$|z - \omega|^2 \geq ||z| - |\omega||^2 \geq ||\omega| - R|^2 \geq ||\omega| - |\omega|/2|^2 \geq |\omega|^2/4,$$

otteniamo la minorazione

$$\leq \frac{R \cdot 5|\omega|/2}{|\omega|^2 |\omega|^2/4} = 10R/|\omega|^3 \leq \frac{10R}{\delta^3} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}^3}.$$

Possiamo allora stimare la somma di Weierstrass nel modo seguente

$$\begin{aligned} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \frac{10R}{\delta^3} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}^3} &= \frac{10R}{\delta^3} \sum_{(n_1, n_2) \neq (0,0)} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}^3} \\ &= \frac{10R}{\delta^3} \sum_{k \geq 1} \sum_{\max(n_1, n_2) = k} \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}^3} \\ &\leq \frac{10R}{\delta^3} \sum_{k \geq 1} \frac{2k}{\sqrt{2k^2}^3} \leq \frac{10R}{\delta^3 \sqrt{2}} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} < \infty \end{aligned}$$

per applicare l' M -test.

- (1) basta derivare sotto il segno di somma (si può fare in base al punto precedente).
- (2) la parità di $\wp$ è ovvia, poiché scambiando z in $-z$ la somma rimane la stessa (reindizzata usando $-\omega$ invece di ω); per la derivata, basta derivare.
- (3) la periodicità è ovvia, poiché cambiare l'argomento per un elemento del reticolo non fa che reindicare la sommatoria sul reticolo per traslazione.
- (4) il polo d'ordine due in 0 con residuo nullo è evidente dalla definizione (la parte della somma è olomorfa), e di conseguenza sugli altri elementi del reticolo per periodicità.
- (5) per controllare suriettività e difetto di iniettività, usiamo l'indicatore logaritmico per la funzione $f(z) = \wp(z) - c$ con $c \in \mathbb{C}$. Abbiamo che $d \log f(z) = f'(z)/f(z)$ ha polo a 0 di ordine 1 e residuo 2. Sia Γ un parallelogrammo di $\mathbb{C}$ con vertici $z_0, z_0 + \omega_1, z_0 + \omega_2, z_0 + \omega_1 + \omega_2$, ove z_0 è scelto in modo che sul bordo del parallelogrammo non vi siano poli o zeri di $f(z)$. Allora risulta che

$$0 = \int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \# \text{zeri}(f) - \# \text{poli}(f) = \# \text{zeri}(f) - 2$$

(l'integrale è nullo perché i quattro lati di Γ si cancellano a due a due; d'altra parte nell'interno di Γ cade esattamente un punto del reticolo, che porta un polo doppio) e dunque concludiamo che $f(z)$ ammette zeri (due, contati con molteplicità) all'interno di Γ , cioè esistono valori $w \in \mathbb{C}$ tali che $\wp(w) = c$.

Per controllare quali sono i $w \in \mathbb{C}$ tali che $\wp(w) = c$, basta considerare che certamente, per parità e periodicità, anche $\pm w + \Lambda$ sono zeri. Ora, se $w \not\equiv -w \pmod{\Lambda}$ si hanno due zeri distinti all'interno del parallelogramma; se invece si ha $w \equiv -w \pmod{\Lambda}$, allora tale valore annulla anche la derivata (per periodicità e disparità), e quindi è uno zero doppio all'interno del parallelogramma (e di conseguenza non vi sono altri zeri).

- (6) gli zeri di $\wp'(z)$ sono (per disparità) i w tali che $w \equiv -w \pmod{\Lambda}$, da cui segue subito il risultato.
- (7) la differenza tra due tali funzioni sarebbe intera (olomorfa sul piano) e limitata (perché periodica sul reticolo), dunque costante; ma allora è nulla poiché valutata in 0 vale 0.
- (8) per la relazione funzionale, usiamo nuovamente il principio di identità analitica, costruendo una combinazione lineare delle funzioni $\wp, \wp^3, (\wp')^2$ che risulti olomorfa (cioè priva di parte polare), quindi costante (perché periodica su un compatto, e quindi limitata). Gli sviluppi di Laurent in

0 cominciano con

$$\begin{aligned}\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + az^2 + bz^4 + o(z^6) \\ \wp(z)^3 &= \frac{1}{z^6} + 3a\frac{1}{z^2} + 3b + o(z^2) \\ \wp'(z) &= -\frac{2}{z^3} + 2az + 4bz^3 + o(z^5) \\ \wp'(z)^2 &= \frac{4}{z^6} - 8a\frac{1}{z^2} - 16b + o(z^2)\end{aligned}$$

e quindi la combinazione

$$\wp'(z)^2 - (4\wp(z)^3 - 20a\wp(z))$$

è intera limitata (priva di parte polare e periodica sul reticolo), quindi costante, e la costante vale $-16b - 12b = -28b$. Quindi risulta

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - 20a\wp(z) - 28b$$

con le costanti

$$\begin{aligned}g_2(\Lambda) &= 20a = 20 \frac{1}{2!} \frac{\partial^2(\wp - 1/z^2)}{\partial z^2}(0) = 60 \sum \frac{1}{\omega^4} \\ g_3(\Lambda) &= 28b = 28 \frac{1}{4!} \frac{\partial^4(\wp - 1/z^2)}{\partial z^4}(0) = 140 \sum \frac{1}{\omega^6}\end{aligned}$$

- (9) dal punto precedente è chiaro che $u : \mathbb{T}_\Lambda \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda$ è ben definita; per procedere conviene scrivere la funzione inversa, anticipando (e motivando) alcuni argomenti futuri circa i differenziali su SdR; il problema è: come ricostruire il reticolo Λ e quindi il toro $\mathbb{T}_\Lambda$ a partire dalla curva ellittica $\mathcal{C}_\Lambda$ (questo ci farà anche vedere che ogni curva ellittica è un toro)? Consideriamo le mappe π e u :

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{T}_\Lambda \longrightarrow \mathcal{C}_\Lambda \\ z &\longmapsto z + \Lambda \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \wp(z) \\ \wp'(z) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

e il differenziale $\alpha = \frac{dX}{Y}$ sulla curva $\mathcal{C}_\Lambda$; allora abbiamo le immagini inverse $\eta = u^*(\alpha)$ su $\mathbb{T}_\Lambda$ e $dz = \pi^*(\eta)$ (perché $(u \circ \pi)^*(\frac{dX}{Y}) = \frac{d\wp(z)}{\wp'(z)}$) su $\mathbb{C}$. Risulta allora che possiamo ricostruire il reticolo Λ tramite

$$\begin{aligned}\Lambda &= \left\{ \int_\gamma dz : \gamma \text{ cammino con estremi su } \Lambda \right\} \\ &= \left\{ \int_{\gamma'} \eta : \gamma' = \pi \circ \gamma \text{ cammino chiuso in } \mathbb{T}_\Lambda \right\} \\ &= \left\{ \int_{\gamma''} \alpha : \gamma'' = u \circ \pi \circ \gamma \text{ cammino chiuso in } \mathcal{C}_\Lambda \right\}\end{aligned}$$

a partire da $\mathcal{C}_\Lambda$. Allora abbiamo che la funzione definita da

$$\begin{aligned}v : \mathcal{C}_\Lambda &\longrightarrow \mathbb{T}_\Lambda \\ P &\longmapsto v(P) = \int_\gamma \alpha \pmod{\Lambda}\end{aligned}$$

ove γ è un qualunque cammino da $\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a P , è l'inversa di u . Poiché la suriettività di u è chiara da prima, basta mostrare che $v(u(z)) = z$ per ogni $z \in \mathbb{T}_\Lambda$ (e allora risulta che u è anche iniettiva, e v ne è l'inversa). Ora, se $P = u(z)$, risulta

$$v(P) = \int_\infty^{P=u(z)} \alpha = \int_0^z \eta = \int_0^z dz = z + \lambda \equiv z \pmod{\Lambda}$$

e cioè $v(u(z)) = z$.

- (10) conviene dimostrare, usando la funzione inversa v , che

$$P, Q, R \in \mathcal{C}_\Lambda \text{ sono allineati} \quad \text{se e solo se} \quad v(P) + v(Q) + v(R) \equiv 0 \pmod{\Lambda}.$$

Accettando il solo se, da $v(P) + v(Q) + v(R) \equiv 0 \pmod{\Lambda}$ e chiamando R' il terzo punto di $\mathcal{C}_\Lambda$ su $P \vee Q$, abbiamo anche $v(P) + v(Q) + v(R') \equiv 0 \pmod{\Lambda}$, da cui $v(R) \equiv v(R') \pmod{\Lambda}$, e infine $R = uvR = uvR' = R'$, per cui $P, Q, R(=R')$ sono allineati.

Per il viceversa, si ragiona così: per ogni retta $r(a, b, c) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$ (piano duale) consideriamo i tre punti $p(a, b, c), q(a, b, c), r(a, b, c)$ della intersezione con $\mathcal{C}_\Lambda$, e sia

$$\mu(a, b, c) = \int_{\infty}^{p(a,b,c)} \alpha + \int_{\infty}^{q(a,b,c)} \alpha + \int_{\infty}^{r(a,b,c)} \alpha$$

funzione sul piano duale a valori complessi. Se dimostriamo che ristretta ad ogni stella del piano $(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong) P^* \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{C})^*$ è funzione olomorfa, limitata e quindi costante, risulta identicamente nulla, poiché per $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ vale $0 + \Lambda$.

Per vedere che è olomorfa, consideriamo intorno ad ogni punto (in cui l'equazione della curva abbia derivata non nulla rispetto alla X) delle carte $x_i : D(0, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{C}_\Lambda$ tali che $\left(\frac{x_i^1(y)}{y}\right)$ descrivano i tre tratti di curva intorno a $p_0 = p(a_0, b_0, c_0), q_0 = q(a_0, b_0, c_0), r_0 = r(a_0, b_0, c_0)$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \mu(a, b, c) &= \int_{\infty}^{p(a,b,c)} \alpha + \int_{\infty}^{q(a,b,c)} \alpha + \int_{\infty}^{r(a,b,c)} \alpha \\ &= \int_{\infty}^{p_0} \alpha + \int_{\infty}^{q_0} \alpha + \int_{\infty}^{r_0} \alpha + \int_{p_0}^{p(a,b,c)} \alpha + \int_{q_0}^{q(a,b,c)} \alpha + \int_{r_0}^{r(a,b,c)} \alpha \\ &= \int_{\infty}^{p_0} \alpha + \int_{\infty}^{q_0} \alpha + \int_{\infty}^{r_0} \alpha + \int_0^{z_1} \frac{x'_1(y)}{y} dy + \int_0^{z_2} \frac{x'_2(y)}{y} dy + \int_0^{z_3} \frac{x'_3(y)}{y} dy \end{aligned}$$

che sono integrali di funzioni olomorfe in y per il teorema del Dini (si osservi che y divide $x'_i(y)$ per ogni i : perché?). $\square$

3.3.3. PROBLEMA. Analogamente al punto (8), o usandolo, si studino le relazioni funzionali che coinvolgono $\wp''(z)$.

3.3.4. Perché nella definizione di $\wp$ la sommatoria è indicata su $\Lambda \setminus \{0\}$?

3.3.5. STRUTTURA DI GRUPPO. Si osservi che l'ultimo punto può essere interpretato anche dicendo che le “formule di addizione” per $\wp$ e $\wp'$ (cioè espressioni per $\wp(z_1 + z_2)$ e $\wp'(z_1 + z_2)$ in termini di $\wp(z_1), \wp(z_2), \wp'(z_1), \wp'(z_2)$) corrispondono a quelle per le coordinate X e Y della legge di gruppo delle curve ellittiche; anche se estremamente contaccioso, una verifica diretta di questo è possibile, e dà un'altra dimostrazione del risultato.

3.3.6. STRUTTURA DI $\mathcal{M}(\mathbb{T})$. Sapendo che per le curve algebriche il campo delle funzioni meromorfe è dato dal campo quoziente dell'anello delle coordinate, possiamo concludere che $\mathcal{M}(\mathbb{T}) \cong \mathbb{C}(\wp, \wp')$, con $\wp$ trascendente su $\mathbb{C}$, e $\wp'$ algebrica di grado 2 su $\mathbb{C}(\wp)$.

3.3.7. PUNTI DI TORSIONE SU TORO E CURVA ELLITTICA. L'identificazione toro-curve ellittica permette di capire meglio la struttura di gruppo delle curve ellittiche, visto che sul toro l'operazione è semplicemente il quoziente della addizione di $\mathbb{C}$. Per esempio:

- (1) vi sono esattamente 4 punti di 2-torsione;
- (2) vi sono esattamente 9 punti di 3-torsione (e corrispondono ai 9 flessi della curva ellittica; se ne ricordi la configurazione, e la si confronti con la posizione nel toro...);
- (3) per ogni n , vi sono esattamente n^2 punti di n -torsione.

3.4. THETA DI RIEMANN E FUNZIONI MEROMORFE. Per studiare le funzioni meromorfe sul toro, conviene studiare il toro $\mathbb{T}_\tau$ (ricordiamo che è definito per $\Im(\tau) > 0$, e il reticolo è $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$); abbiamo già detto che a meno di isomorfismo tutti i tori sono di questa forma. Ricordiamo anche che le funzioni sul toro si identificano con funzioni sul piano complesso che siano periodiche sul reticolo.

3.4.1. FUNZIONE THETA DI RIEMANN. La serie di Fourier

$$\vartheta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z)$$

converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ ($\mathbb{H}$ è il semipiano di $\mathbb{C}$ con parte immaginaria positiva: si dice semipiano di Poincaré), e dunque definisce una funzione olomorfa $\vartheta : \mathbb{C} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$.

Infatti, ogni compatto K di $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$ è contenuto in un insieme del tipo

$$U_{\varepsilon, c} = \{(z, \tau) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H} : \Im(\tau) > \varepsilon, \Re(z) < c\}$$

con $\varepsilon, c \in \mathbb{R}_{>0}$. Ora, per ogni $(z, \tau) \in U_{\varepsilon, c}$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}$ risulta

$$\begin{aligned} |\exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z)| &= |\exp(\pi i n^2 \tau)| |\exp(2\pi i n z)| \\ &= \exp(-\pi \Im(\tau))^{n^2} \exp(-2\pi \Im(z))^n \\ &< \exp(-\pi \varepsilon)^{n^2} \exp(2\pi |\Im(z)|)^{|n|} \\ &< \exp(-\pi \varepsilon)^{n^2} \exp(2\pi c)^{|n|} \end{aligned}$$

e considerando che $\exp(-\pi \varepsilon)^{-n}$ tende a ∞ per $n \rightarrow \infty$, abbiamo che esiste n_0 tale che $\exp(-\pi \varepsilon)^{-n_0} > \exp(2\pi c)$, e possiamo concludere la stima con

$$< \exp(-\pi \varepsilon)^{n^2 - |n|n_0}.$$

Considerando allora la serie di Fourier abbiamo che

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=-N}^N \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z) \right| &\leq \sum_{n=-N}^N |\exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z)| \\ &\leq 1 + 2 \sum_{n=1}^N \exp(-\pi \varepsilon)^{n^2 - n n_0} \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^N (\exp(-\pi \varepsilon)^{n - n_0})^n \end{aligned}$$

e basta considerare che $\exp(-\pi \varepsilon)^{n - n_0} < \exp(-\pi \varepsilon) < 1$ per $n > n_0$. $\square$

3.4.2. Si osservi che la theta di Riemann non è periodica sul reticolo Λ_τ , e quindi non definisce una funzione sul toro $\mathbb{T}_\tau$; altrimenti sarebbe intera e limitata su $\mathbb{C}$, quindi costante.

3.4.3. COMPORTAMENTO SUL RETICOLO. La variazione di theta sul reticolo Λ_τ generato da 1 e τ è descritta da:

- (i) $\vartheta(z + 1, \tau) = \vartheta(z, \tau)$ (periodica rispetto ad 1);
- (ii) $\vartheta(z + \tau, \tau) = \exp(-\pi i \tau - 2\pi i z) \vartheta(z, \tau)$ (quasi-periodica, a meno di un fattore esponenziale, rispetto a τ);
- (iii) $\vartheta(z + m\tau + n, \tau) = \exp(-\pi i m^2 \tau - 2\pi i m z) \vartheta(z, \tau)$.

Le verifiche si fanno tramite calcoli diretti sui termini, passando poi alla somma: per la prima

$$\exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n(z + 1)) = \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z) \exp(2\pi i n) = \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z),$$

per la seconda

$$\begin{aligned} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n(z + \tau)) &= \exp(\pi i (n + 1)^2 \tau - 2\pi i n \tau - \pi i \tau + 2\pi i (n + 1)z - 2\pi i z + 2\pi i n \tau) \\ &= \exp(\pi i (n + 1)^2 \tau + 2\pi i (n + 1)z) \exp(-\pi i \tau - 2\pi i z), \end{aligned}$$

e per la terza basta usare induzione su m :

$$\begin{aligned} \vartheta(z + m\tau + n, \tau) &= \vartheta(z + m\tau, \tau) \\ &= \exp(-\pi i \tau - 2\pi i (z + (m - 1)\tau)) \vartheta(z + (m - 1)\tau, \tau) \\ &= \exp(-\pi i \tau - 2\pi i (z + (m - 1)\tau)) \exp(-\pi i (m - 1)^2 \tau - 2\pi i (m - 1)z) \vartheta(z, \tau) \\ &= \exp(-\pi i m^2 \tau - 2\pi i m z) \vartheta(z, \tau) \end{aligned}$$

$\square$

3.4.4. ZERI DELLA THETA. Osserviamo prima di tutto che la funzione (di z) data da

$$\exp(-\pi i m^2 \tau - 2\pi i m z)$$

è olomorfa invertibile (mai nulla) di $\mathbb{C}$, e di conseguenza dalle formule precedenti risulta che per ogni $P \in \mathbb{C}$ si ha

$$\text{ord}_P \vartheta(z + m\tau + n, \tau) = \text{ord}_P \vartheta(z, \tau)$$

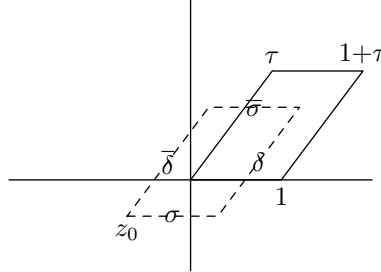
ovvero per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$ si ha

$$\text{ord}_{z_0 + m\tau + n} \vartheta(z, \tau) = \text{ord}_{z_0} \vartheta(z, \tau)$$

cosicché, se z_0 è zero di ordine e , allora ogni elemento di $z_0 + \Lambda_\tau$ è zero di ordine e .

Gli zeri di $\vartheta(z, \tau)$ sono tutti e soli i punti dell'insieme $\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} + \Lambda_\tau$, e sono tutti di ordine 1.

Per la verifica, poiché la theta non ha poli, basta usare l'indicatore logaritmico: se γ è contorno di un parallelogrammo fondamentale di vertici $z_0, z_0 + 1, z_0 + 1 + \tau, z_0 + \tau$ che eviti gli zeri di $\vartheta(z, \tau)$, possiamo scrivere nell'ordine $\gamma = \sigma + \delta + \bar{\sigma} + \bar{\delta}$ (quattro lati su cui integrare).



Poiché

$$\frac{\vartheta'(z+1, \tau)}{\vartheta(z+1, \tau)} = \frac{\vartheta'(z, \tau)}{\vartheta(z, \tau)} \quad \text{e} \quad \frac{\vartheta'(z+\tau, \tau)}{\vartheta(z+\tau, \tau)} = -2\pi i + \frac{\vartheta'(z, \tau)}{\vartheta(z, \tau)}$$

abbiamo che

$$\int_{\bar{\delta}} \frac{\vartheta'(z, \tau)}{\vartheta(z, \tau)} dz = - \int_{\delta} \frac{\vartheta'(z+1, \tau)}{\vartheta(z+1, \tau)} dz = - \int_{\delta} \frac{\vartheta'(z, \tau)}{\vartheta(z, \tau)} dz$$

e

$$\int_{\bar{\sigma}} \frac{\vartheta'(z, \tau)}{\vartheta(z, \tau)} dz = - \int_{\sigma} \frac{\vartheta'(z+\tau, \tau)}{\vartheta(z+\tau, \tau)} dz = \int_{\sigma} 2\pi i dz - \int_{\sigma} \frac{\vartheta'(z, \tau)}{\vartheta(z, \tau)} dz$$

da cui risulta infine che l'indicatore logaritmico vale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\vartheta'(z, \tau)}{\vartheta(z, \tau)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} 2\pi i dz = [z]_{z_0}^{z_0+1} = 1$$

e dunque c'è un solo zero all'interno di γ .

Per localizzare lo zero, osserviamo prima di tutto che theta è pari in z , cioè $\vartheta(-z, \tau) = \vartheta(z, \tau)$, e quindi l'unico zero a deve essere tale che $a \equiv -a \pmod{\Lambda_\tau}$ (altrimenti ci sarebbero due zeri in un dominio fondamentale), e dunque lo zero va cercato tra i punti di 2-torsione di $\mathbb{T}_\tau$, e vi sono quattro possibilità: $0, \frac{1}{2}, \frac{\tau}{2}, \frac{1+\tau}{2}$. Poniamo

$$\begin{aligned} \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau) &= \exp\left(\pi i \frac{\tau}{4} + \pi i \left(z + \frac{1}{2}\right)\right) \vartheta\left(z + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}, \tau\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

e mostriamo che si tratta di una funzione dispari, cioè $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(-z, \tau) = -\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau)$, cosicché l'unico suo zero è in 0, e l'unico zero di $\vartheta(z, \tau)$ nel dominio fondamentale risulta esattamente $\frac{1+\tau}{2}$. Infatti:

$$\exp\left(\pi i \frac{\tau}{4} + \pi i \left(z + \frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n \left(z + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)\right) = \exp\left(\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{2}\right)\right)$$

da cui, scambiando z con $-z$, e poi $n + \frac{1}{2}$ con $-m - \frac{1}{2}$, si ottiene

$$\begin{aligned} \exp\left(\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(-z + \frac{1}{2}\right)\right) &= \exp\left(\pi i \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i \left(-m - \frac{1}{2}\right) \left(-z + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(\pi i \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i \left(m + \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(-2\pi i \left(m + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= -\exp\left(\pi i \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \tau + 2\pi i \left(m + \frac{1}{2}\right) \left(z + \frac{1}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

e infine sommando si ha la disparità voluta. $\square$

3.4.5. FATTORI AUTOMORFI. Dalla dimostrazione precedente sappiamo allora come costruire una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ avente zeri semplici su tutti i punti dell'insieme $z_0 + \Lambda_\tau$; infatti basta usare la funzione traslata

$$\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(z_0)}(z, \tau) = \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z - z_0, \tau).$$

Controlliamo per questa funzione gli effetti delle traslazioni sul reticolo:

$$\begin{aligned}
 \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(z_0)}(z + m\tau + n, \tau) &= \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z - z_0 + m\tau + n, \tau) \\
 &= \exp\left(\pi i \frac{\tau}{4} + \pi i \left(z - z_0 + m\tau + n + \frac{1}{2}\right)\right) \vartheta\left(z - z_0 + m\tau + n + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}, \tau\right) \\
 &= \exp\left(\pi i \frac{\tau}{4} + \pi i \left(z - z_0 + m\tau + n + \frac{1}{2}\right)\right) \exp\left(-\pi i m^2 \tau - 2\pi i m \left(z - z_0 + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}\right)\right) \vartheta\left(z - z_0 + \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}, \tau\right) \\
 &= \exp(\pi i n - \pi i m - \pi i m^2 \tau - 2\pi i m z) \exp(2\pi i m z_0) \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(z_0)}(z, \tau)
 \end{aligned}$$

ove si sono distinti i fattori indipendenti da z_0 .

3.4.6. TEOREMA DI STRUTTURA DI $\mathcal{M}(\mathbb{T}_\tau)$. Se $x_1, \dots, x_r$ e $y_1, \dots, y_r$ sono elementi di $\mathbb{C}$ tali che $\sum_i x_i - \sum_i y_i \in \mathbb{Z}$, allora la funzione definita da

$$\varphi(z) = \frac{\prod_i \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(x_i)}(z, \tau)}{\prod_i \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(y_i)}(z, \tau)}$$

è meromorfa su $\mathbb{C}$, periodica su Λ_τ , e quindi definisce una funzione meromorfa su $\mathbb{T}_\tau$ avente zeri nell'insieme $\{x_1, \dots, x_r\}$ e poli nell'insieme $\{y_1, \dots, y_r\}$.

Viceversa, ogni funzione $f \in \mathcal{M}(\mathbb{T}_\tau)$ è del tipo precedente.

La prima parte dell'enunciato discende dal calcolo fatto dei fattori di olomorfia per le funzioni theta traslate (la condizione sulle traslazioni permette di semplificare i fattori che vi dipendono). Per la seconda parte dimostriamo che:

dati $P_1, \dots, P_r$ e $Q_1, \dots, Q_r$ in $\mathbb{T}_\tau$ (non necessariamente distinti), esiste una funzione $f \in \mathcal{M}(\mathbb{T}_\tau)$ avente zeri nei P_i e poli nei Q_i se e solo se $\sum_i P_i - \sum_i Q_i = 0$ (somma sul toro $\mathbb{T}_\tau$), ovvero se e solo se esistono rialzamenti $x_1, \dots, x_r$ e $y_1, \dots, y_r$ in $\mathbb{C}$ tali che $\sum_i x_i - \sum_i y_i = 0$.

La sufficienza è già stata dimostrata; per la necessità ragioniamo così: se $\sum_i P_i - \sum_i Q_i \neq 0$, scegliamo P_0 e Q_0 tali che $(P_0 + \sum_i P_i) - (Q_0 + \sum_i Q_i) = 0$. Se g è meromorfa con zeri in $P_1, \dots, P_r$ e poli in $Q_1, \dots, Q_r$ (ipotesi assurda), e f è meromorfa con zeri in $P_0, P_1, \dots, P_r$ e poli in $Q_0, Q_1, \dots, Q_r$ (sappiamo costruirla usando le theta traslate), allora f/g sarebbe funzione meromorfa sul toro con un solo zero, ed un solo polo, ma allora darebbe un isomorfismo del toro con la sfera di Riemann, che è assurdo. $\square$

3.4.7. Si osservi che sul toro non esistono funzioni meromorfe con un solo polo: perché? E perché non è possibile ottenerne con rapporti di funzioni theta?

3.4.8. ALTRA COSTRUZIONE PER $\mathcal{M}(\mathbb{T}_\tau)$. Il teorema per $\mathcal{M}(\mathbb{T}_\tau)$ appena esposto può essere visto come analogo del teorema di struttura per funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann, come rapporto di polinomi (dello stesso grado, se omogenei). Analogamente alla espressione delle funzioni razionali come somme di frazioni parziali, anche nel caso del toro possiamo esprimere ogni funzione meromorfa come somma di derivate prime logaritmiche delle theta traslate. Precisamente, se $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ con $\sum_i \lambda_i = 0$, allora

$$\sum_i \lambda_i \frac{d}{dz} \log \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{(a_i)}(z, \tau)$$

è periodica sul reticolo Λ_τ , dunque definisce una funzione meromorfa sul toro $\mathbb{T}_\tau$, con poli semplici in a_i e residui λ_i . Di nuovo in questo modo si ottiene tutto $\mathcal{M}(\mathbb{T}_\tau)$.

3.4.9. WEIERSTRASS IN FUNZIONE DI RIEMANN. Il modo più semplice per ottenere la funzione di Weierstrass in termini delle theta di Riemann, è di notare che $\log \vartheta(z, \tau)$ è periodica sul reticolo a meno di una funzione lineare nella z ; quindi la derivata seconda

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \vartheta(z, \tau)$$

definisce una funzione meromorfa sul toro; in effetti la funzione

$$-\frac{d^2}{dz^2} \log \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau)$$

differisce per una costante da $\wp(z)$.

3.4.10. IMMERSIONI PROIETTIVE VIA THETA. Analogamente a quanto fatto per $\vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau)$, definiamo per $a, b \in \mathbb{C}$ le funzioni

$$\begin{aligned}\vartheta_{a,b}(z, \tau) &= \exp(\pi i a^2 \tau + 2\pi i a(z+b)) \vartheta(z+a\tau+b, \tau) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\pi i (n+a)^2 \tau + 2\pi i (n+a)(z+b) \right).\end{aligned}$$

Allora l'applicazione

$$\varphi: \mathbb{T}_\tau \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \quad z \longmapsto \begin{pmatrix} \vartheta_{0,0}(z, \tau) \\ \vartheta_{0, \frac{1}{2}}(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{2}, 0}(z, \tau) \\ \vartheta_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(z, \tau) \end{pmatrix}$$

è una immersione di $\mathbb{T}_\tau$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ che identifica il toro con la curva data dalla intersezione delle due quadriche di equazioni

$$\vartheta_{0,0}(0)^2 X_0^2 = \vartheta_{0, \frac{1}{2}}(0)^2 X_1^2 + \vartheta_{\frac{1}{2}, 0}(0)^2 X_2^2 \quad \text{e} \quad \vartheta_{0,0}(0)^2 X_3^2 = \vartheta_{\frac{1}{2}, 0}(0)^2 X_1^2 - \vartheta_{0, \frac{1}{2}}(0)^2 X_2^2$$

(di che quadriche si tratta?).

La dimostrazione di questo fatto non è semplice, e si basa sulle relazioni di Riemann per le theta. Si può vedere nel primo volume dei “Tata on Theta” di Mumford.

3.5. SPAZIO DI MODULI DEI TORI COMPLESSI. Vogliamo ora studiare l'insieme di tutti i tori, e rispondere all'ovvio problema di classificazione: dire quando due tori sono isomorfi (biolomorfi) e trovare uno spazio che dia rappresentanti per ogni classe di isomorfismo.

3.5.1. Abbiamo già osservato (e anche usato) che per ogni reticolo $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, il toro $\mathbb{T}_\Lambda$ è isomorfo ad un toro $\mathbb{T}_\tau$ il cui reticolo è dato da $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ con $\tau \in \mathbb{H}$. Questo risultato è facile, poiché la moltiplicazione per $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ è un isomorfismo di $\mathbb{C}$, e se manda un reticolo Λ in un reticolo Λ' , allora dà un isomorfismo $\mathbb{T}_\Lambda \rightarrow \mathbb{T}_{\Lambda'}$ (con inverso indotto dalla moltiplicazione per $1/\alpha$). Nel caso in questione possiamo usare $\alpha = 1/\omega_1$ se $\text{im}(\omega_2/\omega_1) > 0$ (altrimenti si scambiano preventivamente ω_1 e ω_2).

Resta quindi da vedere quando due tori del tipo $\mathbb{T}_\tau$ con $\tau \in \mathbb{H}$ risultano tra loro biolomorfi.

3.5.2. TEOREMA. Siano $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$; allora $\mathbb{T}_\tau$ e $\mathbb{T}_{\tau'}$ sono biolomorfi se e solo se $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Il se è facile, poiché le uguaglianze

$$k\tau' = a\tau + b \quad \text{e} \quad k = c\tau + d$$

danno che la mappa di moltiplicazione per k in $\mathbb{C}$ invia Λ' in Λ , dando quindi una mappa olomorfa $\mathbb{T}_{\tau'} \rightarrow \mathbb{T}_\tau$. Per simmetria si ottiene la mappa inversa.

Per verificare il solo se, si procede così: dato $f: \mathbb{T}_\tau \rightarrow \mathbb{T}_{\tau'}$ biolomorfismo, si cerca un rialzamento $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ (cioè tale che $\pi' \circ F = f \circ \pi$: commuti con le proiezioni sui tori). L'esistenza locale di tali rialzamenti è chiara (per esempio sulle carte dei tori), ed è anche chiaro che due rialzamenti locali differiscono per una costante appartenente al reticolo Λ' ; quindi le derivate dei rialzamenti locali danno luogo ad una ben definita funzione F' su $\mathbb{C}$, e consideriamo F una primitiva di F' . Ora abbiamo $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $\pi' \circ F = f \circ \pi$, e quindi

$$\begin{cases} F(z+\tau') = F(z) + a\tau + b \\ F(z+1) = F(z) + c\tau + d \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} F'(z+\tau') = F'(z) \\ F'(z+1) = F'(z) \end{cases}$$

e quindi F' è costante (intera e limitata perché periodica), per cui $F(z) = \gamma z + \delta$ con $\gamma \neq 0$ e $\delta \in \Lambda'$, e possiamo usare $F(z) = \gamma z$. Allora le espressioni di prima diventano

$$\begin{cases} \gamma(z+\tau') = \gamma z + a\tau + b \\ \gamma(z+1) = \gamma z + c\tau + d \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \gamma\tau' = a\tau + b \\ \gamma = c\tau + d \end{cases}$$

e risulta che $\tau' = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. Per simmetria sulla funzione inversa abbiamo che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Z})$ (i.e. con determinante ± 1), ma considerando che $\Im(\tau') = \frac{ad-bc}{|a+b\tau|^2} \Im(\tau)$ otteniamo che il determinante è positivo, quindi 1. $\square$

3.5.3. TEOREMA DI STRUTTURA DELLO SPAZIO DI MODULI DEI TORI. Consideriamo il semipiano di Poincaré $\mathbb{H}$, e l'azione sinistra di $SL(2, \mathbb{Z})$ su $\mathbb{H}$ identificata nel teorema precedente:

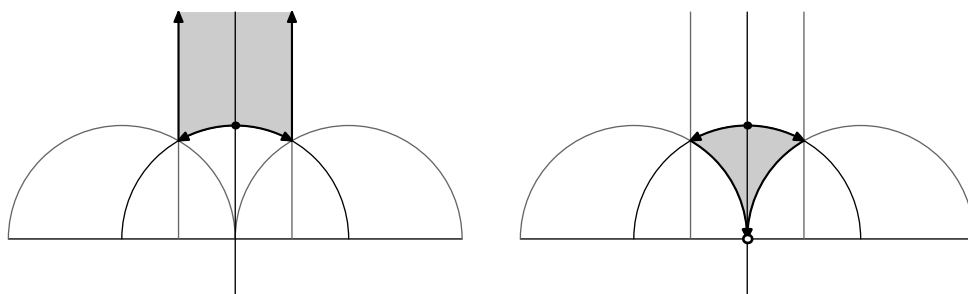
$$SL(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \quad \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tau \right) \longmapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Allora le classi di biolomorfia di tori complessi si identificano con i punti dello spazio quoziente $SL(2, \mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$.

Il risultato è solo una riscrittura del teorema precedente. Si noti che l'azione è sinistra, e quindi è classico scrivere il quoziente "a sinistra".

Vediamo invece meglio la forma dell'insieme quoziente.

3.5.4. Il gruppo $SL(2, \mathbb{Z})$ è moltiplicativamente generato dalle matrici $\varrho = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (traslazione reale: $\tau \mapsto \tau + 1$) e $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (controinversione: $\tau \mapsto -1/\tau$). Dunque l'insieme quoziente del teorema (lo spazio di moduli dei tori) può essere rappresentato da uno dei seguenti sottinsiemi di $\mathbb{C}$ (che si scambiano tra loro tramite σ):



soggetti ad opportune identificazioni dei bordi. Quali esattamente?

Da queste osservazioni si può concludere che lo spazio di moduli dei tori complessi è una SdR non compatta isomorfa a (un aperto di) $\mathbb{C}$, la cui compattificazione con un punto dà una sfera di Riemann (cioè una SdR di genere zero). Il punto di compattificazione va pensato come un caso limite e degenerare di toro, cioè l'unica superficie di Riemann di genere 0, che è la sfera.

4. Esempi: curve modulari.

4.0. PRELIMINARI. Il fatto che lo spazio che descrive le classi di isomorfismo di tori complessi sia un quoziente del semipiano di Poincaré sotto l'azione discreta di un gruppo, e quindi abbia esso stesso struttura di SdR, è una delle tante motivazioni per lo studio sistematico dei quozienti di $\mathbb{H}$ modulo sottogruppi discreti di $SL_2(\mathbb{R})$. Un'altra motivazione è data dal fatto che in questo modo si possono realizzare tutte le superficie di Riemann compatte di genere almeno 2 (che hanno come rivestimento universale il disco unitario).

Conviene osservare che l'azione di $GL_2(\mathbb{R})$ su $\mathbb{C}$ data dall'azione della matrice $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ su $\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$, ovvero $\alpha z = \frac{az+b}{cz+d}$ (matrici scalari agiscono identicamente), si restringe ad una azione di $GL_2^+(\mathbb{R})$ su $\mathbb{H}$ (stessa osservazione), e anche di $SL_2(\mathbb{R})$ su $\mathbb{H}$ (solo le matrici $\pm \mathbb{I}$ danno l'identità); questa azione fa di $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R}) / \pm \mathbb{I}$ il gruppo degli automorfismi di $\mathbb{H}$.

Inoltre, $\mathbb{H}$ stesso può essere visto come quoziente per una azione di gruppo: di consideri il sottogruppo $SO_2(\mathbb{R})$ di $SL_2(\mathbb{R})$: si vede facilmente che è lo stabilizzatore di $i \in \mathbb{H}$, e che l'azione di $SL_2(\mathbb{R})$ su $\mathbb{H}$ è transitiva (ogni $a + ib$ è immagine di i tramite una facile matrice). Quindi abbiamo $\mathbb{H} \cong SL_2(\mathbb{R}) / SO_2(\mathbb{R})$.

4.0.1. ALCUNI GRUPPI MODULARI. Tra i sottogruppi discreti Γ di $SL_2(\mathbb{R})$ più interessanti ci sono quelli di origine aritmetica:

- (0) il gruppo $SL_2(\mathbb{Z})$ già visto,
- (1) i sottogruppi (normali) $\Gamma(N) = \{\gamma : \gamma \equiv \mathbb{I} \pmod{N}\}$ di $SL_2(\mathbb{Z})$,
- (2) i sottogruppi (non normali) $\Gamma_1(N) = \{\gamma : \gamma \equiv T \pmod{N}\}$ di $SL_2(\mathbb{Z})$, ove T è matrice triangolare superiore con 1 in diagonale,

- (3) i sottogruppi (non normali) $\Gamma_0(N) = \{\gamma : \gamma \equiv T \pmod{N}\}$ di $SL_2(\mathbb{Z})$, ove T è matrice triangolare superiore.

L'interesse di questi gruppi dipende dal fatto che, siccome $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}$ classifica i tori complessi (cioè le curve ellittiche) a meno di isomorfismi, i quozienti $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ classificano i tori complessi dotati di qualche struttura supplementare:

- (1) $X(N) = \Gamma(N) \backslash \mathbb{H}$ parametrizza le curve ellittiche con una fissata base della parte di N -torsione,
- (2) $X_1(N) = \Gamma_1(N) \backslash \mathbb{H}$ parametrizza le curve ellittiche con un fissato punto di N -torsione,
- (3) $X_0(N) = \Gamma_0(N) \backslash \mathbb{H}$ parametrizza le curve ellittiche con un fissato sottogruppo ciclico di ordine N .

Infatti...

4.0.2. CLASSIFICAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI LINEARI FRATTE. Un elemento di $GL_2(\mathbb{C})$ diverso da $\pm I$ si dice parabolico, ellittico, iperbolico a seconda che abbia un unico punto unito, due punti uniti con rapporto degli autovalori di norma 1, reale positivo; o lossodromico altrimenti.

Un elemento di $SL_2(\mathbb{C})$ è parabolico, ellittico, iperbolico, lossodromico a seconda che la traccia sia ± 2 , reale di norma < 2 , reale di norma > 2 , non reale.

Un elemento di $SL_2(\mathbb{R})$ è parabolico, ellittico, iperbolico a seconda che abbia un solo punto unito in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, abbia un solo punto unito in $\mathbb{H}$ (l'altro il coniugato), abbia due punti uniti in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$; e non è mai lossodromico.

4.0.3. PUNTI ELLITTICI E CUSPIDI DI Γ . Sia d'ora in poi Γ un sottogruppo discreto di $SL_2(\mathbb{R})$ (indichiamo con $\bar{\Gamma}$ il quoziente con $\mathbb{R}^\times$); è elementare vedere che $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ è uno spazio di Hausdorff con la topologia indotta, e che può essere munito di un atlante olomorfo che ne fa una superficie di Riemann, ma non necessariamente compatta.

Diciamo punti ellittici i punti di $\mathbb{H}$ che sono punti uniti (unici) per qualche $\gamma \in \Gamma$ (ellittico, quindi), e diciamo cuspidi di Γ i punti di $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ che sono punti uniti (unici) per qualche $\gamma \in \Gamma$ (parabolico, quindi). Immagini per Γ di punti ellittici (risp. cuspidi) lo sono ancora.

Si vede facilmente che se Γ ha cuspidi, allora il quoziente $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ non è compatto.

Stabilizzatori di punti ellittici sono gruppi ciclici finiti (possiamo supporre, eventualmente coniugando, il punto sia i e allora $\Gamma_i = \Gamma \cap SO_2(\mathbb{R})$ è discreto quindi finito ciclico in $SO_2(\mathbb{R}) \cong S^1$), e stabilizzatori di cuspidi (modulo $\pm I$) sono gruppi ciclici infiniti (possiamo supporre, eventualmente coniugando, il punto sia ∞ e allora gli elementi dello stabilizzatore sono del tipo parabolico con ± 1 in diagonale).

4.1. SEMIPIANO ESTESO E QUOZIENTI. Definiamo $\mathbb{H}^*$ l'unione di $\mathbb{H}$ e delle cuspidi di Γ . Si noti che questo insieme dipende da Γ , anche se la notazione classicamente non ne tiene conto (!). Quindi $\mathbb{H}^*$ è sottinsieme di $\mathbb{H} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Vogliamo dare ad $\mathbb{H}^*$ una topologia Hausdorff: usiamo come base di intorni di ∞ (se c'è) i semipiani $\Im z > H$, e come base di intorni di $x \in \mathbb{R}$ il punto stesso unito ad un disco aperto tangente in x all'asse reale (per capire che questa definizione è sensata conviene pensare a come viene trasformato un intorno di base di ∞ usando una trasformazione che manda ∞ a 0 per esempio $-1/z$).

Intendiamo ora studiare il quoziente $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$, dandogli una struttura di SdR che estende quella di $\Gamma \backslash \mathbb{H}$. Diremo che Γ è fuchsiano (di prima specie?) se $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ è compatto. Se Γ e Γ' sono commensurabili (significa che l'intersezione ha indice finito in entrambi) allora hanno le stesse cuspidi, e un quoziente è compatto sse lo è l'altro.

4.1.1. TEOREMA. Il quoziente $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ è di Hausdorff, e per ogni punto $z \in \mathbb{H}^*$ esiste un intorno U_z tale che $\{\gamma \in \Gamma : \gamma U_z \cap U_z \neq \emptyset\} = \Gamma_z$ (stabilizzatore di z in Γ).

L'atlante su $\Gamma \backslash \mathbb{H}^*$ ottenuto usando quello di $\Gamma \backslash \mathbb{H}$ e le seguenti carte:

- per i punti di $\mathbb{H}$ che hanno uno stabilizzatore ciclico di ordine n si trova un isomorfismo di $\Gamma_z \backslash U_z$ con $\langle e^{2i\pi/n} \rangle \backslash D$ e si usa $t \rightarrow t^n$ verso $\mathbb{C}$,
- per le cuspidi, si può supporre che sia ∞ , e si usa $t \rightarrow e^{2i\pi t}$ verso $\mathbb{C}$,

dà una struttura di Superficie di Riemann.

4.1.2. ESEMPIO: $X(1) = X_0(1) = SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H}^*$ È LA SFERA DI RIEMANN. In effetti, possiamo vedere che le cuspidi per $SL_2(\mathbb{Z})$ sono ∞ e tutti i punti razionali $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, tutti equivalenti tra di loro (per l'azione di $SL_2(\mathbb{Z})$), e abbiamo già visto che questo quoziente è compatto e dà luogo ad una SdR di genere 0.

Per successivo uso, vediamo anche quali sono i punti ellittici per $SL_2(\mathbb{Z})$: si tratta di due punti:

$i = e^{i\pi}$, di ordine 2 e con stabilizzatore $\bar{\Gamma}_i$ dato da $\mathbb{I}$ e $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;
 $\varrho = e^{2i\pi/3}$, di ordine 3 e con stabilizzatore $\bar{\Gamma}_\varrho$ dato da $\mathbb{I}$, $\tau\sigma$ e $(\tau\sigma)^2$ con $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.2. CALCOLO DEL GENERE. In generale è assai difficile calcolare il genere di $X(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathbb{H}^*$, e il metodo più naturale è cercare di applicare la formula di Riemann-Hurwitz: se $\Gamma' \leq \Gamma$ abbiamo una mappa suriettiva $f : X(\Gamma') \rightarrow X(\Gamma)$ che è un rivestimento ramificato di grado $\deg(f) = (\bar{\Gamma} : \bar{\Gamma}')$ e con molteplicità $m_z(f) = (\bar{\Gamma}_z : \bar{\Gamma}'_z)$ (ovvii abusi).

4.2.1. SOTTOGRUPPI DI $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Se Γ è un sottogruppo di indice finito di $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, allora abbiamo un rivestimento ramificato della sfera $f : X(\Gamma) \rightarrow X(1) = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, ramificato solo sopra i, ϱ, ∞ , e detto $\mu = (\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) : \bar{\Gamma})$, ν_2 il numero di punti ellittici di ordine 2, ν_3 il numero di punti ellittici di ordine 3, ν_∞ il numero di cuspidi (inteso, tutti non equivalenti tra loro), risulta:

$$g = 1 + \frac{\mu}{12} - \frac{\nu_2}{4} - \frac{\nu_3}{3} - \frac{\nu_\infty}{2}.$$

Infatti, abbiamo ν_2 punti con molteplicità 1 sopra i , quindi $(\mu - \nu_2)/2$ punti con molteplicità 2, e il contributo alla ramificazione è $(\mu - \nu_2)/2$; poi abbiamo ν_3 punti con molteplicità 1 sopra ϱ , quindi $(\mu - \nu_3)/3$ punti con molteplicità 3, e il contributo alla ramificazione è $2(\mu - \nu_3)/3$; infine ci sono ν_∞ punti sopra ∞ , e quindi il contributo alla ramificazione è $\mu - \nu_\infty$ ($= \sum (m_i - 1) = \sum m_i - \sum 1$). Infine basta fare il conto di

$$g = 1 - \mu + \frac{\mu - \nu_2}{4} + \frac{\mu - \nu_3}{3} + \frac{\mu - \nu_\infty}{2}.$$

4.2.2. CASI DI $X(N)$. Dalla sequenza esatta

$$1 \longrightarrow \Gamma(N) \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \longrightarrow 1,$$

dalle note riduzioni per $N = \prod_p p^{e_p}$ (potenze di primi distinti)

$$\mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \cong \prod_p \mathbb{Z}/p^{e_p}\mathbb{Z}, \quad \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \cong \prod_p \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^{e_p}\mathbb{Z}), \quad \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \cong \prod_p \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{e_p}\mathbb{Z}),$$

e dalla sequenza esatta

$$1 \longrightarrow K \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^{e_p}\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow 1$$

abbiamo che:

K ha ordine $p^{4(e_p-1)}$,

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ ha ordine $(p^2 - 1)(p^2 - p) = p^4(1 - \frac{1}{p^2})(1 - \frac{1}{p})$,

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p^{e_p}\mathbb{Z})$ ha ordine $p^{4(e_p-1)}(p^2 - 1)(p^2 - p) = p^{4e_p}(1 - \frac{1}{p^2})(1 - \frac{1}{p})$,

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/p^{e_p}\mathbb{Z})$ ha ordine $p^{3e_p}(1 - \frac{1}{p^2})$,

da cui si ottiene infine l'ordine di $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ è $(\Gamma(1) : \Gamma(N)) = N^3 \prod_p (1 - \frac{1}{p^2}) = N\varphi(N)\psi(N)$, dove $\varphi(N) = N \prod_p (1 - \frac{1}{p})$ è la funzione di Eulero, e $\psi(N) = N \prod_p (1 + \frac{1}{p})$.

Ora, se $N = 2$ abbiamo $-\mathbb{I}_2 \in \Gamma(2)$, altrimenti $-\mathbb{I}_2 \notin \Gamma(N)$, e ne segue che

$$\mu(N) = (\bar{\Gamma}(1) : \bar{\Gamma}(N)) = \begin{cases} 6 & \text{se } N = 2 \\ \frac{1}{2}N\varphi(N)\psi(N) & \text{se } N > 2 \end{cases}.$$

Non ci sono punti ellittici per $\Gamma(N)$ ($\nu_2 = \nu_3 = 0$), mentre le cuspidi sono in numero $\nu_\infty = \mu(N)/N$ (per normalità sono tutte della stessa ramificazione, e $N = (\bar{\Gamma}(1)_\infty : \bar{\Gamma}(N)_\infty)$), quindi usando la formula generale abbiamo

$$g(X(N)) = 1 + \mu(N) \frac{N-6}{12N} = 1 + \frac{N-6}{24} \varphi(N)\psi(N).$$

In particolare possiamo calcolare:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} N = & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & \dots \\ g = & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 5 & 10 & 13 & 26 & 25 & 50 & 49 & 73 & 81 & 133 & \dots \end{array}$$

4.2.3. CASI DI $X_0(N)$. Questo caso è decisamente più complicato, ma si può trovare nel libro di Shimura.

5. Esempi: superficie di germi di funzioni.

5.0. PREAMBOLO. Idea di base di Riemann era di studiare i prolungamenti di funzioni analitiche lungo dei cammini e trovare il massimo dominio in cui una funzione può essere definita. Ragionando nel caso molto semplice della radice quadrata in $\mathbb{C}$ per esempio, si capisce facilmente che un tale dominio non è necessariamente un aperto del piano complesso: infatti tramite prolungamento analitico di una determinazione della radice lungo un circuito che avvolga 0 (per esempio partendo da 1 e usando la circonferenza unitaria) di ritorna al punto di partenza con un'altra determinazione della radice. L'idea quindi è di pensare di “aver cambiato foglio” per definire un dominio più grande in cui la radice sia una funzione ben definita e non “multivoca”.

5.1. PROBLEMA UNIVERSALE. Possiamo porre il problema in questo modo: dato un germe di funzione (U, f) dove U è un aperto di $\mathbb{C}$ e f è una funzione meromorfa su U ($f : U \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ olomorfa), determinare una superficie di Riemann S “più grande possibile” dotata di due mappe e di una inclusione (aperta olomorfa) j di U in S

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & & j \downarrow & & \\ \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 & \xleftarrow{v} & S & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \end{array}$$

tale che pj sia l'inclusione di U in $\mathbb{C}$, e $vj = f$. Una tale S (in realtà tutta la struttura (S, p, v, j)) viene chiamata la Superficie di Riemann associata al germe di funzione (U, f) .

Germi di funzione significa che consideriamo uguali due tali dati (U, f) e (V, g) se abbiamo $U \cap V \neq \emptyset$ ed $f = g$ ristrette a $U \cap V$; significa dare delle funzioni definite su qualche aperto, non specificato (ma non vuoto).

5.1.1. Vi sono vari atteggiamenti possibili per formalizzare il problema e la sua soluzione, e i principali sembrano due.

Il primo (Narasimhan, Cassa) è di definire uno spazio che contenga i germi di funzioni olomorfe, introdurre una topologia e un atlante olomorfo, e poi dichiarare che la superficie di un germe olomorfo è la componente connessa di questo spazio che lo contiene; questo atteggiamento ha lo svantaggio che allo spazio così definito bisogna aggiungere dei punti “limite”, che poi a posteriori si riconoscono per essere delle serie di Puiseux invece che sviluppi olomorfi.

Il secondo (Reyssat) è di definire uno spazio che contenga i germi di serie di Puiseux (convergenti in qualche aperto), introdurre una topologia e un atlante olomorfo, e poi dichiarare che la superficie di un germe olomorfo è la componente connessa di questo spazio che lo contiene; questo atteggiamento ha lo svantaggio che lo spazio iniziale va definito usando una relazione di equivalenza che tenga conto delle diverse determinazioni delle radici che si scelgono quando si sviluppa una serie di Puiseux.

In ogni caso si dimostra il seguente teorema:

5.1.2. TEOREMA. Per ogni germe di funzione meromorfa f , esiste una superficie universale X_f per f , e X_f è compatta se e solo se f è algebrica su $\mathbb{C}(z)$ (z coordinata locale in cui è scritta f), cioè esiste un polinomio $P(z, Y)$ che si annulla identicamente in f : $P(z, f(z)) = 0$.

5.1.3. È appena il caso di far notare che ogni superficie di Riemann si ottiene con questo procedimento?

6. Esempi: curve algebriche complesse.

6.1. CURVE NON SINGOLARI. Ogni curva algebrica proiettiva piana non singolare è una SdR compatta: un atlante olomorfo si può ottenere applicando intorno ad ogni suo punto il teorema del Dini della funzione implicita. Le funzioni di transizione sono chiaramente olomorfe, poiché si riducono all'identità o alla stessa funzione implicita.

Questo si può generalizzare alle curve algebriche proiettive lisce, e una delle tante conseguenze del teorema di Riemann-Roch è che in questo modo si ottengono tutte le SdR compatte (a meno di isomorfismi), anche usando solo $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ (ma non $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$).

6.1.1. GENERI. Per curve lisce di grado d in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ conosciamo il genere; per curve in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^3$ vi è un seminario Bourbaki di Hartshorne:

(1) se la curva è contenuta in una quadrica, allora $d = a + b$ con $g = (a - 1)(b - 1)$, e per ogni a, b interi positivi esiste una tale curva;

(2) se la curva non è contenuta in un piano o una quadrica, allora $g \leq d(d - 3)/6$ e tutte tali coppie (d, g) sono possibili.

6.1.2. FUNZIONI OLOMORFE E MEROMORFE. Trattandosi di SdR compatte, le funzioni olomorfe sono solo le costanti, mentre le funzioni meromorfe sono in corrispondenza con il corpo delle frazioni di $\mathbb{C}[X, Y]/(f)$ ove $f = f(X, Y)$ è una equazione per la curva data.

6.2. CURVE IRRIDUCIBILI SINGOLARI. Allo stesso modo, data una curva proiettiva piana irriducibile, fuori dei punti singolari è possibile costruire un atlante olomorfo, e quindi ottenere per la curva escluse le singolarità una struttura di SdR non compatta. Per un miglior risultato, si consideri il capitolo successivo.

Teorema di normalizzazione (desingularizzazione).

In questo capitolo esplicheremo uno degli esempi cui abbiamo solo accennato nel capitolo precedente: ogni curva proiettiva liscia è una superficie di Riemann compatta (questo discende essenzialmente dal teorema del Dini), e ad ogni curva proiettiva irriducibile (non necessariamente liscia) è associata una SdR compatta che differisce dalla curva solo nei punti singolari, e al posto di ciascuno di essi presenta un numero finito di punti.

Se la curva proiettiva di partenza è razionale, chiaramente la sfera di Riemann ne è una desingularizzazione (corrispondenza biolomorfa fuori della singolarità, e ogni punto singolare è raggiunto da un numero finito di valori del parametro). Questo da un lato ci dice che una curva proiettiva è razionale se e solo se (la SdR associata) è di genere zero; dall'altro lato ci permette di vedere il procedimento di “desingularizzazione” come una tecnica di “parametrizzazione” di curve algebriche tramite i punti di una SdR compatta, generalizzando la parametrizzazione di una curva razionale tramite la sfera di Riemann.

Inseriamo in questo capitolo anche due argomenti non strettamente pertinenti: la descrizione topologica delle singolarità di curve algebriche piane tramite nodi, e un cenno alla tecnica algebrica di risoluzione delle singolarità tramite blow-up (che ha il vantaggio di rimanere sempre nell'ambito delle curve algebriche).

0. Strategie di desingularizzazione.

0.1. STRATEGIE DI DESINGULARIZZAZIONE. Il problema di associare ad ogni curva algebrica una “curva” non singolare che ne sia il più possibile vicina si può affrontare in almeno tre modi sostanzialmente diversi:

0.1.1. VIA SDR. Come abbiamo appena accennato, si desingularizza una curva algebrica tramite una SdR compatta, che è un oggetto analitico, a priori. Poi vedremo come conseguenza del teorema di Riemann-Roch che ogni SdR compatta si realizza come curva algebrica liscia in qualche spazio proiettivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ (anche con $n = 3$, ma non necessariamente con $n = 2$, come già sappiamo). Quindi alla fine si dispone di una desingularizzazione di una curva algebrica tramite un'altra curva algebrica.

0.1.2. VIA TRASFORMAZIONI GEOMETRICHE. Un altro metodo per desingularizzare curve algebriche consiste nell'utilizzare alcune trasformazioni (essenzialmente algebriche, come blow-up e trasformazioni quadratiche) per ottenere una curva algebrica non singolare modificando il minimo possibile la curva di partenza. Si tratta di metodi che hanno il vantaggio di rimanere in un ambito di curve algebriche, ma sono più difficili.

0.1.3. VIA CURVE ASTRATTE. Un ulteriore metodo è del tutto astratto, e consiste nel definire le curve astratte come la collezione di tutti i sottoanelli di valutazione discreta (e il cui corpo quoziente sia l'intero corpo) di un corpo di trascendenza 1 sul corpo di base. Allora ad ogni curva proiettiva (irriducibile) $\mathcal{C}$ resta associato il suo “anello delle coordinate” $K[\mathcal{C}] = K[X, Y]/(f(X, Y))$ e il suo corpo quoziente $K(\mathcal{C})$ (“corpo delle funzioni razionali”), e dunque la curva astratta formata dagli anelli di valutazione discreta di $K(\mathcal{C})$ contenenti $K[\mathcal{C}]$. A tale insieme, dotato della topologia di Zariski (aperti sono i cofiniti), si può poi dare una realizzazione come curva proiettiva liscia in qualche spazio proiettivo.

0.1.4. VIA ALGEBRICA. Il motivo profondo per cui i procedimenti recedenti portano a risultati essenzialmente equivalenti, ovvero che il processo di desingularizzazione di una curva algebrica sia essenzialmente canonico, si può capire meglio da un punto di vista algebrico. Una curva algebrica $\mathcal{C}$ è liscia se e solo se il suo anello di coordinate $K[\mathcal{C}]$ è integralmente chiuso nel suo corpo dei quozienti $K(\mathcal{C})$ (significa che ogni polinomio monico a coefficienti nell'anello se ha soluzioni nel campo quoziente allora ha soluzioni nell'anello: per esempio $\mathbb{Z}$ è integralmente chiuso in $\mathbb{Q}$). Ora ad ogni anello integro

si può associare la sua chiusura integrale nel suo campo dei quozienti: si tratta di un anello integro (avente lo stesso campo dei quozienti) che si dice il normalizzato. Di conseguenza alla curva algebrica $\mathcal{C}$ possiamo associare la curva algebrica $\tilde{\mathcal{C}}$ corrispondente al normalizzato di $K[\mathcal{C}]$; dalla inclusione di anelli corrisponde una mappa tra le curve $\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ (nel verso opposto) che dà la risoluzione.

Questo procedimento si può fare anche in dimensione maggiore di 1, ma in generale la normalizzazione ha la proprietà geometrica di avere eventuali singolarità in codimensione strettamente maggiore di 1: nel caso di curve significa che non c'è singolarità, ma già nel caso di superficie dice solo che non vi sono curve singolari (ma possono esservi punti isolati singolari: risolvere questi richiede ulteriori procedimenti).

1. Struttura locale delle singolarità.

1.1. TEOREMA DI STRUTTURA LOCALE DEI PUNTI SINGOLARI. Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica proiettiva piana complessa, P un punto m -uplo di $\mathcal{C}$, e si sia scelto un riferimento proiettivo tale che $\mathcal{C}$ non abbia tangenti verticali in P . Allora esiste un intorno (analitico del piano) U di P , della forma $U = D_1 \times D_2$ con D_1 e D_2 dischi aperti, tale che la proiezione $\pi_1 : U \cap \mathcal{C} \rightarrow D_1$ sia rivestimento ramificato con esattamente m fogli, e P sia l'unico punto di ramificazione.

Infatti, fuori di P si può usare direttamente il teorema del Dini. Per $P = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, applichiamo l'indicatore logaritmico su una equazione $f(x, y)$ di $\mathcal{C}$ e sul bordo di D_2 : eventualmente restringendo D_2 e tenendo conto che in P c'è uno zero di molteplicità m risulta:

$$m - 1 < \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_2} d\log f(x, y) < m + 1$$

(si tratta di una funzione continua a valori interi che per $x = x_0$ vale m), quindi eventualmente restringendo D_1 e D_2 il valore è costantemente m . $\square$

1.1.1. PUNTI ISOLATI. Si osservi che dalla descrizione precedente si ottiene subito che una curva algebrica complessa non ha punti isolati (cosa che invece può succedere per il suo scheletro reale).

1.1.2. RAMI ANALITICI. Il teorema giustifica la definizione seguente: si dice ramo analitico di $\mathcal{C}$ in P il dato di:

un sottinsieme connesso B di $\mathcal{C}$ contenente P , avente P come (eventuale) unico punto singolare; una mappa olomorfa $s : A \rightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ con A aperto connesso di $\mathbb{C}$ contenente 0, $s(0) = P$, tale che: $s : A \rightarrow B$ sia omeomorfismo e $s : A \setminus \{0\} \rightarrow B \setminus \{P\}$ sia immersione di $A \setminus \{0\}$ in $U \setminus \{P\}$ ove U è un intorno di P in $\mathbb{A}^2(\mathbb{C})$.

Tali funzioni s si dicono parametrizzazioni del ramo analitico.

1.1.3. RAMI LINEARI. Dalla definizione segue che $\frac{ds}{dz}(z) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ per ogni $z \in A \setminus \{0\}$. Il ramo si dice lineare se $\frac{ds}{dz}(0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1.1.4. PARAMETRIZZAZIONI NORMALIZZATE. È facile notare che due parametrizzazioni di uno stesso ramo analitico differiscono per la composizione con una funzione olomorfa tra i domini di definizione. In particolare parleremo di parametrizzazione normalizzata quando si abbia s del tipo

$$\begin{pmatrix} s_1(z) \\ s_2(z) \end{pmatrix} = s(0) + \begin{pmatrix} z^m \\ O(z^m) \end{pmatrix}$$

(che si può sempre ottenere a partire da una qualunque parametrizzazione).

1.2. TEOREMA DI STRUTTURA ANALITICA DELLE SINGOLARITÀ ALGEBRICHE. Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica proiettiva piana complessa, P un punto m -uplo di $\mathcal{C}$. Allora esistono V intorno connesso di P in $\mathcal{C}$, $V = B_1 \cup \dots \cup B_k$ con $k \leq m$ dove i B_i sono rami analitici di $\mathcal{C}$ in P e ogni B_i è omeomorfo ad un disco di $\mathbb{C}$, con $B_i \cap B_j = \{P\}$ se $i \neq j$. Inoltre per ogni $V' \subseteq V$ si ha $V' = B'_1 \cup \dots \cup B'_k$ con $B'_i = V' \cap B_i$.

Usiamo $V = U \cap \mathcal{C}$ del teorema precedente, e decomponiamo $V^* = V \setminus \{P\}$ nell'unione disgiunta delle sue componenti connesse $V^* = B_1^* \sqcup \dots \sqcup B_k^*$ (dove certamente $k \leq n$). Per costruzione la proiezione $\pi_1 : B_i^* \rightarrow D_1^*$ è un rivestimento con k_i fogli, ove $\sum_i k_i = m$. Allora basta osservare che ogni $B_i = B_i^* \cup \{P\}$ è un ramo analitico di $\mathcal{C}$ in P . $\square$

1.2.1. RELAZIONE CON I RAMI ALGEBRICI. È facile osservare che la fattorizzazione tramite serie formali del polinomio (centrato nel punto singolare) che definisce i posti algebrici della curva

(e le loro parametrizzazioni) dà luogo a parametrizzazioni tramite serie formali convergenti, e quindi corrispondono ai rami analitici in quel punto. In particolare si ottiene una interpretazione topologica per i posti (algebrici) nel caso di curve complesse: corrispondono alle componenti connesse di un intorno bucato (cioè privato del punto) del punto singolare nella curva. Si osservi che ciò non può essere riconosciuto sullo scheletro reale della curva.

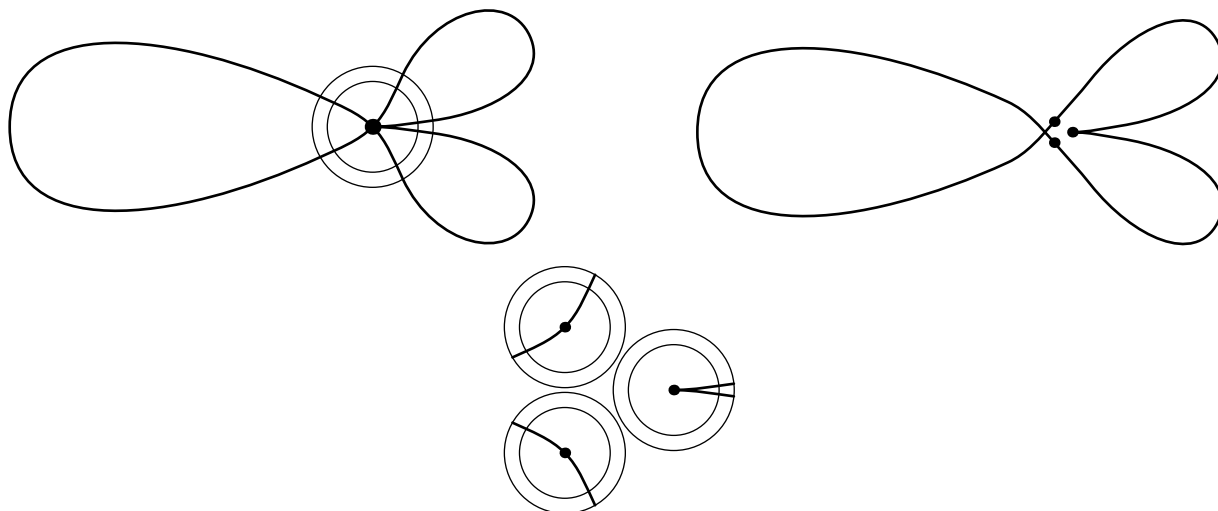
2. Teorema di desingularizzazione (via SdRc).

2.1. TEOREMA DI NORMALIZZAZIONE. Sia $\mathcal{C}$ una curva algebrica proiettiva piana complessa irriducibile. Allora esistono una SdR compatta $\tilde{\mathcal{C}}$ e una applicazione suriettiva $\mu : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ tali che

- (1) μ è biolomorfa fuori dei punti singolari di $\mathcal{C}$;
- (2) μ induce per ogni punto singolare P di $\mathcal{C}$ una biiezione tra i rami analitici di $\mathcal{C}$ in P e i punti di $\tilde{\mathcal{C}}$ con immagine P .

Inoltre $\tilde{\mathcal{C}}$ gode della proprietà universale relativa a μ , cioè fattorizza unicamente ogni altra coppia $\tilde{\mathcal{C}}', \mu'$ con le stesse proprietà, e quindi è unica a meno di biolomorfismi.

Si tratta di scegliere per ogni punto singolare due intorni, uno contenuto, nell'altro per cui valga la descrizione fatta della struttura della singolarità (decomposizione in rami analitici), sostituire ogni ramo con rivestimenti ramificati standard, e incollare i nuovi aperti al resto della superficie usando la corona tra i due intorni. L'immaginazione può tornare utile:



Dal procedimento è chiaro come ottenere un atlante per $\tilde{\mathcal{C}}$, e anche la funzione μ . L'unica proprietà che è difficile da provare è il fatto che $\tilde{\mathcal{C}}$ sia connessa (e dipende dal fatto che $\mathcal{C}$ è irriducibile). $\square$

2.1.1. CONNESSIONE DELLA DESINGOLARIZZATA. Vi sono essenzialmente due strategie possibili per dimostrare che $\tilde{\mathcal{C}}$ è connessa. La prima è di mostrare che una sconnessione di $\mathcal{C}$ porta alla riducibilità di $\mathcal{C}$ stessa: usando la fattorizzazione in serie formali della equazione di $\mathcal{C}$ in un punto singolare, la sconnessione permette di dividere i fattori in due gruppi, ciascuno dei quali deve dar luogo ad un polinomio. La seconda strategia è di usare il corpo delle funzioni meromorfe di $\tilde{\mathcal{C}}$.

2.1.2. DESCRIZIONE DELLE FUNZIONI MEROMORFE. Dette x e y le proiezioni di $\mathcal{C}$ sui due assi affini usuali, risulta che

$$\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{C}}) \cong \mathcal{Q}(\mathbb{C}[x, y]) \cong \mathcal{Q}(\mathbb{C}[X, Y]/(f(X, Y))) \cong \mathcal{Q}_0(\mathbb{C}[X_0, X_1, X_2]/(F(X_0, X_1, X_2)))$$

se $f(X, Y)$ è una equazione affine per $\mathcal{C}$, e $F(X_0, X_1, X_2)$ ne è l'equazione proiettiva omogeneizzata.

Ora, su ogni componente connessa di $\tilde{\mathcal{C}}$, consideriamo la (restrizione della) funzione meromorfa x ; si tratta di un rivestimento ramificato di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ il cui numero di fogli è

$$\deg(x) = [\mathcal{M}(\tilde{\mathcal{C}}) : \mathbb{C}(x)] \geq [\mathbb{C}(x, y) : \mathbb{C}(x)] = n$$

(la disuguaglianza viene dal fatto che ogni componente connessa di $\tilde{\mathcal{C}}$ dà un rivestimento di $\mathcal{C}$, quindi $\mathbb{C}(x, y) \subseteq \mathcal{M}(\tilde{\mathcal{C}})$) da cui segue subito che vi è una unica componente connessa.

3. Applicazioni ed Esempi.

3.1. DEFINIZIONE DEL GENERE PER CURVE SINGOLARI. Il teorema di desingularizzazione giustifica la definizione, già data, del genere per una curva proiettiva singolare, e anche i metodi di calcolo che avevamo già adottato nel primo capitolo: sia tramite Riemann-Hurwitz, sia tramite Plücker.

Anzi, ora dovrebbe essere chiaro come studiare la ramificazione quando si proietta da un punto della curva stessa:...

3.2. TEOREMA DI BÉZOUT PER VIA ANALITICA. Le espressioni analitiche dei rami di una curva nei punti singolari permette una definizione di origine analitica (ma chiaramente coincidente con quella algebrica tramite i posti della curva) della molteplicità di intersezione di due curve in un punto. Siccome si tratta di sommare gli ordini nella variabile locale della sostituzione dei rami analitici di una curva nell'equazione dell'altra, questa definizione porta quasi subito ad una dimostrazione del teorema di Bézout.

3.3. ESEMPLI.

3.3.1. NODO. Per la cubica nodale di equazione $Y^2 = X^2(1 + X)$ sappiamo che l'unico punto singolare è l'origine con due rami lineari. Essendo razionale (genere zero) è normalizzata dalla sfera di Riemann tramite $\mu(t) = \begin{pmatrix} t^2-1 \\ t(t^2-1) \end{pmatrix}$ che presenta due punti distinti ($t = \pm 1$) sopra il punto singolare $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Considerando la proiezione della curva sull'asse delle ascisse, si tratta di un rivestimento con due fogli, e vi sono due punti di ramificazione: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e il punto improprio delle ordinate.

Considerando la proiezione sull'asse delle ordinate?

3.3.2. CUSPIDE. Per la cubica cuspidale di equazione $Y^2 = X^3$ sappiamo che l'unico punto singolare è l'origine con un unico ramo. Essendo razionale (genere zero) è normalizzata dalla sfera di Riemann tramite $\mu(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ che presenta un solo punto ($t = 0$) sopra il punto singolare $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Considerando la proiezione della curva sull'asse delle ascisse, si tratta di un rivestimento con due fogli, e vi sono due punti di ramificazione: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e il punto improprio delle ordinate.

Considerando la proiezione sull'asse delle ordinate?

3.3.3. IPERELLITTICHE. Distinguiamo i due casi:

- (1) grado pari: usiamo $Y^2 = X^{2m} - 1$, e per mettere nell'origine l'unico punto singolare consideriamo l'equazione $X^{2m} = Z^{2m-2}(1 - Z^2)$. Nel punto singolare vi sono due rami, ciascuno dei quali di ordine m .

Considerando la proiezione della curva sull'asse delle Z , si tratta di un rivestimento con $2m$ fogli, e vi sono due punti di ramificazione $2m - 1$, oltre ai due posti del punto singolare, ciascuno con ramificazione $m - 1$; quindi la ramificazione totale è $2(3m - 2)$ e il teorema di Riemann-Hurwitz dà genere $m - 1$.

Considerando la proiezione sull'asse delle X (attenzione: non è l'usuale rivestimento con 2 fogli, poiché non stiamo usando il piano affine X, Y)?

- (2) grado dispari: usiamo $Y^2 = X^{2m+1} - 1$, e per mettere nell'origine l'unico punto singolare consideriamo l'equazione $X^{2m+1} = Z^{2m-1}(1 - Z^2)$. Nel punto singolare vi è un solo ramo, di ordine $2m + 1$.

Considerando la proiezione della curva sull'asse delle Z , si tratta di un rivestimento con $2m + 1$ fogli, e vi sono due punti di ramificazione $2m$, oltre al posto del punto singolare, con ramificazione $2m$; quindi la ramificazione totale è $2(3m)$ e il teorema di Riemann-Hurwitz dà genere m .

Considerando la proiezione sull'asse delle X (attenzione: non è l'usuale rivestimento con 2 fogli, poiché non stiamo usando il piano affine X, Y)?

3.3.4. RIVESTIMENTI D'ORDINE d DI $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Per esercizio, studiare i casi di equazioni $Y^d = p(X)$ con $p(X)$ polinomio di grado maggiore di d , privo di zeri multipli.

3.3.5. ALTRI ESEMPLI. Si possono studiare le curve del primo capitolo.

4. Aspetto topologico delle singolarità (nodi algebrici).

4.1. In questa sezione presentiamo una suggestiva descrizione topologica delle singolarità complesse (conti e disegni vengono da un lavoro di tesi di V.Sala), che si basa su un teorema di Milnor:

4.1.1. TEOREMA DI MILNOR. Sia $O \in \mathcal{C}$, D un disco sufficientemente piccolo (in $\mathbb{C}^2$) centrato in O . Allora la coppia $(D, D \cap \mathbb{C})$ è topologicamente equivalente alla coppia $(D, \pi_O(K))$ formata da D e dalla proiezione da O dei punti di $K = \partial D \cap \mathcal{C}$.

Non dimostriamo questo teorema, ma lo usiamo per ridurre lo studio della curva $\mathcal{C}$ attorno ad un suo punto O allo studio del nodo $K = \partial D \cap \mathcal{C}$; parliamo di nodo in quanto si tratta di intersezione di una curva complessa (localmente una superficie) con il bordo ∂D del disco 4-dimensionale D , e quindi di tratta di una curva reale (immersa in ∂D , che è una sfera 3-dimensionale).

Per studiare K il primo approccio (Brauer, 1928) è stato quello di usare una proiezione stereografica per spostare il problema da ∂D al più visibile $\mathbb{R}^3$, ma questo ha lo svantaggio di richiedere molti calcoli che rendono poco leggibile il risultato. Poco dopo lo stesso problema viene studiato con risultati molto più chiari (Kähler) usando come intorno del punto un “disco rettangolare” (prodotto di due dischi in $\mathbb{C}$) invece del disco di $\mathbb{C}^2$, che semplifica in modo sorprendente la situazione.

4.1.2. DISCHI, SFERE E TORI. Usiamo liberamente l'omeomorfismo $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$, su cui possiamo usare l'usuale norma euclidea, oppure il massimo tra le norme euclidee delle due copie di $\mathbb{C}$ (ovvero di $\mathbb{R}^2$). Ne viene un omeomorfismo $D^4 \cong D^2 \times D^2$ (dischi euclidei in dimensione 4 e 2 rispettivamente), e possiamo scrivere la sfera bordo di D^4 come

$$\mathbb{S}^3 = \partial D^4 \cong \partial(D^2 \times D^2) \cong (\partial D^2 \times D^2) \cup (D^2 \times \partial D^2)$$

unione di due tori solidi, incollati scambiando meridiani e longitudini (ciascuno dell'altro). Un toro solido è uno spazio topologico omeomorfo a un prodotto $\mathbb{S}^1 \times D^2$, e ogni tale isomorfismo sarà chiamato un framing (ogni framing determina un meridiano $M = \{1\} \times \partial D^2$ e una longitudine $L = \mathbb{S}^1 \times \{1\}$); vedremo che la scelta di un meridiano è essenzialmente canonica, mentre quella della longitudine non lo è).

4.1.3. LINK E NODI TORICI, ED ITERATI. Si chiamano nodi (link) torici immagini omeomorfe di $\mathbb{S}^1$ (copie di $\mathbb{S}^1$, con immagini disgiunte) sulla superficie del toro. Ogni nodo torico è determinato dalla coppia di numeri coprimi (m, n) che indicano il numero di intersezioni con M ed L , oppure la classe di omologia $mM + nL$ (sulla superficie del toro): è (omeomorfo all')immagine della mappa $(\varphi, \psi) \mapsto (e^{im\varphi}, e^{in\psi})$. Vi sono isomorfismi naturali del tipo $(m, n) \cong (n, m)$, $(m, 1) \cong (m', 1)$, $(1, n) \cong (1, n')$. Un nodo torico iterato si ottiene usando un intorno tubolare (isomorfo ad un toro, quindi) di un nodo torico, o torico iterato, e costruendo un nodo torico sul suo bordo. I nodi torici iterati sono quindi determinati da una sequenza di coppie di numeri coprimi (questo non vale per i link torici (iterati): conta anche il modo in cui si legano tra loro i vari nodi che formano il link).

4.1.4. LINKING NUMBERS, MERIDIANI E LONGITUDINI. Dati due nodi possiamo definire il loro linking number in vari modi equivalenti, il più facile dei quali è fare la semisomma dei contributi delle intersezioni dei due nodi in un diagramma regolare orientato, dando segno positivo se l'ascissa passa sopra all'ordinata; equivalentemente, si può scegliere un generatore γ del gruppo di omologia di $\mathbb{S}^3$ tolto un nodo, e scrivere l'altro nodo come $n\gamma$ (n è il linking number); in modo più teorico, possiamo definirlo come il grado della mappa $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$ dato da $\frac{K-K'}{|K-K'|}$ se K, K' sono i due nodi (pensati come funzioni $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$).

Dato un toro (solido) possiamo definire in modo univoco il suo meridiano come una curva semplice chiusa sul bordo tale che sia (equivalentemente):

- (1) omologicamente (o omotopicamente) triviale nel toro,
- (2) bordo di un disco nel toro,
- (3) immagine tramite un framing di $\{1\} \times \partial D^2$,
- (4) omologicamente triviale nel toro e con linking number 1 con il centro del toro.

Definiamo come longitudine una curva semplice chiusa sul bordo del toro tale che sia (equivalentemente):

- (1) un generatore del gruppo fondamentale (o del gruppo di omologia) del toro solido,
- (2) con intersezione in un unico punto con qualche meridiano,

(3) immagine tramite un framing di $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$.

Queste condizioni non determinano univocamente una longitudine: sommare qualsiasi multiplo di un meridiano dà altre (e tutte) le longitudini. Ve ne sono in particolare tre che ci interesseranno per i significati geometrici:

(t) longitudine topologica: è determinata dall'essere omologicamente equivalente al centro del toro, e avere linking number 0 con esso;

(p) longitudine di Puiseux o verde: si può definire per un nodo contenuto in un toro solido con fissato framing $\mathbb{S}^1 \times D^2$, e si ottiene scegliendo una direzione fissata in D^2 , e spostando il nodo sul bordo di un suo intorno tubolare (torico) secondo quella direzione in ogni disco $\{t\} \times D^2$;

(n) longitudine di Newton o arancione: si può definire per un nodo K cablato attorno ad un altro H , e si ottiene spostando K radialmente da H verso il bordo di un suo intorno tubolare. Le relazioni tra i tre tipi di longitudini, quando definite, non sono banali: detta L la longitudine topologica, L'' quella verde, L' quella arancione, abbiamo $L'' \sim L + \ell(L'', K)M$ con $\ell(L'', K) = m(n-1)$, e $L' \sim L'' + mM$, cioè $\ell(L', K) - \ell(L'', K) = m$.

Spesso queste relazioni si possono leggere dai diagrammi dei noti torici sotto forma di trecce: si disegna il nodo sulla superficie di un cilindro (che poi dà luogo al toro per identificazione, senza rotazioni, dei due estremi): le immagini mostrano le longitudini verde e arancione di un intorno tubolare del nodo torico (5, 3):



Con qualche calcolo non banale si può vedere che un nodo torico iterato descritto dalle coppie

$(\alpha_1, \beta_1)(\alpha_2, \beta_2) \cdots (\alpha_k, \beta_k)$ in termini di longitudini topologiche,

$(m_1, n_1)(m_2, n_2) \cdots (m_k, n_k)$ in termini di longitudini di Puiseux,

$(q_1, p_1)(q_2, p_2) \cdots (q_k, p_k)$ in termini di longitudini di Newton,

vi sono le seguenti relazioni tra le coppie:

$$\beta_i = n_i = p_i;$$

$$\alpha_1 = m_1 = q_1,$$

$$\alpha_i = m_i - n_i m_{i-1} + \alpha_{i-1} n_{i-1} n_i = q_i + p_{i-1} p_i \alpha_{i-1},$$

$$m_i = \alpha_i + \beta_i m_{i-1} + \alpha_{i-1} \beta_{i-1} \beta_i = q_i + m_{i-1} p_i,$$

$$q_i = \alpha_i - \alpha_{i-1} \beta_i \beta_{i-1} = m_i - m_{i-1} n_i.$$

Per verificare queste relazioni conviene avere delle relazioni ricorsive per $\ell(L'', K)$; dalla treccia della longitudine verde si vede che per un nodo del tipo (m_1, n_1) si ha link number $d_1 = m_1(n_1 - 1)$ (n_1 è il numero di stringhe, m_1 il numero di massimi della treccia). Ad ogni cablaggio successivo $(m_1, n_1)(m_2, n_2) \cdots (m_k, n_k)$ si trova $d_i = d_{i-1} n_i^2 + m_i(n_i - 1)$ (le n_i stringhe del nodo cablato aumentano le intersezioni del caso precedente, e poi bisogna contare le intersezioni del nuovo cablato).

Ora per ottenere la formula per α_{i+1} si ragiona per induzione:

$$\begin{aligned} \alpha_i &= m_i + n_i d_{i-1} \\ &= m_i + n_i (d_{i-2} n_{i-1}^2 + m_{i-1} (n_{i-1} - 1)) \\ &= m_i + n_i (n_{i-1} (d_{i-2} n_{i-1} + m_{i-1}) - m_{i-1}) \\ &= m_i + n_i (n_{i-1} \alpha_{i-1} - m_{i-1}) \\ &= m_i + n_i n_{i-1} \alpha_{i-1} - m_{i-1} n_i \end{aligned}$$

(le altre sono più facili, o conseguenze).

4.1.5. NODI ALGEBRICI. Possiamo ora studiare che link disegna una curva algebrica sul bordo di un piccolo disco centrato in un suo punto, usando lo studio locale dei rami della curva in termini di parametrizzazioni formali (o di serie di Puiseux). Consideriamo prima il caso di un solo posto $\mathfrak{P}$ descritto dalla serie di Puiseux

$$y = c_1 x^{\frac{m_1}{n_1}} + c_2 x^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} + \cdots + c_k x^{\frac{m_k}{n_1 n_2 \cdots n_k}}$$

con le condizioni che gli esponenti siano crescenti e $\text{MCD}(m_i, n_i) = 1$. Parametrizzando $x(t) = \varepsilon e^{2\pi i t}$:

- (1) se vi è un solo termine, troviamo $y(t) = c_1 \varepsilon^{\frac{m_1}{n_1}} e^{2\pi i \frac{m_1}{n_1} t}$ e riconosciamo un nodo torico di tipo (m_1, n_1) con la longitudine di Puiseux.
- (2) se vi sono due termini, e supponiamo $n_2 > 1$, troviamo $y(t) = c_1 \varepsilon^{\frac{m_1}{n_1}} e^{2\pi i \frac{m_1}{n_1} t} + c_2 \varepsilon^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} e^{2\pi i \frac{m_2}{n_1 n_2} t}$ e siccome ε è piccolo e il secondo esponente maggiore del primo vediamo che il secondo termine disegna un nodo torico di tipo (m_2, n_2) su un intorno tubolare del nodo torico descritto al primo passo; quindi abbiamo un nodo torico iterato di tipo $(m_1, n_1)(m_2, n_2)$ (sempre con longitudine di Puiseux per i nodi). Se capita che $n_2 = 1$, allora il secondo nodo può essere deformato al primo, essendone semplicemente una piccola “perturbazione” (quindi potremmo trascurare i termini in cui il denominatore non aumenta per descrivere il nodo, ma nel caso dei link questo non sarà possibile, in quanto tali termini interferiscono con i numeri di linking).
- (3) in generale, ogni termine successivo determina un nodo torico che viene tracciato in un intorno tubolare del nodo (torico iterato) generato dai termini precedenti.

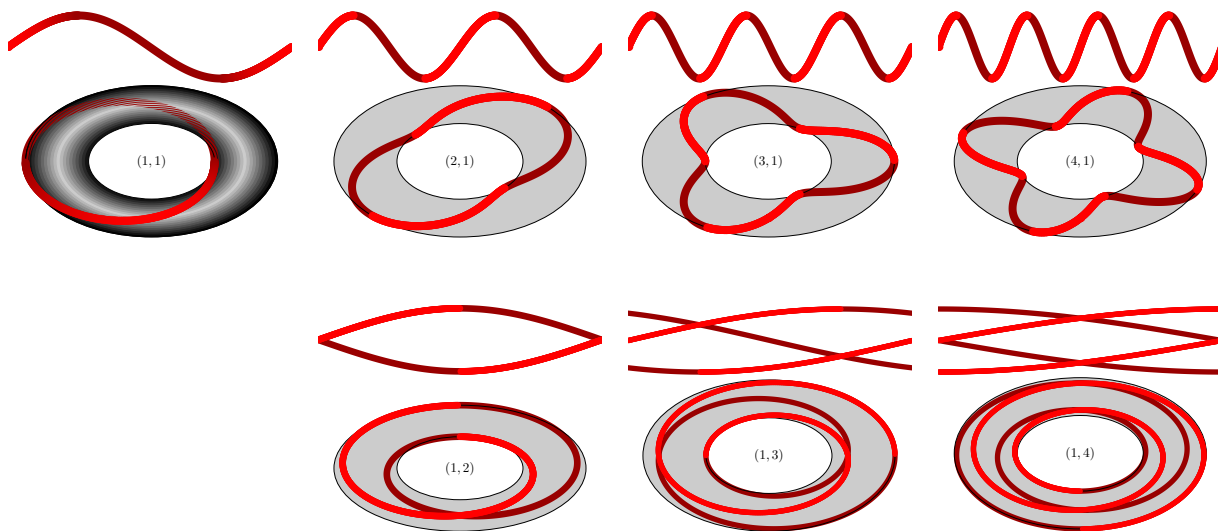
Se riscriviamo l’inizio della serie di Puiseux in termini di Newton (forma moltiplicativa):

$$y = x^{\frac{q_1}{p_1}} \left(a_1 + x^{\frac{q_2}{p_1 p_2}} (a_2 + \cdots + x^{\frac{q_{k-1}}{p_1 p_2 \cdots p_{k-1}}} (a_{k-1} + x^{\frac{q_k}{p_1 p_2 \cdots p_k}} (a_k)) \cdots) \right)$$

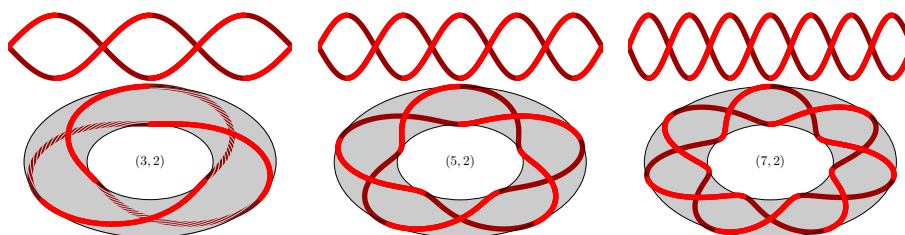
(le relazioni tra le coppie di Puiseux (m_i, n_i) e quelle di Newton (q_i, p_i) sono date da $p_i = n_i$ e $q_i = m_i - m_{i-1} n_i$) gli stessi ragionamenti permettono di riconoscere dei nodi torici iterati di tipo $(q_1, p_1)(q_2, p_2) \cdots (q_k, p_k)$ in termini di longitudini di Newton.

Per inciso, si osservi che mentre tutti i nodi torici sono nodi algebrici, non tutti i nodi torici iterati sono algebrici: per venire da uno sviluppo di Puiseux devono soddisfare ad ovvie condizioni: $m_i n_{i+1} < m_{i+1}$ (usando longitudini di Puiseux), ovvero $q_i > 0$ (usando longitudini di Newton), ovvero $\beta_i \alpha_i \beta_{i+1} < \alpha_{i+1}$ (usando longitudini topologiche).

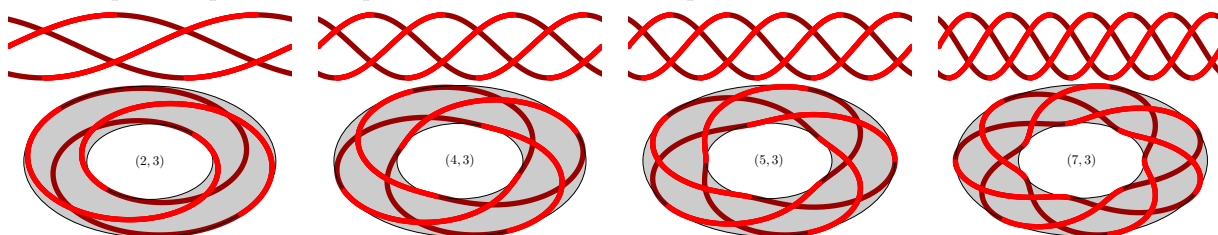
A titolo di esempio, le facili equazioni $y^n = x^m$ con m, n coprimi danno luogo a nodi torici di tipo (m, n) : per $n = 1$ o $m = 1$, abbiamo punti non singolari, sempre più flessi:



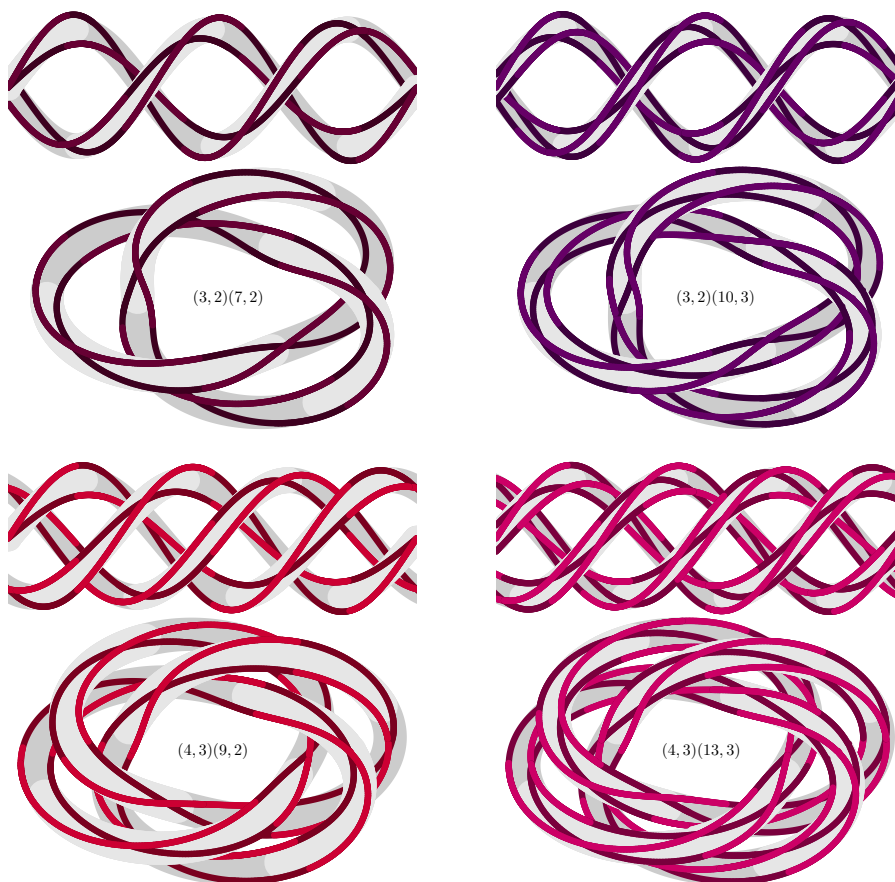
$n = 2$, abbiamo punti doppi, primo la cuspid:



$n = 3$, punti tripli, tranne il primo, altra forma della cuspidale:



Per avere nodi algebrici che siano torici iterati bisogna ricorrere ad equazioni più complicate, del tipo $(y^n - x^m)^p = x^q$ per avere un cablaggio; ma i nodi torici iterati più semplici che siano algebrici richiedono equazioni più difficili: per esempio il primo iterato del tipo $(3,2)(m,2)$ algebrico ha $m = 7$, quello del tipo $(3,2)(m,3)$ algebrico ha $m = 10$, quello del tipo $(3,2)(m,4)$ algebrico ha $m = 13$, quello del tipo $(4,3)(m,2)$ algebrico ha $m = 9$, quello del tipo $(4,3)(m,3)$ algebrico ha $m = 13$, ecc. Qualche disegno:



e

Consideriamo ora il caso di due posti $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ descritti dalle serie di Puiseux

$$y = c_1 x^{\frac{m_1}{n_1}} + c_2 x^{\frac{m_2}{n_1 n_2}} + \dots + c_k x^{\frac{m_k}{n_1 n_2 \dots n_k}}$$

$$y' = c'_1 x^{\frac{m'_1}{n'_1}} + c'_2 x^{\frac{m'_2}{n'_1 n'_2}} + \dots + c'_{k'} x^{\frac{m'_{k'}}{n'_1 n'_2 \dots n'_{k'}}}$$

con le solite condizioni. Parametrizzando $x(t)$ come prima:

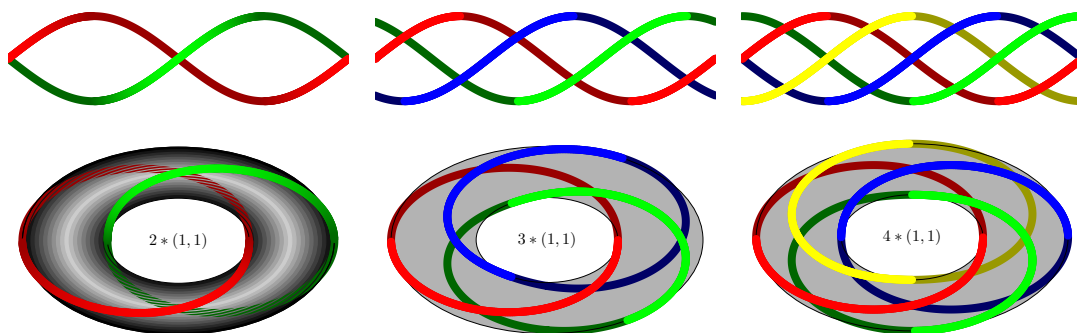
- (1) se le serie hanno un solo termine, abbiamo due nodi torici, ed essendo posti distinti non possiamo avere sia $m_1/n_1 = m'_1/n'_1$ sia $c_1 = c'_1$; se $m_1/n_1 \neq m'_1/n'_1$ (per esempio $>$) abbiamo che il nodo descritto da $\mathfrak{P}$ sarà su una superficie torica di raggio minore dell'altro; se invece $m_1/n_1 = m'_1/n'_1$ e $c_1 \neq c'_1$ i due nodi torici sono dello stesso tipo, ovviamente non si intersecano, stanno sulla stessa superficie torica o meno a seconda dei moduli dei coefficienti c_1, c'_1 siano uguali o meno, e comunque possono essere spostati su due tori uno interno all'altro indifferentemente.

- (2) nel caso generale, supponiamo che gli sviluppi siano uguali fino al termine h -esimo, e quindi entrambi i nodi siano cablati attorno allo stesso nodo torico iterato (quello dello sviluppo comune): ora se $m_h/n_h \neq m'_h/n'_h$ uno dei due nodi è interno all'altro, se invece $m_h/n_h = m'_h/n'_h$ e $c_h \neq c'_h$ allora i due nodi si possono pensare indifferentemente ciascuno interno all'altro; il caso in cui uno dei due sviluppi finisca con la parte comune dà luogo a un nodo di cui l'altro è un cablato.

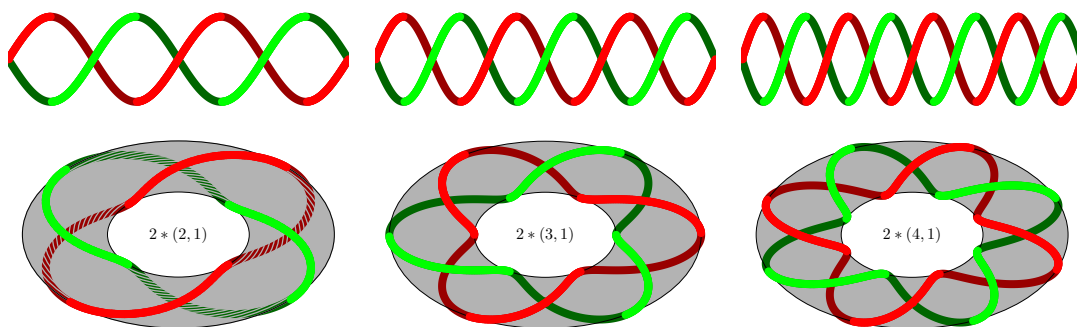
In particolare due espansioni potrebbero differenziarsi presso un termine con cablaggio $(m, 1)$, che è inessenziale per il tipo dei nodi, ma significativo per la costruzione del link.

In generale si può dimostrare che i link torici (e quelli algebrici) sono caratterizzati dalle sequenze delle coppie di cablaggio, e dai linking number di ogni coppia di componenti. Inoltre, nel caso dei link algebrici, il numero di linking di due componenti è pari alla molteplicità di intersezione dei due rami corrispondenti.

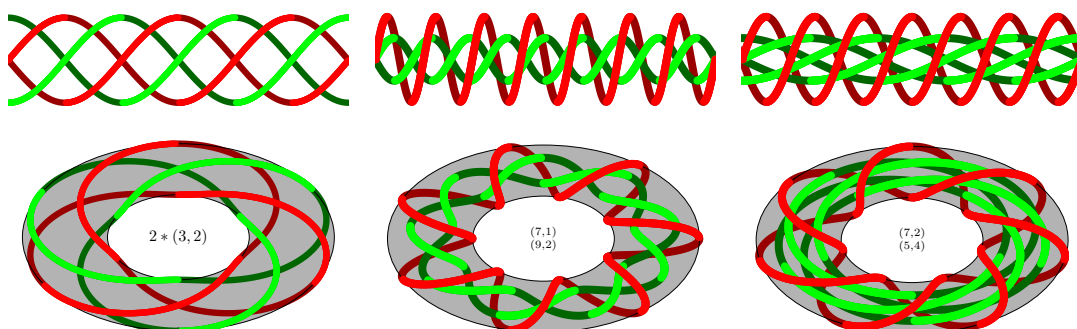
Gli esempi più semplici vengono dai link di circonferenze, cioè dai link dovuti ai punti ordinari del tipo $\prod (y - c_i x^{m_i}) = x^p y^q$: per $m_i = 1$



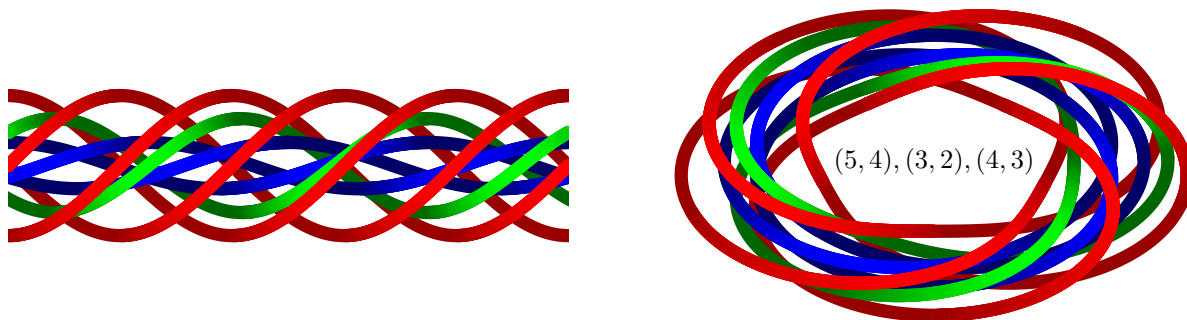
per due rami di flesso uguali abbiamo:



(questi esempi mostrano già che i tipi $(1, n)$ interferiscono con i linking numbers delle componenti). Per avere link di nodi più complicati si possono usare curve del tipo $\prod (y^{n_i} - c_i x^{m_i}) = x^p y^q$, per esempio con due rami:



Naturalmente si possono avere tutte le combinazioni possibili dei fenomeni precedenti, in generale link con più componenti formate da nodi torici iterati. Per esempio un punto con tre componenti potrebbe presentarsi così:



5. Teorema di desingularizzazione (via blow-up).

Facciamo una breve esposizione della strategia di desingularizzazione tramite trasformazioni geometriche (conti e disegni vengono da un lavoro di tesi di E.Cazzador).

5.1. BLOW-UPS DI SUPERFICIE E LORO GEOMETRIA. Euristicamente, un blow-up è una trasformazione geometrica che sostituisce un punto di una superficie con una retta proiettiva i cui punti parametrizzano le direzioni di curve passanti per il punto stesso.

5.1.1. Se P è un punto liscio di una superficie algebrica S , e x, y sono coordinate locali vicino al punto, possiamo identificare un intorno del punto P in S con un intorno dell'origine in $\mathbb{A}^2$ e costruire una superficie algebrica $S' \subseteq S \times \mathbb{P}^1$ formata dai punti $(x, y, (\xi, \eta))$ tali che $x\eta = y\xi$. Abbiamo allora una mappa π :

$$S \times \mathbb{P}^1 \supseteq S' \longrightarrow S$$

ottenuta dalla proiezione su S . L'antimmagine di P è formato da $\{P\} \times \mathbb{P}^1$, e si chiama divisore eccezionale E , mentre $S \setminus \{P\}$ corrisponde biettivamente a $S' \setminus E$. I punti del divisore eccezionale corrispondono alle direzioni tangenti in P ; nel caso $S = \mathbb{A}^2$ ogni retta passante per l'origine viene rialzata in una retta di S' che passa per il punto di E corrispondente alla direzione della retta.

5.1.2. In pratica conviene descrivere la nuova superficie con delle carte affini (il che permette facilmente di iterare il procedimento): se (x, y) sono coordinate affini di S (vicino a P), allora come coordinate affini (x_1, y_1) di S' vicino al punto $(0, 0, \binom{0}{1})$ possiamo usare

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = x_1 y_1 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y/x \end{cases} \quad (\text{equazione del divisore eccezionale } E : x_1 = 0)$$

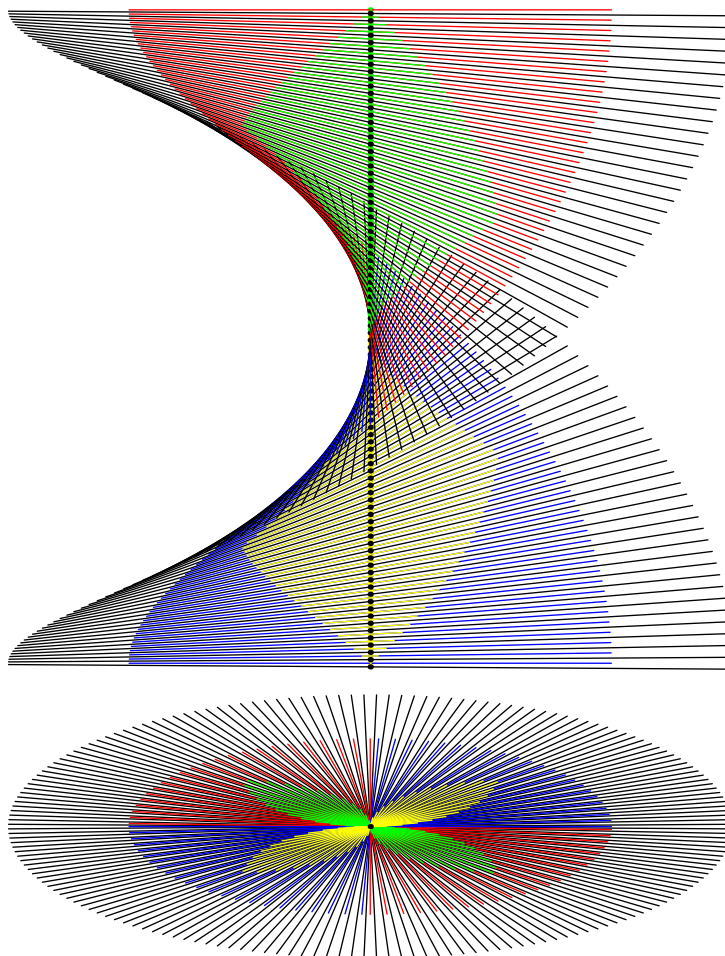
e vicino al punto $(0, 0, \binom{0}{1})$ possiamo usare

$$\begin{cases} x = x_1 y_1 \\ y = y_1 \end{cases} \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} x_1 = x/y \\ y_1 = y \end{cases} \quad (\text{equazione del divisore eccezionale } E : y_1 = 0)$$

5.1.3. La costruzione non dipende dalla scelta delle coordinate vicino a P . Si può vedere che le due superficie S ed S' sono simili in un modo molto preciso: contengono aperti di Zariski (complementari di zeri di polinomi) che sono isomorfi: si dice che le due superficie sono birazionalmente equivalenti.

Si può vedere la topologia reale del blow-up nel seguente disegno, che mostra anche la forma di un intorno di un punto sul divisore eccezionale, che corrisponde ad un doppio petalo attorno alla direzione di S a cui quel punto corrisponde (naturalmente, per fare il disegno nel foglio si è rappresentata la retta proiettiva sopra al punto scoppiato come un segmento, e la parte di blow-up rappresentata

andrebbe vista come un nastro di moebius identificando le rette in alto e in basso):



5.2. SEQUENZE DI BLOW-UPS DI SUPERFICIE. Con sequenza di blow-ups intendiamo una sequenza di scoppamenti di punti su superficie, in cui ad ogni passo si procede con lo scoppamento di un punto del divisore eccezionale proveniente dal blow-up precedente. Questo dà luogo ad una sequenza di superficie e morfismi:

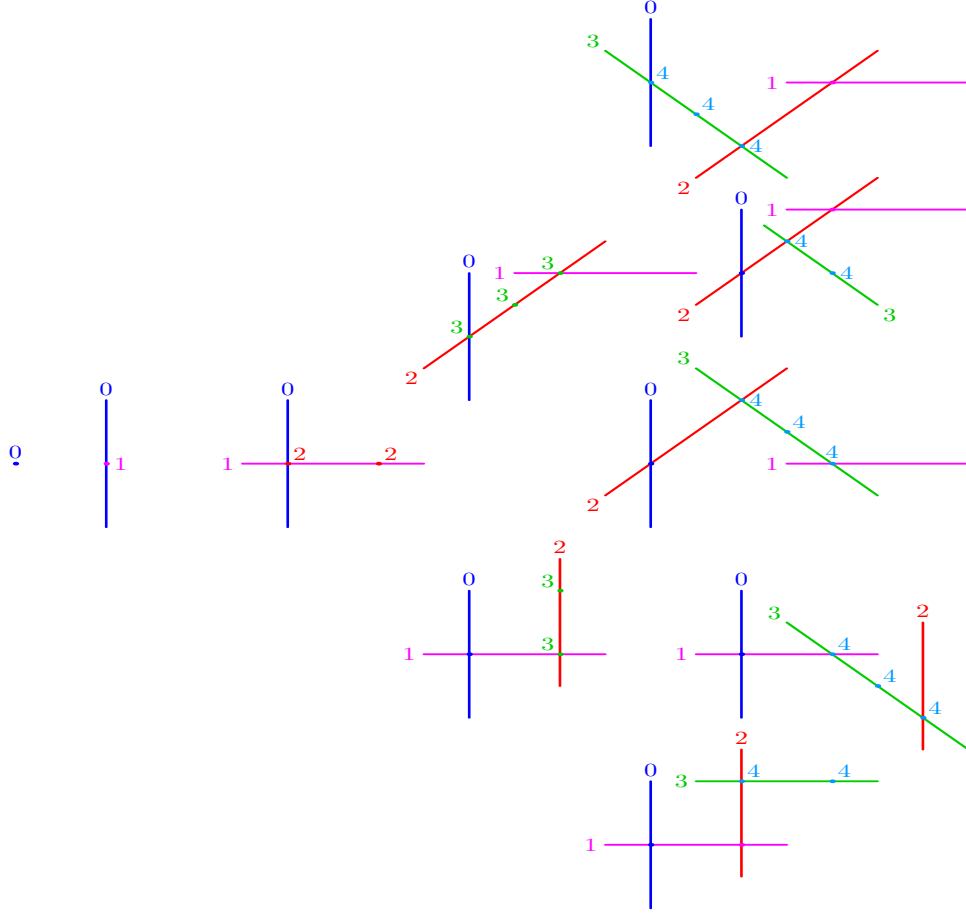
$$S_n \longrightarrow S_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_1 \longrightarrow S$$

e una sequenza $E_i \subseteq S_{i+1}$ di divisori eccezionali ottenuti scoppiando un punto $P_i \in E_{i-1}$ con le seguenti proprietà:

- (1) ogni E_i è isomorfo ad una retta proiettiva;
- (2) ogni E_i interseca (trasversalmente, cioè con molteplicità di intersezione 1, ovvero con tangenti distinte) E_{i-1} e al più un altro E_j con $j < i - 1$;
- (3) tre divisori eccezionali E_i non hanno mai un punto comune.

5.2.1. Di solito la sequenza di blow-ups viene rappresentata dall'albero formato dalla sequenza di divisori eccezionali: indichiamo qui di seguito le possibilità essenzialmente diverse per i primi quattro scoppamenti indicando anche nell'ultimo quali sono i casi di punti il cui scoppamento dà luogo a casi diversi. I casi particolari sono quelli in cui si decide di scoppiare un punto che sia intersezione di due divisori eccezionali; si osservi come l'ordine con cui si presentano i divisori eccezionali dipende essenzialmente da questo. Conviene anche provare a capire quanti casi diversi vengono, cercando di capire la combinatorica e come rappresentarla: per esempio i casi disegnati potrebbero essere descritti

dalle sequenze 0, 01, 012, 021, 0123, 0132, 0231, 02 $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, 0321 (e i 13 casi successivi?):



5.2.2. PUNTI INFINITAMENTE VICINI, PUNTI PROSSIMI. Nella situazione di una sequenza di blow-up si dice che i punti di E_i sono infinitamente vicini di ordine i a $P = P_0$ (in generale i punti di E_i si dicono il primo intorno infinitesimale di P_i).

Vi è una relazione più importante che è quella di prossimità: per $i > j$ un punto P_i si dice prossimo a P_j se P_i appartiene a E_j (in S_i). È quasi immediato verificare i seguenti fatti:

- (1) ogni P_i è sempre prossimo a P_{i-1} ;
- (2) un P_i è prossimo ad al più un P_j con $j < i - 1$;
- (3) se P_i è prossimo a P_j allora per ogni k tale che $j < k \leq i$ si ha che P_k è prossimo a P_j .

Le relazioni di prossimità per una sequenza di blow-ups possono essere rappresentate in una matrice triangolare superiore con 1 sulla diagonale principale, e -1 nella posizione j, i se P_i è prossimo a P_j (altrove tutto zero). Si tratta di matrici con determinante 1, con inverse a coefficienti interi naturali di cui vedremo il significato. I primi esempi di tali matrici (e loro inverse) sono:

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ & 1 & -1 \\ & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ & 1 & -1 & -1 \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ & 1 & -1 & -1 \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & 0 \\ & & 1 & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ & 1 & -1 & -1 & -1 \\ & & 1 & -1 & -1 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ & 1 & -1 & -1 & 0 \\ & & 1 & -1 & -1 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ & 1 & 1 & 1 & 2 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & 0 & 0 \\ & & 1 & -1 & 0 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & -1 & 0 \\ & & 1 & -1 & 0 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ & 1 & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & -1 & 0 \\ & & 1 & -1 & -1 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ & 1 & 1 & 2 & 3 \\ & & 1 & 1 & 2 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ & 1 & -1 & -1 & 0 \\ & & 1 & -1 & 0 \\ & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

5.3. TRASFORMATATA TOTALE E STRETTA DI UNA CURVA. Vediamo ora l'effetto di un blow-up su un posto di una curva. Sia $\mathcal{C}$ curva contenuta in S , P il punto da scoppiare, S' la superficie scoppiata e E il divisore eccezionale, $\pi : S' \rightarrow S$ lo scoppimento (dunque $\pi^{-1}(P) = E$ e $S' \setminus E \cong S \setminus \{P\}$).

È chiaro che se $P \notin \mathcal{C}$ allora π si restringe ad un isomorfismo tra $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ e $\mathcal{C}$. Altrimenti $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ (che diciamo trasformata totale di $\mathcal{C}$) contiene tutto il divisore eccezionale come componente. Definiamo allora la trasformata stretta $\mathcal{C}'$ di $\mathcal{C}$ come la chiusura di $\pi^{-1}(\mathcal{C} \setminus \{P\})$ in S' , o equivalentemente la chiusura di $\pi^{-1}(\mathcal{C}) \setminus E$ in S' (chiusura nel senso topologico, analitico o di Zariski).

Sia $f(x, y)$ una equazione di $\mathcal{C}$ vicino a P , e sia $\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} t^m \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ una parametrizzazione di un posto di $\mathcal{C}$ in P ($\text{ord}_t \varphi(t) \geq m$, la tangente è $y = 0$ se $\text{ord}_t \varphi(t) > m$, ed è $ax - y = 0$ se a è il coefficiente di t^m in $\varphi(t)$). Usando allora la carta affine $x = x_1$ e $y = x_1 y_1$ abbiamo che il divisore eccezionale ha equazione $x_1 = 0$, la trasformata totale di $\mathcal{C}$ ha equazione $f(x_1, x_1 y_1) = 0$, la trasformata stretta $\mathcal{C}'$ ha equazione che si ottiene eliminando il fattore x_1 , e la trasformata stretta del posto ha parametrizzazione $\mathfrak{P}' = \begin{pmatrix} t^m \\ t^{-m} \varphi(t) \end{pmatrix}$, centro in $x_1 = 0$, $y_1 = a$, molteplicità il minimo tra m e $\text{ord}_t \varphi(t) - m$, e tangente data da

$$\begin{cases} x_1 = 0 & \text{se } \text{ord}_t \varphi(t) < 2m, \\ bx_1 = y_1 & \text{se } \text{ord}_t \varphi(t) = 2m \text{ e } b \text{ è il coefficiente di } t^{2m} \text{ in } \varphi(t), \\ y_1 = 0 & \text{se } \text{ord}_t \varphi(t) > 2m. \end{cases}$$

Conviene sempre, nel seguito, supporre, eventualmente tramite un cambiamento lineare di coordinate locali, che i posti abbiano parametrizzazione del tipo $\begin{pmatrix} t^m \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ con $\text{ord}_t \varphi(t) > m$.

5.3.1. EFFETTI DEL BLOW-UP SU CURVE E POSTI. Da quanto detto seguono queste asserzioni:

- (1) se $\mathcal{C}$ è una curva liscia, allora $\mathcal{C}'$ è liscia isomorfa a $\mathcal{C}$ tramite π ;
- (2) se $P \in \mathcal{C}$ allora $\mathcal{C}'$ interseca E nei punti corrispondenti alle tangenti a $\mathcal{C}$ in P , e con molteplicità di intersezione con E pari alla molteplicità di quella tangente per $\mathcal{C}$;
- (3) se $\mathfrak{P}$ è posto di una curva, di centro P e molteplicità maggiore di 1, allora $\mathfrak{P}'$ è posto della trasformata stretta, di centro $P' \in E$ corrispondente alla tangente al posto originale, e abbiamo che: o $m_{\mathfrak{P}'} < m_{\mathfrak{P}}$ (la molteplicità del posto diminuisce, capita quando $\text{ord}_t \varphi(t) < 2m$) oppure $m_{\mathfrak{P}'} = m_{\mathfrak{P}}$ e $c_{\mathfrak{P}'} < c_{\mathfrak{P}}$ (la classe del posto diminuisce, ovvero diminuisce la molteplicità di intersezione con la tangente, capita quando $\text{ord}_t \varphi(t) > 2m$);
- (4) se $\mathfrak{P}$ e $\mathfrak{Q}$ sono posti di curve (eventualmente la stessa) di centro P , allora $\mathfrak{P}'$ e $\mathfrak{Q}'$ sono posti di curve in S' con centri (in E) diversi se i posti avevano tangenti diverse, con lo stesso centro P' altrimenti ma con molteplicità di intersezione strettamente diminuita: $m_{P'}(\mathfrak{P}', \mathfrak{Q}') < m_P(\mathfrak{P}, \mathfrak{Q})$.

5.3.2. TEOREMA DI DESINGOLARIZZAZIONE. Un insieme di divisori con le proprietà di intersecarsi trasversalmente e mai tre in uno stesso punto viene detto sistema di divisori a intersezione normale; per esempio i divisori eccezionali di una sequenza di blow-up formano un sistema di divisori a intersezione normale.

Applicando ripetutamente dei blow-up centrati nei posti singolari, e ragionando per induzione sulle molteplicità dei posti e sulle molteplicità di intersezione con le tangenti otteniamo la risoluzione di singolarità:

- (a) dato un posto $\mathfrak{P}$ di una curva, esiste una sequenza di blow-up tale che la trasformata stretta $\mathfrak{P}'$ è posto lineare, e la trasformata totale del posto tramite la sequenza forma un sistema di curve a intersezione normale; tale situazione rimane vera effettuando ulteriori scoppiamenti;
- (b) dato un punto P di una curva $\mathcal{C}$, esiste una sequenza di blow-up tale che la trasformata stretta di $\mathcal{C}$ è liscia nelle antimmagini del punto P , e la trasformata totale della curva tramite la sequenza forma un sistema di curve a intersezione normale; tale situazione rimane vera effettuando ulteriori scoppiamenti;
- (c) data una curva $\mathcal{C}$, esiste una sequenza di blow-up tale che la trasformata stretta di $\mathcal{C}$ è liscia, e la trasformata totale della curva tramite la sequenza forma un sistema di curve a intersezione

normale; tale situazione rimane vera effettuando ulteriori scoppamenti.

5.4. INVARIANTI DELLE SINGOLARITÀ. Per mostrare il teorema di desingularizzazione tramite blow-up basta procedere per induzione sulle molteplicità (dei posti e delle loro intersezioni con le tangenti), mentre per descrivere/classificare le singolarità è necessario indicare degli invarianti che le distinguono/classificano. Nel procedimento di desingularizzazione di un posto via blow-up entrano chiaramente in gioco certi esponenti della parametrizzazione del posto, e il procedimento stesso genera via via posti con proprietà sempre “meno singolari”. Vi sono vari modi equivalenti di descrivere una serie di invarianti sufficienti per classificare le varietà.

5.4.1. CARATTERISTICA DI PUISEUX. Dato un posto $\mathfrak{P} = \left(\frac{t^m}{\varphi(t)}\right)$ di ordine m , quindi con $\text{ord}_t \varphi(t) \geq m$, definiamo la caratteristica di Puiseux di $\mathfrak{P}$ come la sequenza

$$(m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$$

dove β_1 è il minimo esponente non divisibile per m con coefficiente non nullo in $\varphi(t)$, e $e_1 = \text{MCD}(m, \beta_1)$; poi per induzione: dove β_{i+1} è il minimo esponente non divisibile per e_i con coefficiente non nullo in $\varphi(t)$, e $e_{i+1} = \text{MCD}(e_i, \beta_{i+1})$; finché si arriva a $e_r = 1$.

In pratica, β_{i+1} è il primo esponente con coefficiente non nullo in $\varphi(t)$ che non appartiene al sottogruppo additivo di $\mathbb{Z}$ generato da $m, \beta_1, \dots, \beta_i$. I β_i insieme a m si chiamano esponenti caratteristici del posto, e sono il sistema minimale di generatori del sottomonoido di $\mathbb{N}$ generato dagli esponenti presenti nel posto. Che relazioni vi sono tra la caratteristica di Puiseux e le coppie di Puiseux usate per descrivere i nodi algebrici?

Un blow-up come sopra cambia la caratteristica di Puiseux del posto nel modo seguente:

$$(m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r) \mapsto \begin{cases} (m; \beta_1 - m, \beta_2 - m, \dots, \beta_r - m) & \text{se } \beta_1 > 2m \\ (\beta_1 - m; m, \beta_2 - \beta_1 + m, \dots, \beta_r - \beta_1 + m) & \text{se } \beta_1 < 2m \text{ e } (\beta_1 - m) \nmid m \\ (\beta_1 - m; \beta_2 - \beta_1 + m, \dots, \beta_r - \beta_1 + m) & \text{se } \beta_1 < 2m \text{ e } (\beta_1 - m) \mid m \end{cases}$$

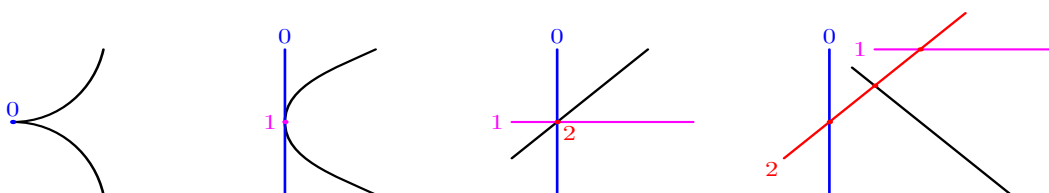
5.4.2. SEQUENZE DI MOLTEPLICITÀ. Dato un posto $\mathfrak{P}$, la sequenza di blow-up che lo desingularizza dà luogo a una sequenza di posti e delle relative molteplicità, chiaramente determinate dalla sequenza dalle caratteristiche di Puiseux di quei posti.

La sequenza delle molteplicità è anche legata alla relazione di prossimità dei posti il cui centro viene via via scoppiato: precisamente sono i coefficienti dell’ultima colonna della matrice inversa della matrice di prossimità.

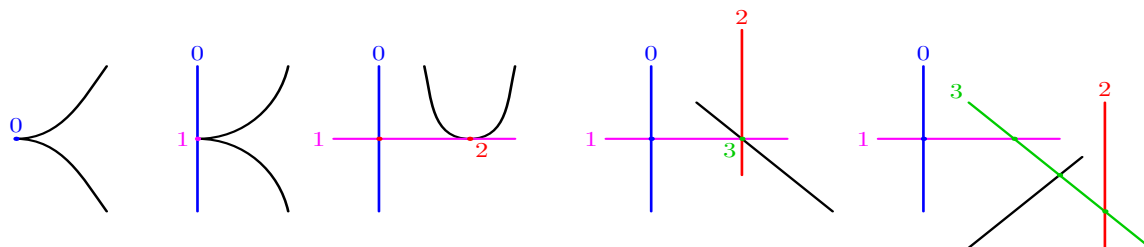
5.4.3. ESEMPLI. Ne concludiamo che ciascuno questi dati: la caratteristica di Puiseux del posto, la sequenza di molteplicità dei posti che compaiono nella risoluzione, la matrice di prossimità della risoluzione, la relazione di prossimità della risoluzione, sono equivalenti tra loro e caratterizzano la classe di singolarità del posto in questione.

Presentiamo infine alcuni esempi di risoluzione di punti o posti singolari (sempre nell’origine).

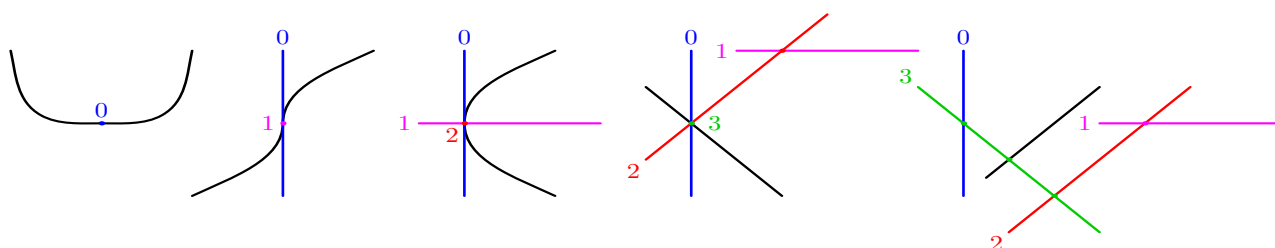
- (0) Pur non essendo singolare il posto di $y = x^q$ con $q > 1$ è tangente a una delle coordinate: con successivi scoppamenti possiamo riportarlo ai casi $y_1 = x_1^{q-1}$, $y_2 = x_2^{q-2}$, $\dots$, $y_r = x_r$.
- (1) Il caso di punti multipli ordinari (posti lineari con tangenti distinte) si risolve con uno scoppamento, visto che tutti i posti avranno centro in punti diversi del divisore eccezionale;
Il caso di supercuspidi ordinarie del tipo $y^{q-1} = x^q$ (unico posto di classe 1) con uno scoppamento dà $y_1^{q-1} = x_1$, che poi richiede altri scoppamenti solo per normalizzare gli incroci: sequenza di molteplicità è $[q-1, 1, \dots, 1]$, e caratteristica di Puiseux $(q-1; q)$.
- (2) il caso di punti doppi con una sola tangente si riducono alla forma $y^2 = x^q$ con $q > 1$ dispari: con successivi scoppamenti possiamo riportarlo ai casi $y_1^2 = x_1^{q-2}$, $y_2^2 = x_2^{q-4}$, $\dots$, $y_r^2 = x_r$. La sequenza della molteplicità è del tipo $[2, 2, \dots, 2, 1, 1, 1]$, caratteristica di Puiseux $(2; q)$.
Caso di $y^2 = x^3$:



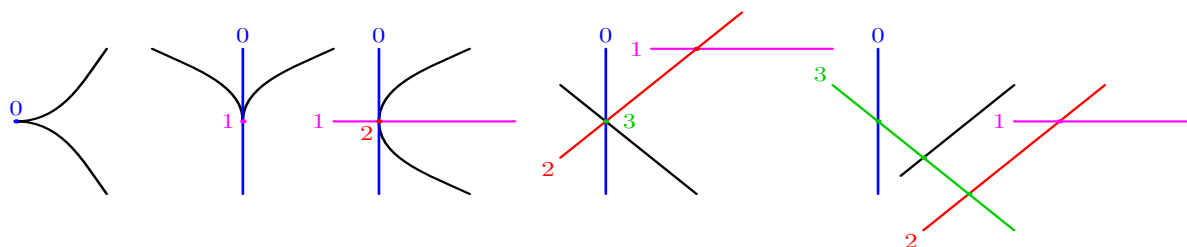
Caso di $y^2 = x^5$:



- (3) Il caso di punti tripli con una sola tangente si riducono a $y^3 = x^q$ con $q > 3$ non divisibile per 3: con successivi scoppiamenti possiamo riportarlo ai casi $y_1^3 = x_1^{q-3}$, $y_2^3 = x_2^{q-6}$, $\dots$, $y_r^3 = x_r^2$ oppure $y_r^3 = x_r$. La sequenza della molteplicità è del tipo $[3, 3, \dots, 3, 2, 1, 1, 1]$ oppure $[3, 3, \dots, 3, 1, 1, 1]$ rispettivamente, e la caratteristica di Puiseux è del tipo $(3; q)$ in entrambi i casi (ma con q diversi).
Caso di $y^3 = x^4$:



Caso di $y^3 = x^5$:



- (4) Per avere due esponenti caratteristici di Puiseux possiamo usare posti del tipo $\binom{t^4}{t^{2p}+t^q}$ con p, q dispari e $2p < q$. Allora la caratteristica di Puiseux è $(4; 2p, q)$, e la sequenza di molteplicità del tipo $[4, \dots, 4, 2, \dots, 2, 1, 1, 1]$.
(5) Per avere tre esponenti caratteristici di Puiseux possiamo usare posti del tipo $\binom{t^8}{t^{4p}+t^{2q}+t^r}$ con p, q, r dispari e $4p < 2q < r$. Allora la caratteristica di Puiseux è $(4; 4p, 2q, r)$, e la sequenza di molteplicità del tipo $[8, \dots, 8, 4, \dots, 4, 2, \dots, 2, 1, 1, 1]$.

Capitolo IV

Teorema di Riemann-Roch.

In questo capitolo introdurremo preliminari, enunciato, alcune applicazioni e un tentativo di dimostrazione del principale teorema riguardo le SdR compatte, che è il teorema di Riemann-Roch; si tratta di determinare la dimensione dello spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ delle funzioni meromorfe sulla superficie soggette a fissate condizioni (controllate da un divisore). Queste conoscenze permettono di iniziare la classificazione delle SdR compatte, di determinarne le immersioni negli spazi proiettivi e molto altro ancora.

0. Differenziali.

Per dare la definizione di differenziale sulle superficie di Riemann S , conviene osservare che una funzione meromorfa f su S può essere vista come una collezione di aperti U_i di un ricoprimento e di una funzione f_i su ciascuno di essi, con le condizioni che $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ per ogni i, j (condizioni di incollamento per le funzioni). Usando gli aperti di un atlante, con carte $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ (e mappe di transizione φ_{ij}), allora il dato di una funzione f equivale alla collezione di funzioni f_i sulla carta V_i soggette alla condizione che $f_j = f_i \circ \varphi_{ij}$ per ogni i, j .

0.1. DEFINIZIONE (DIFFERENZIALI OLOMORFI E MEROMORFI SULLE SDR). *Un differenziale su una SdR è una collezione $\{(U_i, \omega_i)\}_i$ dove gli U_i sono aperti di un ricoprimento di S dotato di carte $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ (aperti di $\mathbb{C}$), $\omega_i = f_i(z)dz$ sono differenziali sulle carte, soggetti alle condizioni di compatibilità seguenti: se φ_{ij} sono le mappe di transizione, allora per ogni i, j dev'essere $\omega_j = \omega_i \circ \varphi_{ij}$, cioè $f_j = (f_i \circ \varphi_{ij})\varphi'_{ij}$. I differenziali si dicono olomorfi o meromorfi a seconda che lo siano tutte le espressioni locali. Il $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale dei differenziali olomorfi si indica con $\Omega^1(S)$, quello dei differenziali meromorfi con $\mathcal{M}^1(S)$.*

0.2. OSSERVAZIONI. Conviene fare subito una serie di osservazioni sulla definizione.

0.2.1. ESPRESSIONI GLOBALI. Non è detto che per un differenziale su S si possa trovare una descrizione globale, cioè usando S come unico aperto. Però, ogni differenziale è definito (se esiste) dalla sua espressione in qualunque carta (per il principio di identità analitico: due differenziali coincidono se coincidono su un insieme con un punto di accumulazione).

Per esempio $\exp(z)dz$ è differenziale su $\mathbb{C}$, ma non definisce alcun differenziale su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Altro esempio: $\sqrt{z}dz$ è differenziale su $\mathbb{C}$ privato di una semiretta per l'origine, ma non definisce alcun differenziale su $\mathbb{C}$ privato dell'origine.

0.2.2. REGOLARITÀ. Eventualmente parleremo di differenziali con regolarità $\mathcal{C}^m$ e $\mathcal{C}^\infty$ usando espressioni locali con dx, dy , oppure con $dz, d\bar{z}$.

0.2.3. FUNZIONI. Ovviamente, se ω è un differenziale meromorfo su S , e f una funzione meromorfa, allora $f\omega$, ovviamente definito, è un differenziale meromorfo (basta controllarne il comportamento sulle mappe di transizione). Vi è una specie di inversa di questa osservazione.

Se ω_1 e ω_2 sono differenziali meromorfi (o olomorfi) su S , allora esiste una unica funzione meromorfa f su S tale che $\omega_1 = f\omega_2$. Di solito si dice che il rapporto tra due differenziali meromorfi (o olomorfi) dà una funzione meromorfa.

Infatti possiamo supporre che entrambi i differenziali siano definiti sugli aperti di uno stesso atlante, siano $\omega_1 = \{f_1^{(i)}dz_i\}_i$ e $\omega_2 = \{f_2^{(i)}dz_i\}_i$; allora si verifica subito che la collezione $\{f_1^{(i)}/f_2^{(i)}\}_i$ definisce una funzione meromorfa su S (basta controllare il comportamento sulle mappe di transizione).

Quindi, noto un differenziale meromorfo su una SdR, tutti gli altri si ottengono moltiplicando quello noto per funzioni meromorfe. Cioè abbiamo una biiezione $\mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}^1(X)$ mandando f in $f\omega_0$, ove ω_0 è qualunque elemento di $\mathcal{M}^1(X)$. Si faccia attenzione: analoghe affermazioni sono false per i differenziali olomorfi.

0.2.4. DIFFERENZIALI DI FUNZIONI MEROMORFE. Naturalmente, ad ogni funzione meromorfa, e più in generale ad ogni mappa tra SdR, rimane associato il suo differenziale, che è definito sugli aperti di un ricoprimento differenziando la funzione stessa. Si tratta di una mappa lineare $d : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{M}^1(X)$. Come si comporta rispetto al prodotto di funzioni?

0.3. GRADO DI DIFFERENZIALI. L'ordine di un differenziale meromorfo ω in un punto $P \in S$ è definito come l'ordine in P di una sua espressione locale su un aperto coordinato contenente P . Cioè $\text{ord}_P(\omega) = \text{ord}_P(f)$ se $\omega = f dz$ è espressione di ω in $U \ni P$.

Si dice grado di un differenziale la somma estesa a tutti i punti di S dei suoi ordini (è ben definito, essendo gli ordini nulli in quasi tutti i punti).

Chiaramente abbiamo $\text{ord}_P(f\omega) = \text{ord}_P(f) + \text{ord}_P(\omega)$, e poiché la somma degli ordini di ogni funzione meromorfa è zero, ne risulta che tutti i differenziali su una SdR compatta hanno lo stesso grado.

0.4. ESEMPI. Piccoli esempi per fare esperienza.

0.4.1. SFERA DI RIEMANN. Su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ consideriamo il differenziale dz definito sulla carta $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \infty$. Naturalmente si ha $\text{ord}_P(dz) = 0$ per ogni $P \neq \infty$. Per controllare il comportamento su ∞ , usiamo la mappa di transizione $z \mapsto 1/z$, e otteniamo che

$$\text{ord}_\infty(dz) = \text{ord}_0 d\left(\frac{1}{z}\right) = \text{ord}_0\left(-\frac{1}{z^2} dz\right) = -2$$

e quindi concludiamo che esso ha grado -2 . Si tratta di un differenziale meromorfo, ma non olomorfo.

Per esercizio, si consideri il differenziale definito da $d \log z = \frac{dz}{z}$ nella carta priva di ∞ (ha ordine -1 sia nell'origine che nell'infinito).

0.4.2. TORI. Per i tori è chiaro che il differenziale dz ha ordine nullo in ogni punto, e quindi è olomorfo e di grado 0.

0.4.3. CURVE ELLITTICHE. Consideriamo le curve ellittiche definite da equazioni del tipo $Y^2 = X^3 - \alpha X - \beta$. Differenziando l'equazione otteniamo che $2Y dY = (3X^2 - \alpha) dX$, da cui

$$\frac{dX}{Y} = 2 \frac{dY}{3X^2 - \alpha}$$

e si vede che il differenziale $\frac{dX}{Y}$ ha ordine nullo in ogni punto affine della curva. Un facile cambiamento di carte, oppure una sostituzione diretta usando la parametrizzazione del posto, permette di vedere che ha ordine zero anche nell'unico punto improprio della curva, e quindi trattarsi di un differenziale olomorfo.

0.4.4. CURVE PIANE LISCE. Data una curva piana liscia di equazione $F(X_0, X_1, X_2)$, polinomio omogeneo di grado d maggiore di 2, consideriamo la sua equazione affine usuale $f(X, Y) = F(1, X, Y)$. Differenziando tale equazione troviamo $\frac{\partial f}{\partial X} dX = -\frac{\partial f}{\partial Y} dY$, da cui possiamo dedurre che il differenziale definito da

$$\frac{dX}{\partial f / \partial Y} = -\frac{dY}{\partial f / \partial X}$$

è olomorfo in tutti i punti della curva nel piano affine. Verifichiamo in effetti che per ogni polinomio $p(X, Y)$ di grado minore o uguale a $d-3$ il differenziale

$$p(X, Y) \frac{dX}{\partial f / \partial Y}$$

è olomorfo. Questo è chiaro in tutti i punti affini, e bisogna controllare il comportamento nei punti impropri. Per questo consideriamo il cambiamento di carta da $(X = X_1/X_0, Y = X_2/X_0)$ a $(\zeta = X_0/X_1, \eta = X_2/X_1)$, per cui risulta che

$$X = \frac{1}{\zeta}, \quad Y = \frac{\eta}{\zeta}, \quad dX = d\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\frac{d\zeta}{\zeta^2}$$

e otteniamo per il nostro differenziale l'espressione

$$p(X, Y) \frac{dX}{\partial f / \partial Y} = -\frac{p(\zeta, \eta)}{\zeta^r} \frac{\zeta^{d-1}}{q(\zeta, \eta)} \frac{d\zeta}{\zeta^2} = -\frac{p(\zeta, \eta)}{q(\zeta, \eta)} \zeta^{d-r-3} d\zeta$$

ove si è posto $(\partial f / \partial Y)(\frac{1}{\zeta}, \frac{\eta}{\zeta}) = \frac{q(\zeta, \eta)}{\zeta^{d-1}}$. Da questo si deduce appunto che l'espressione rimane olomorfa anche nei punti impropri solo per $d - r - 3 \geq 0$, ovvero per $r \leq d - 3$.

In questi conti si è supposto di poter usare ζ come parametro locale: in quali casi non è possibile? Convien anche ritrovare lo stesso risultato usando delle parametrizzazioni dei posti impropri, invece che un cambiamento di carte.

0.4.5. IPERELLITTICHE. Per esercizio, si consideri il caso delle curve iperellittiche di equazioni $Y^2 = h(X)$ ove $h(X)$ è polinomio privo di zeri multipli, e di grado $2g + 1$ oppure $2g + 2$ con $g \leq 1$ (nel qual caso sappiamo già che si tratta di curve di genere g). In particolare si dimostri che differenziali del tipo $p(X) \frac{dX}{Y}$ sono olomorfi se $p(X)$ è polinomio di grado minore o uguale a $g - 1$.

0.4.6. RIVESTIMENTI D'ORDINE d DELLA RETTA. Per esercizio, si esplori il caso dei rivestimenti d'ordine d della retta proiettiva nella forma $Y^d = h(X)$ con $h(X)$ polinomio di grado maggiore di d .

0.4.7. PROBLEMA. Per altri esercizi si considerino le curve del primo capitolo. In ogni caso si descrivano i differenziali olomorfi.

0.5. IMMAGINE INVERSA DI DIFFERENZIALI. Se $F : X \rightarrow Y$ è una mappa olomorfa tra SdR, e ω è un differenziale su Y , diciamo $\omega = \{(U_i, \omega_i = f_i dz_i)\}_i$, allora definiamo il differenziale immagine inversa su X tramite la posizione $F^*(\omega) = \{(F^{-1}U_i, F^*\omega_i = (f_i \circ F)dF)\}_i$.

Si controlla subito che la posizione è ben posta, e che $F^*\omega$ è meromorfo (risp. olomorfo) se ω lo è.

0.5.1. COMPOSIZIONE. È facile verificare che $\text{id}^*(\omega) = \omega$ e $(G \circ F)^*\omega = F^*(G^*\omega)$.

0.5.2. Se f è funzione meromorfa su Y , allora $F^*(f) = f \circ F$ lo è su X , e abbiamo che $F^*(df) = d(F^*(f))$. Cioè immagine inversa (per funzioni e differenziali) e differenziazione commutano tra loro.

0.5.3. ORDINI E RAMIFICAZIONE. Mostriamo che

$$\text{ord}_P(F^*\omega) = \text{ord}_{F(P)}(\omega) \text{molt}_P(F) + \text{ram}_P(F) .$$

Infatti, da $F(z) = z^{\text{molt}_P(F)}$ e da $\omega = \zeta^{\text{ord}_{F(P)}(\omega)} d\zeta$ (sviluppi al primo termine), si trova subito che

$$\begin{aligned} F^*(\omega) &= (z^{\text{molt}_P(F)})^{\text{ord}_{F(P)}(\omega)} z^{\text{molt}_P(F)-1} dz \\ &= z^{\text{molt}_P(F)\text{ord}_{F(P)}(\omega) + \text{molt}_P(F)-1} dz \end{aligned}$$

(al primo termine), e dunque il risultato voluto. Sommando sui punti si ottiene il grado

$$\deg(F^*\omega) = \deg(F) \deg(\omega) + \text{ram}(F) .$$

0.6. TEOREMA (CARATTERIZZAZIONE DIFFERENZIALE DEL GENERE). Per ogni $\omega \in \mathcal{M}^1(S)$, risulta $\deg \omega = 2g - 2$, se g è il genere di S .

Poiché due differenziali meromorfi differiscono per il prodotto con una funzione meromorfa, è chiaro che tutti i differenziali hanno lo stesso grado (poiché le funzioni hanno tutte ordine nullo). Sia $f \in \mathcal{M}(S)$, $f \neq 0$ (ne supponiamo l'esistenza). Allora f è mappa olomorfa da S in $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, e possiamo considerare $\omega = f^*dz$. Risulta

$$\text{ord}_P(\omega) = \text{ord}_{f(P)}(dz) \text{molt}_P(f) + \text{ram}_P(f) = \begin{cases} \text{ram}_P(f) & \text{se } f(P) \neq \infty \\ \text{ram}_P(f) - 2\text{molt}_\infty(f) & \text{se } f(P) = \infty \end{cases}$$

da cui si ottiene subito che

$$\deg(\omega) = \sum_P \text{ord}_P(\omega) = \text{ram}(f) - 2 \deg(f) = 2g - 2$$

ove si è tenuto conto del teorema di Riemann-Hurwitz per f , ovvero che $2(g - 1) = 2(0 - 1) \deg(f) + \text{ram}(f)$, e cioè $\text{ram}(f) = 2 \deg(f) + 2(g - 1)$. $\square$

0.7. RESIDUI DI DIFFERENZIALI. Per ogni differenziale ω su una SdR, e per ogni punto $P \in X$ definiamo il residuo $\text{Res}_P \omega$ come il residuo della funzione f_P in P ove $\omega = f_P(z_P) dz_P$ è una espressione locale di ω in una carta intorno a P .

0.7.1. TERMINOLOGIA CLASSICA. Di solito si chiamano differenziali di prima specie i differenziali olomorfi, di seconda specie i differenziali meromorfi con residuo nullo in ogni punto, di terza specie i differenziali meromorfi con al più poli semplici. Si osserva subito che un differenziale è di prima specie se e solo se è contemporaneamente di seconda e di terza specie.

0.7.2. TEOREMA DEI RESIDUI. Per ogni differenziale meromorfo su una SdR compatta X si ha che la somma dei residui è zero: $\sum_{P \in X} \text{Res}_P \omega = 0$.

Infatti per ogni polo P_i possiamo considerare un disco D_i non contenente altri poli; chiamiamo D il complementare in X di $\bigcup_i D_i$; allora abbiamo

$$\sum_{P \in X} \text{Res}_P \omega = \sum_i \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_i} \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sum_i \partial D_i} \omega = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial D} \omega = \frac{-1}{2\pi i} \iint_D d\omega = 0$$

perché ω è olomorfo in un intorno di D ...

1. Divisori sulle Superficie di Riemann Compatte.

D'ora in poi studieremo solo SdR compatte, a meno che non sia detto esplicitamente altro.

1.1. DEFINIZIONE (DIVISORI). Sia X una SdR; il gruppo dei divisori di X è il gruppo abeliano libero generato dai punti di X :

$$\text{Div}(X) = \mathbb{Z}^{(X)} = \{D : X \rightarrow \mathbb{Z} : \text{quasi ovunque nulle}\}.$$

Se $D \in \text{Div}(X)$, scriviamo $D = \sum_{P \in X} D_P P$ e anche $D_P = \text{ord}_P D$ (ordine in P di D), che è un intero, nullo per quasi tutti i punti $P \in X$. Si dice supporto del divisore D l'insieme $\{P \in X : \text{ord}_P(D) \neq 0\}$.

1.1.1. ORDINE TRA DIVISORI. Se $D, D' \in \text{Div}(X)$ diciamo che $D \leq D'$ se e solo se per ogni $P \in X$ si ha $\text{ord}_P D \leq \text{ord}_P D'$. Si chiamano divisori positivi i divisori D tali che $D \geq 0$, cioè con $\text{ord}_P D \geq 0$ per ogni $P \in X$.

1.1.2. GRADO DI DIVISORI. Il grado dei divisori è la funzione

$$\deg : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

definita da $\deg(D) = \sum_{P \in X} \text{ord}_P D$ (ben definita per la finitezza di D). Si tratta chiaramente di un morfismo suriettivo di gruppi, e il nucleo si indica con

$$\text{Div}_0(X) = \ker(\deg) = \{D \in \text{Div}(X) : \deg(D) = 0\}$$

e si chiama il sottogruppo dei divisori di grado zero.

1.2. DIVISORI PRINCIPALI. Abbiamo un morfismo di gruppi abeliani

$$\text{div} : \mathcal{M}(X) \setminus \{0\} \rightarrow \text{Div}(X)$$

che manda ogni funzione meromorfa f nel suo divisore $\text{div}(f) = \sum_{P \in X} \text{ord}_P(f) P$ (spesso si estende alla funzione nulla dando come valore il “divisore” ∞).

Chiaramente, poiché X è compatta, risulta che $\ker(\text{div}) = \mathbb{C}^\times$ (funzioni costanti non nulle), e definiamo divisori principali quelli dell'immagine, cioè poniamo

$$\text{PDiv}(X) = \text{im}(\text{div}) = \{\text{div}(f) \in \text{Div}(X) : f \in \mathcal{M}(X)^\times\}.$$

Si tratta chiaramente di un sottogruppo di $\text{Div}_0(X)$ (poiché per ogni funzione meromorfa non nulla abbiamo $\deg \text{div}(f) = 0$, in quanto $\sum_P \text{ord}_P(f) = 0$); di solito si tratta di un sottogruppo proprio.

1.2.1. Talvolta si usa la notazione $\text{div}(f) = \text{div}_0(f) - \text{div}_\infty(f)$, dove $\text{div}_0(f)$ e $\text{div}_\infty(f)$ sono detti rispettivamente divisori di zero e di infinito (o dei poli) di f , e sono definiti dal fatto di essere entrambi positivi a supporti disgiunti e di dare come differenza il divisore della funzione.

1.2.2. ESEMPLI. Nel caso della sfera di Riemann, sappiamo già che $\text{PDiv}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) = \text{Div}_0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ (ogni divisore di grado zero è il divisore di una funzione).

Nel caso del toro, sappiamo che un divisore è principale se e solo se è di grado zero e la sua somma per la legge di gruppo del toro è zero. Quindi sul toro vi sono divisori di grado zero non principali (per esempio?).

1.3. DIVISORI CANONICI. Abbiamo un morfismo di insiemi

$$\text{kdiv} : \mathcal{M}^1(X) \setminus \{0\} \rightarrow \text{Div}(X)$$

che manda ogni differenziale meromorfo ω nel suo divisore $\text{kdiv}(\omega) = \sum_{P \in X} \text{ord}_P(\omega) P$ (spesso si estende al differenziale nullo dando come valore il “divisore” ∞).

Non si tratta di una applicazione di gruppi (perché il dominio non è un gruppo!) e definiamo divisori canonici quelli dell'immagine, cioè poniamo

$$\text{KDiv}(X) = \text{im}(\text{kdiv}) = \{\text{kdiv}(\omega) \in \text{Div}(X) : \omega \in \mathcal{M}^1(X) \setminus \{0\}\}.$$

Siccome si ha che $\text{kdiv}(f\omega) = \text{div}(f) + \text{kdiv}(\omega)$, e ogni differenziale meromorfo si scrive $\omega = f\omega_0$ per un (qualsiasi) fissato non nullo $\omega_0 \in \mathcal{M}^1(X)$, ne segue che $\text{KDiv}(X) = \text{kdiv}(\omega_0) + \text{PDiv}(X)$, cioè $\text{KDiv}(X)$ è una classe laterale di $\text{PDiv}(X)$ in $\text{Div}(X)$, e di solito è diversa da $\text{PDiv}(X)$ (risulta uguale se e solo se X è un toro).

1.4. IMMAGINE INVERSA DI DIVISORI. Se $F : X \rightarrow Y$ è una mappa olomorfa tra SdR, definiamo l'immagine inversa tramite F come l'applicazione

$$F^* : \text{Div}(Y) \longrightarrow \text{Div}(X)$$

definita sui punti da $F^*(Q) = \sum_{P \in X, f(P)=Q} \text{mult}_P(F)P$, e poi estesa per linearità ai divisori: se $D = \sum_{Q \in Y} \text{ord}_Q(D)Q$, allora $F^*D = \sum_{Q \in Y} \text{ord}_Q(D)F^*Q$.

1.4.1. COMPOSIZIONE. Si tratta chiaramente di un morfismo di gruppi abeliani, e risulta $\text{id}^* = \text{id}$, e $(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.

1.4.2. Risulta che $\deg(F^*D) = \deg(F)\deg(D)$. Dunque F^* dà una mappa di gruppi $F^* : \text{Div}_0(Y) \rightarrow \text{Div}_0(X)$.

1.4.3. DIVISORI DI FUNZIONI. Se f è funzione meromorfa su Y , allora $F^*(f) = f \circ F$ lo è su X , e abbiamo che $F^*(\text{div} f) = \text{div}(F^*(f))$. Cioè immagine inversa (per funzioni e divisori) commutano tra loro, e abbiamo una ben definita mappa di gruppi $F^* : \text{PDiv}(Y) \rightarrow \text{PDiv}(X)$.

1.4.4. DIVISORI DI DIFFERENZIALI E RIEMANN-HURWITZ. Si osservi invece che in generale F^* non manda divisori canonici in divisori canonici; quello che vale è un raffinamento del teorema di Riemann-Hurwitz che si può enunciare in questo modo. Sia $\text{Ram}(F) = \sum_{P \in X} \text{ram}_P(F)P$ il divisore di ramificazione di F . Allora per ogni differenziale $\omega \in \mathcal{M}^1(Y)$ abbiamo

$$\text{kdiv}(F^*\omega) = F^*(\text{kdiv}(\omega)) + \text{Ram}(F)$$

e $\text{Ram}(F) = \text{kdiv}(dF)$.

L'ultima asserzione è essenzialmente ovvia (si veda una espressione canonica per F in ogni punto); per l'asserzione principale: se $\omega = f dz$ abbiamo

$$\begin{aligned} \text{kdiv}(F^*\omega) &= \text{kdiv}((f \circ F)dF) \\ &= \text{div}(f \circ F) + \text{kdiv}(dF) \\ &= \text{div}(F^*f) + \text{Ram}(F) \\ &= F^*\text{div}(f) + \text{Ram}(F) \\ &= F^*\text{kdiv}(\omega) + \text{Ram}(F) \end{aligned}$$

come si voleva. Si osservi che il teorema di Riemann-Hurwitz per i generi si ottiene da questa espressione passando al grado e ricordando la caratterizzazione differenziale del genere.

1.5. EQUIVALENZA LINEARE DI DIVISORI: GRUPPO DI PICARD. Diciamo che due divisori sono linearmente equivalenti, e scriviamo $D \sim D'$ se $D - D' \in \text{PDiv}(X)$, ovvero se e solo se la differenza è il divisore di una funzione meromorfa.

Chiamiamo gruppo di Picard di X (o gruppo delle classi di divisori) il gruppo quoziente

$$\text{Pic}(X) = \frac{\text{Div}(X)}{\text{PDiv}(X)}$$

dei divisori modulo divisori principali.

1.5.1. Si osserva subito che divisori linearmente equivalenti hanno lo stesso grado, ma di solito il viceversa è falso (divisori dello stesso grado non sono necessariamente linearmente equivalenti: esempi?). Spesso si usa anche il quoziente $\text{Pic}_0(X) = \frac{\text{Div}_0(X)}{\text{PDiv}(X)}$, che è un sottogruppo di $\text{Pic}(X)$.

1.5.2. PROPRIETÀ DELL'EQUIVALENZA LINEARE.

- (1) $\text{div}_0(f) \sim \text{div}_\infty(f)$ per ogni $f \in \mathcal{M}(X)$;
- (2) $D \sim \text{kdiv}(\omega)$ con $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ se e solo se $D \in \text{KDiv}(X)$, cioè i divisori canonici formano una classe di equivalenza lineare;

- (3) nel caso della sfera di Riemann si ha che $P \sim Q$ per ogni $P, Q \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$; dunque $\text{Pic}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$;
- (4) se $F : X \rightarrow Y$ è mappa olomorfa, allora da $D \sim D'$ segue che $F^*D \sim F^*D'$ (perché $D - D' = \text{div}(f)$ implica che $F^*D - F^*D' = \text{div}(F^*f)$, oppure perché abbiamo già detto che F^* rispetta PDiv), e quindi F^* induce una mappa di gruppi $\text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X)$;
- (5) se $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è mappa olomorfa, allora tutte le fibre $f^*\lambda$ al variare di $\lambda \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sono tra loro linearmente equivalenti. Quest'ultima proprietà giustifica il nome di equivalenza lineare usato: si tratta di “sezioni lineari” di mappe olomorfe verso la retta proiettiva.

1.5.3. Nel caso di curve algebriche immerse in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, tra le famiglie di divisori linearmente equivalenti tra loro troviamo le “sezioni iperpiane” della curva, cioè i divisori tagliati sulla curva dagli iperiani dello spazio proiettivo.

1.5.4. ESEMPLI. Abbiamo già visto che nel caso della sfera di Riemann abbiamo $D \sim D'$ sse $\deg D = \deg D'$, e dunque $\text{Pic}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \cong \mathbb{Z}$ via la funzione $\deg : \text{Div}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \rightarrow \mathbb{Z}$ (suriettiva con nucleo dato da $\text{PDiv}(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$), e $\text{Pic}_0(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})) \cong 0$.

Nel caso del toro abbiamo che la mappa $(\deg, s) : \text{Div}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ è suriettiva con nucleo dato da $\text{PDiv}(\mathbb{T})$, e quindi identifica $\text{Pic}(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{T}$ e $\text{Pic}_0(\mathbb{T}) \cong \mathbb{T}$.

2. Spazi di Funzioni e Differenziali associati a Divisori (enunciato di Riemann-Roch).

2.1. DEFINIZIONE (SPAZI $\mathcal{L}(D)$ E $\mathcal{K}(D)$). Sia X una SdR compatta, e sia $D \in \text{Div}(X)$ un suo divisore. Definiamo il $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale delle funzioni meromorfe controllate da D

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in \mathcal{M}(X) : \text{div}(f) + D \geq 0\}$$

(si tratta delle funzioni meromorfe che possono avere poli in P d'ordine $\leq \text{ord}_P(D)$ se $\text{ord}_P(D) > 0$, devono avere zeri d'ordine $\geq \text{ord}_P(D)$ se $\text{ord}_P(D) < 0$, ed essere olomorfe altrove).

Definiamo il $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale dei differenziali meromorfi controllati da D

$$\mathcal{K}(D) = \{\omega \in \mathcal{M}^1(X) : k\text{div}(\omega) \geq D\}$$

(si faccia attenzione al segno; si tratta dei differenziali meromorfi che possono avere poli in P d'ordine $\leq \text{ord}_P(D)$ se $\text{ord}_P(D) < 0$, devono avere zeri d'ordine $\geq \text{ord}_P(D)$ se $\text{ord}_P(D) > 0$, ed essere olomorfi altrove).

2.2. OSSERVAZIONI.

- (0) Usando il divisore nullo, troviamo che $\mathcal{L}(0) = \mathcal{O}(X) = \mathbb{C}$ (funzioni olomorfe), e $\mathcal{K}(0) = \Omega^1(X)$ (differenziali olomorfi).
- (1) Se $D \sim D'$ (linearmente equivalenti), allora abbiamo un isomorfismo di $\mathbb{C}$ -spazi vettoriali $\mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{L}(D')$ definito da $f \mapsto fg$ se $D - D' = \text{div}(g)$.
- (2) Sia $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ non nullo. Allora per ogni $D \in \text{Div}(X)$ abbiamo un isomorfismo di $\mathbb{C}$ -spazi vettoriali $\mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{K}(\text{div}(\omega) - D)$ che manda f in $f\omega$. In particolare abbiamo $\mathcal{K}(k\text{div}(\omega)) \cong \mathcal{L}(0) \cong \mathbb{C}$ e $\mathcal{K}(0) \cong \mathcal{L}(\text{div}(\omega))$.
- (3) (PRINCIPIO DI RECIPROCIÀ) Siano $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ e $D, E \in \text{Div}(X)$ tali che $D + E = k\text{div}(\omega)$. Allora abbiamo isomorfismi canonici $\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{K}(E)$ e $\mathcal{L}(E) \cong \mathcal{K}(D)$.
- (4) Se $D \leq D'$ allora risulta $\mathcal{L}(D) \leq \mathcal{L}(D')$ e $\mathcal{K}(D) \geq \mathcal{K}(D')$.
- (5) Se $\deg(D) < 0$ allora $\mathcal{L}(D) = \{0\}$ (abbiamo imposto che le funzioni abbiano più zeri di quanti poli siano permessi).

2.3. PROBLEMA FONDAMENTALE. Ora, per ogni divisore abbiamo definito degli spazi di funzioni (e differenziali) meromorfi controllati dal divisore, e si tratta di $\mathbb{C}$ -spazi vettoriali. Quindi la domanda fondamentale diventa decidere se si tratta di spazi di dimensione finita su $\mathbb{C}$, ed eventualmente trovarne la dimensione. Che siano di dimensione finita è facile, e lo dimostreremo subito; trovarne la dimensione è invece il teorema di Riemann-Roch, molto profondo e ricco di conseguenze.

2.4. TEOREMA (FINITEZZA). Sia $D \in \text{Div}(X)$, e poniamo $D = D_+ - D_-$ con $D_+, D_- \geq 0$ divisori positivi (o nulli). Allora $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) \leq \deg(D_+) + 1$; in particolare tutti gli spazi $\mathcal{L}(D)$ sono di dimensione finita su $\mathbb{C}$.

Vi sono due possibili ragionamenti per stabilire il risultato, ed entrambi saranno utili in futuro.

Il primo procede così: se $P \in X$ è tale che $n = \text{ord}_P(D) > 0$, consideriamo la mappa $\mathcal{L}(D) \rightarrow \mathbb{C}$ che manda f nel coefficiente a_{-n} del suo sviluppo di Laurent in P . Questa mappa è (lineare, quindi) suriettiva o nulla, e il suo nucleo è dato da $\mathcal{L}(D - P)$. Quindi $\mathcal{L}(D - P)$ o coincide con $\mathcal{L}(D)$, oppure è di codimensione 1 in $\mathcal{L}(D)$, e il risultato segue per induzione.

Il secondo procede così: se $P_1, \dots, P_r$ sono i punti di X per cui $n_i = \text{ord}_{P_i}(D) > 0$, consideriamo la mappa $\mathcal{L}(D) \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}^{n_i}$ che manda ogni funzione f nei coefficienti negativi dei suoi sviluppi di Laurent in ciascun P_i . Si tratta di una applicazione lineare il cui nucleo è formato da funzioni olomorfe, quindi costanti per compattezza di X . Il risultato segue allora dalla formula delle dimensioni. $\square$

2.5. TEOREMA (RIEMANN-ROCH). Sia $D \in \text{Div}(X)$. Abbiamo che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \deg(D) + 1 - g + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - D)$$

ove: g è il genere della SdR X , e $K = \text{kdiv}(\omega)$ con $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$ non nullo è un qualunque divisore canonico (si ricordi che il grado di K è $2g - 2$).

Dedicheremo una sezione per illustrare la dimostrazione di questo teorema, anticipandone invece le applicazioni che sono del tutto indipendenti dalla sua dimostrazione.

2.6. PRIME APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI RIEMANN-ROCH.

2.6.1. INTERPRETAZIONE ANALITICA DEL GENERE. Usiamo $D = 0$. Allora risulta che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) = g$ (perché $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(0) = 1$, come abbiamo già osservato). D'altra parte $\mathcal{L}(K) \cong \mathcal{K}(0) = \Omega^1(X)$. Quindi otteniamo che il genere di una SdR compatta è la dimensione come $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale dello spazio dei differenziali olomorfi (interpretazione analitica del genere: $g = \dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(X)$).

2.6.2. DISUGUAGLIANZA DI RIEMANN. Siccome $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - D) \geq 0$, dalla formula di Riemann-Roch segue subito che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) \geq \deg(D) + 1 - g$$

che è un teorema di esistenza di funzioni meromorfe su X ; in effetti per dimostrare il teorema di Riemann-Roch (o anche solo la disuguaglianza di Riemann) bisogna aver dimostrato che esistono funzioni meromorfe su ogni SdR compatta; noi non l'abbiamo fatto finora (se non per sfera e toro, nei quali casi abbiamo descritto completamente lo spazio delle funzioni meromorfe, e per le normalizzazioni di curve proiettive piane essenzialmente).

2.6.3. CASO DI DIVISORI "ABBASTANZA POSITIVI". Se $\deg(D) \geq 2g - 1$, allora $\deg(K - D) = \deg(K) - \deg(D) \leq 2g - 2 - (2g - 1) = -1 < 0$, e dunque il termine difficile della formula di Riemann-Roch scompare ($\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - D) = 0$) e otteniamo la formula semplificata

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \deg(D) + 1 - g \quad \text{se} \quad \deg(D) \geq 2g - 1.$$

2.6.4. ESISTENZA DI FUNZIONI. Se usiamo divisori D con $\deg(D) \geq g$ (risp. $> g$) allora otteniamo $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) \geq 1$ (risp. > 1). Si tratta di stime di esistenza di funzioni con limiti fissati sui poli permessi. Per esempio:

- (1) se $D = (g + 1)P$ con $P \in X$, otteniamo che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}((g + 1)P) \geq \deg((g + 1)P) + 1 - g = 2$, e dunque esistono funzioni non costanti aventi poli solo nel fissato punto P e in nessun altro punto di X . Di solito si dice che $\mathcal{M}(X)$ separa i punti di X , nel senso che per ogni coppia di punti $P, Q \in X$ esistono funzioni meromorfe f con $f(P) \neq f(Q)$.
- (2) consideriamo $P \in X$, e i divisori $D_n = nP$ con n sufficientemente grande (per esempio maggiore di $2g - 2$) per poter usare la formula semplificata; abbiamo allora $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D_n) = n + 1 - g$ e $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D_{n+1}) = n + 2 - g$, da cui segue che $\mathcal{L}(D_n) \subsetneq \mathcal{L}(D_{n+1})$, e dunque esistono funzioni $f_{n+1} \in \mathcal{L}(D_{n+1}) \setminus \mathcal{L}(D_n)$ per ogni $n \gg 0$.

In particolare esistono funzioni meromorfe (per esempio f_{n+1}/f_n) aventi polo semplice in P . Di solito si dice che $\mathcal{M}(X)$ separa le tangenti di X , nel senso che per ogni punto $P \in X$ esistono funzioni meromorfe f con polo semplice in P .

2.6.5. ESISTENZA DI DIFFERENZIALI. Dall'isomorfismo $\mathcal{K}(D) \cong \mathcal{L}(K - D)$ è chiaro che teoremi di esistenza di funzioni meromorfe si traducono anche in termini di esistenza di differenziali meromorfi. Ma in effetti si può essere più precisi: sappiamo che per un differenziale meromorfo con poli semplici abbiamo che la somma dei residui deve essere nulla. In effetti questa è l'unica ostruzione alla esistenza (con unicità) di differenziali meromorfi con poli semplici e assegnati residui: esattamente che la somma dei residui sia nulla.

Infatti, dati i punti P_i , possiamo considerare il divisore $D = -\sum_i P_i$ e la mappa $\mathcal{K}(D) \rightarrow \mathbb{C}^n$ che manda ogni differenziale ω nella n -upla dei residui $(\text{res}_{P_i} \omega)$. Il nucleo di tale morfismo è chiaramente dato dai differenziali olomorfi, quindi uno spazio di dimensione g . La dimensione di $\mathcal{K}(D) \cong \mathcal{L}(K - D)$ per Riemann-Roch è data da $n - g + 1$ (essendo il divisore D negativo), e quindi l'immagine ha dimensione $n - 1$, cioè è suriettiva su un iperpiano di $\mathbb{C}^n$ (che dev'essere quello dato dalla condizione sui residui).

2.6.6. DIFFERENZIALI DI PRIMA, SECONDA E TERZA SPECIE. I differenziali di prima specie sono quelli olomorfi.

Per ogni punto P e ogni intero $n > 1$ esistono differenziali $\omega_P^{(n)}$ olomorfi fuori di P e tali che $\omega_P^{(n)} - dz/z^{n+1}$ sia olomorfo in P (z essendo coordinata locale in P); basta per questo controllare le dimensioni degli spazi con poli nell'unico punto P : si tratta di spazi che aumentano di dimensione all'aumentare del polo. Questi sono differenziali di seconda specie.

Per ogni coppia di punti distinti P, Q esistono differenziali $\omega_{P,Q}$ che sono olomorfi fuori di P, Q e hanno poli semplici con residui 1 in P e -1 in Q . Questi sono differenziali di terza specie.

I differenziali scritti di seconda e terza specie possono essere resi unici tramite una normalizzazione sui periodi (annullando gli a -periodi) di cui parleremo nel capitolo su Jacobi; in questo caso si sa anche calcolarne i b -periodi. È chiaro che ogni differenziale meromorfo è combinazione lineare complessa di differenziali di prima, seconda e terza specie.

2.7. ESEMPLI. Controlliamo la situazione nei nostri due esempi standard:

2.7.1. SFERA DI RIEMANN. Dalla descrizione fatta delle funzioni meromorfe come quozienti di polinomi omogenei di ugual grado, otteniamo che

$$\mathcal{L}(D) = \begin{cases} \{0\} & \text{se } \deg(D) < 0 \\ \{f(X) \prod_i (X - P_i)^{-\text{ord}_{P_i}(D)} : \deg f(X) \leq \deg(D)\} & \text{se } \deg(D) \geq 0 \end{cases}$$

ove $f(X)$ è polinomio (di grado $\leq \deg(D)$), e dunque che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \begin{cases} 0 & \text{se } \deg(D) < 0 \\ \deg(D) + 1 & \text{se } \deg(D) \geq 0 \end{cases}$$

che è la formula di Riemann-Roch per la sfera, poiché $g = 0$. Per esercizio, esplicitare i $\mathcal{K}(D)$ e loro dimensioni.

2.7.2. TORI COMPLESSI. Dalla descrizione fatta delle funzioni meromorfe come quozienti di theta traslate soggette alla condizione che le traslazioni abbiano somma intera, otteniamo che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \begin{cases} 0 & \text{se } \deg(D) < 0 \\ 0 & \text{se } \deg(D) = 0 \text{ e } D \not\sim 0 \\ 1 & \text{se } \deg(D) = 0 \text{ e } D \sim 0 \\ \deg(D) & \text{se } \deg(D) > 0 \end{cases}$$

(in realtà, i primi tre casi sono validi per ogni SdR compatta; il quarto caso è la formula di Riemann-Roch per i tori, poiché $g = 1$). Per esercizio, esplicitare i $\mathcal{K}(D)$ e loro dimensioni.

3. Sistemi lineari e mappe proiettive associate a Divisori.

3.1. DEFINIZIONE-TEOREMA (SISTEMI LINEARI DI DIVISORI). Sia $D \in \text{Div}(X)$ un divisore su una SdR compatta X . L'insieme

$$|D| = \{E \in \text{Div}(X) : E \geq 0, \quad E \sim D\}$$

dei divisori non negativi linearmente equivalenti a D si dice sistema lineare completo di D e ha struttura di spazio proiettivo con spazio vettoriale sovrastante $\mathcal{L}(D)$ (dunque $\dim |D| = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - 1$). Ogni sottovarietà lineare proiettiva di $|D|$ si dice un sistema lineare.

L'unica asserzione da verificare riguarda la struttura di spazio proiettivo, e si dimostra osservando che l'applicazione

$$\mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) \longrightarrow |D| \quad \text{definita da} \quad f \longmapsto \text{div}(f) + D$$

è ben definita e chiaramente una biiezione. □

3.1.1. GRADO E DIMENSIONE DI SISTEMI LINEARI. Dato un sistema lineare $G \leq |D|$, diciamo dimensione di G la sua dimensione come sottospazio proiettivo, e grado di G il grado di un qualunque suo elemento (hanno tutti lo stesso grado, trattandosi di divisori linearmente equivalenti tra loro). È terminologia classica dire che un sistema lineare di dimensione n e grado d è “un g_d^n ” e si parla di “avere o prendere un g_d^n su X ”. Per esempio: una SdRc possiede un g_1^1 se e solo se è la sfera di Riemann.

3.1.2. PUNTI BASE DI SISTEMI LINEARI. Sia $D \in \text{Div}(X)$. Definiamo il divisore di base di D , o l'insieme dei punti base di D , come $B(D) = \inf\{E : E \in |D|\} = \bigcap_{E \in |D|} E$. Si tratta del divisore formato dai punti che appartengono ad ogni divisore del sistema lineare $|D|$ (stiamo confondendo il divisore $B(D)$ con il suo supporto).

È facile vedere che $P \in B(D)$ se e solo se $\mathcal{L}(D-P) = \mathcal{L}(D)$, e anche se e solo se $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D-P) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D)$. Infatti basta controllare che $\mathcal{L}(D-P) \supseteq \mathcal{L}(D)$ (l'altra inclusione essendo sempre vera) vale sse ogni funzione f con $D + \text{div}(f) \geq 0$ ha anche $D + \text{div}(f) \geq P$, quindi sse ogni divisore in $|D|$ è maggiore o uguale a P .

Di conseguenza, D non ha punti base (cioè $B(D) = 0$, ovvero vuoto) se e solo se per ogni $P \in X$ si ha che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D-P) + 1$.

Per un sistema lineare generico $G \leq |D|$, definiamo il divisore di base di G , o l'insieme dei punti base di G , come $B(G) = \inf\{E : E \in G\} = \bigcap_{E \in G} E$. Si verifica allora che $P \in B(G)$ se e solo se G ha come sovrastante uno spazio vettoriale $V \leq \mathcal{L}(D)$ tale che $V \leq \mathcal{L}(D-P)$.

3.1.3. RIMOZIONE DEI PUNTI BASE. Se $D \in \text{Div}(X)$ e $F = B(D)$, allora $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D-F)$ e il divisore $D-F$ non ha punti base. Infatti basta procedere per induzione e togliere una alla volta i punti base.

3.2. DEFINIZIONE (MAPPE PROIETTIVE OLOMORFE). Sia X una SdR compatta. Una funzione $X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si dice ologomorfa se intorno ad ogni punto si scrive come $P \mapsto \begin{pmatrix} g_0(P) \\ \vdots \\ g_n(P) \end{pmatrix}$ con le funzioni g_i ologomorfe (in un intorno del punto). Si tratta in effetti delle mappe ologomorfe da X in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ in quanto varietà complesse (la seconda di dimensione n), e potremmo indicarle con $\mathcal{O}(X, \mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$.

3.2.1. Naturalmente, per costruire mappe proiettive ologomorfe, è inutile usare funzioni ologomorfe globali su X , poiché si otterrebbero solo mappe costanti. Il teorema seguente caratterizza le mappe proiettive ologomorfe in termini di funzioni meromorfe su X .

3.2.2. TEOREMA (COSTRUZIONE MEROMORFA DI MAPPE PROIETTIVE). Esiste una applicazione canonica

$$\mathbb{P}^n(\mathcal{M}(X)) \longrightarrow \mathcal{O}(X, \mathbb{P}^n(\mathbb{C}))$$

che è una biiezione, e identifica le mappe ologomorfe $X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ con le $(n+1)$ -uple non nulle di funzioni meromorfe su X , a meno di fattori moltiplicativi non nulli in $\mathcal{M}(X)$.

L'unico punto delicato è in effetti la definizione dell'applicazione, che si ottiene in questo modo: se $\begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^n(\mathcal{M}(X))$ per ogni punto $P \in X$ poniamo $o_P = \min_i \text{ord}_P(g_i)$; allora $\min_i \text{ord}_P(z^{-o_P} g_i) = 0$ e ha senso porre $g(P) = (z^{-o_P} \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix})(P)$ (in quanto punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$). Questa corrispondenza dà chiaramente una biiezione. $\square$

Si osservi che la sottigliezza della costruzione consiste nel fatto che si vuol definire l'immagine in P anche quando tutte le g_i si annullano in P , oppure quando qualcuna delle g_i ha polo in P ; la soluzione è moltiplicare per una funzione meromorfa in modo tale che nessuna funzione abbia polo nel punto in cui calcolare, e almeno una abbia valore non nullo (cioè ordine nullo).

3.2.3. NON DEGENERAZIONE. Una mappa proiettiva ologomorfa $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è detta non degenerare se e solo se l'immagine $\varphi(X)$ non è contenuta in alcun iperpiano di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Questo equivale evidentemente a dire che la $(n+1)$ -upla di $\mathbb{P}^n(\mathcal{M}(X))$ corrispondente a φ è formata da funzioni meromorfe linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$.

3.2.4. GRADO. Il grado di una mappa proiettiva olomorfa $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è il numero di punti (contati con molteplicità) di intersezione dell'immagine $\varphi(X)$ con un generico iperpiano di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Non si confonda con il grado della funzione $X \rightarrow \varphi(X)$ tra SdRc.

La nozione di grado si può definire per qualunque curva algebrica in $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ma si faccia attenzione che non si legge direttamente dal sistema di equazioni polinomiali che definisce la curva (se non nel piano proiettivo).

3.2.5. MAPPE DOMINANTI. Una mappa proiettiva olomorfa $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ si dice dominante se non si può ottenere per proiezione da mappe $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ con $m \geq n$. Ricordiamo che, dati $\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \leq \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ e un complementare L , la proiezione su $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ di centro L è la mappa π definita da $\pi(P) = (P \vee L) \cap \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ che va da $\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \setminus L$ a $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

3.3. TEOREMA (CORRISPONDENZA FONDAMENTALE). *Esistono delle biiezioni canoniche*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sistemi lineari senza p.b.} \\ \bullet \text{ di dimensione } n \\ \bullet \text{ di grado } r \end{array} \right\} \cong \left\{ \begin{array}{l} \text{Mappe olomorfe non degeneri} \\ \bullet X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ \bullet (\text{immagine}) \text{ di grado } r \end{array} \right\} / \text{proiettività}$$

che si restringono a biiezioni canoniche tra i sottinsiemi

$$\{\text{Sistemi lineari completi}\} \cong \{\text{Mappe olomorfe dominanti}\} / \text{proiettività}$$

Tutte le asserzioni seguono facilmente dalla costruzione delle due mappe, una inversa dell'altra, che ora diamo esplicitamente.

($\rightarrow$) Dato un sistema lineare $G \leq |D|$, consideriamo il corrispondente sottospazio vettoriale V di $\mathcal{L}(D)$, e una sua base $g_0, \dots, g_n$ su $\mathbb{C}$. L'elemento $\begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$ di $\mathbb{P}^n(\mathcal{M}(X))$ determina allora la

mappa proiettiva olomorfa voluta.

Si osservi che la scelta di un'altra base di V determina un cambiamento della mappa per una proiettività di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

($\leftarrow$) Data una mappa olomorfa $g : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ abbiamo due costruzioni equivalenti per il sistema lineare associato.

- (1) La prima consiste nel considerare il divisore $D = -\min_i \text{div}(g_i)$, e definire il sistema lineare usando $V_g = \langle g_0, \dots, g_n \rangle_{\mathbb{C}}$ (sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(D)$) come $|g| = \{\text{div}(f) + D : f \in V_g\}$ (sottospazio proiettivo di $|D|$).

Si osservi che D dipende dalla scelta delle g_i , ma i sistemi lineari $|D|$ e $|g|$ dipendono solo da g .

- (2) La seconda costruzione è più geometrica e considera le sezioni iperpiane di $g(X)$: se H è un iperpiano di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ di equazione η , scelto un iperpiano di equazione η_0 che non intersechi $H \cap g(X)$, definiamo $\text{div}(g^*H) \in \text{Div}(X)$ come il divisore di zero di $\frac{\eta}{\eta_0} \circ g : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Allora $|g| = \{\text{div}(g^*H) : H \text{ iperpiano di } \mathbb{P}^n(\mathbb{C})\}$.

L'equivalenza dei due metodi si può vedere considerando un iperpiano H di equazione $\sum_i a_i X_i = 0$ e supponendo che g_0 abbia ordine minimo (possiamo supporre nullo) tra le g_i (nel punto P considerato). Allora nella costruzione (1) abbiamo il divisore $\text{div}(\sum_i a_i g_i) - \text{div}(g_0)$, mentre nella costruzione (2)

otteniamo il divisore $\text{div}\left(\frac{\sum_i a_i X_i}{X_0} \circ g\right) = \text{div}\left(\frac{\sum_i a_i g_i}{g_0}\right) = \text{div}(\sum_i a_i g_i) - \text{div}(g_0)$.

Che le costruzioni siano una l'inversa dell'altra si vede facilmente considerando la costruzione (1) verso sinistra.

Che le mappe proiettive olomorfe siano non degeneri dipende dal fatto che sono generate usando funzioni olomorfe linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$.

Che i sistemi lineari che si ottengono siano senza punti base si vede facilmente in base alla costruzione (2): per ogni punto c'è qualche iperpiano H che non lo contiene.

Infine che i sistemi completi corrispondano a mappe dominanti discende subito dalle definizioni corrispondenti. $\square$

3.3.1. A scanso di equivoci, si faccia attenzione al fatto che anche sistemi lineari con punti base danno luogo a mappe proiettive olomorfe non degeneri, usando esattamente la stessa costruzione; il punto è che danno luogo esattamente alla stessa mappa di un sistema lineare senza punti base. Pertanto questa richiesta nell'enunciato serve solo per ottenere una biiezione tra sistemi lineari senza p.b. e mappe olomorfe a meno di proiettività; altrimenti si avrebbe una applicazione suriettiva tra

sistemi lineari e mappe olomorfe a meno di proiettività con una sezione avente immagine nei sistemi lineari senza punti base.

4. Sistemi molto ampi.

4.1. DEFINIZIONE-TEOREMA (DIVISORI MOLTO AMPI). *La mappa proiettiva $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ definita dal (sistema lineare completo del) divisore D è:*

- (1) *iniettiva se e solo se $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D - P - Q) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - 2$ per ogni $P \neq Q$ punti di X ;*
- (2) *immersione (cioè iniettiva con differenziale mai nullo) se e solo se $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D - P - Q) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - 2$ per ogni $P, Q \in X$ (cioè anche per $P = Q$).*

Un divisore si dice molto ampio se la mappa proiettiva corrispondente è una immersione, cioè se vale la seconda condizione.

Per la dimostrazione del teorema, basta osservare che $\varphi(P) = \varphi(Q)$ se e solo se $\mathcal{L}(D - P - Q) = \mathcal{L}(D - P) = \mathcal{L}(D - Q)$ (le funzioni in $\mathcal{L}(D)$ si annullano in P sse si annullano in Q), e l'analoga asserzione per " $P = Q$ " (cioè quando in P si annulla il differenziale di φ). $\square$

4.1.1. Si osservi che le mappe iniettive che non siano immersioni sono meno interessanti, perché danno luogo a curve singolari. Per esempio $z \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ z^2 \\ z^3 \end{pmatrix}$ è iniettiva, ma non immersione e l'immagine nel piano contiene una cuspid.

4.1.2. CONDIZIONI NUMERICHE. Come applicazione del teorema di Riemann-Roch vediamo ora criteri "numerici" sul grado dei divisori per essere senza p.b. e molto ampi.

- (1) *Un divisore D con $\deg(D) \geq 2g$ non ha punti base.* Infatti abbiamo che $K - D$ ha grado ≤ -2 e risulta

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) &= \deg(D) + 1 - g \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D - P) &= \deg(D - P) + 1 - g = \deg(D) - g \end{aligned}$$

da cui segue $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D - P) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - 1$ come chiede il criterio.

- (2) *Un divisore D con $\deg(D) \geq 2g + 1$ (non ha punti base ed) è molto ampio.* Infatti abbiamo che $K - D$ ha grado ≤ -3 e risulta

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) &= \deg(D) + 1 - g \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D - P - Q) &= \deg(D - P - Q) + 1 - g = \deg(D) - g - 1 \end{aligned}$$

da cui segue $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D - P - Q) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - 2$ come chiede il criterio.

4.1.3. Dalle osservazioni precedenti segue che ogni divisore $D \in \text{Div}(X)$ di grado d almeno $2g + 1$ immerge X come curva liscia (di grado d) in uno spazio proiettivo di dimensione $\dim |D| = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - 1 = d - g \geq g + 1$.

Più precisamente, usando $D = (2g + 1)P$ per un fissato $P \in X$, possiamo avere una immersione $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^{\dim |D|}(\mathbb{C})$ come curva di grado d in modo tale che $X \setminus \{P\}$ si immerga in uno spazio affine $\mathbb{A}^{\dim |D|}(\mathbb{C})$. Infatti esiste un iperpiano H di $\mathbb{P}^{\dim |D|}(\mathbb{C})$ tale che $\varphi^*H = (2g + 1)P$, e possiamo usare come spazio affine il complementare di H .

4.2. CURVE RAZIONALI NORMALI. Consideriamo la sfera di Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, che è di genere 0, per cui ogni divisore del tipo $D_n = n\infty$ è molto ampio se $n \geq 1$. Si vede subito che $\mathcal{L}(n\infty) = \langle 1, z, z^2, \dots, z^n \rangle_{\mathbb{C}}$ e otteniamo le immersioni proiettive date da

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \\ z \equiv \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^n \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} z_0^n \\ z_0^{n-1}z_1 \\ \vdots \\ z_1^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dette immersioni di Veronese, le cui immagini si dicono le curve razionali normali. Esploriamo i primi casi:

- (1) per $n = 1$ troviamo la funzione identica di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in sè.

- (2) per $n = 2$ troviamo l'immersione di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ come conica non degenera di equazione $Z_0 Z_2 - Z_1^2$.
- (3) per $n = 3$ troviamo l'immersione di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ come curva di grado 3 definita parametricamente da

$$\begin{cases} Z_0 = \mu^3 \\ Z_1 = \lambda \mu^2 \\ Z_2 = \lambda^2 \mu \\ Z_3 = \lambda^3 \end{cases}$$

(detta cubica sghebbia) ovvero per esempio dalle tre equazioni cartesiane

$$Z_0 Z_2 - Z_1^2, \quad Z_0 Z_3 - Z_1 Z_2, \quad Z_1 Z_3 - Z_2^2$$

Si osservi l'interessante fenomeno per cui una curva nello spazio proiettivo tridimensionale può aver bisogno di tre equazioni per essere definita globalmente (rinunciando ad una equazione si hanno altre componenti). Però nell'intorno di ogni punto (in effetti in opportuni spazi affini) sono sufficienti due equazioni (come ci si aspetta) per definire la curva: si dice allora che si tratta di una curva "localmente ad intersezione completa", ma non "ad intersezione completa".

4.3. CURVE ELLITTICHE NORMALI. Consideriamo il toro $\mathbb{T}$, che è di genere 1, per cui ogni divisore del tipo $D_n = nP$ è molto ampio se $n \geq 3$. In questo caso $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nP) = n$ e dunque tali divisori determinano immersioni $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ come curva di grado n :

- (1) per $n = 3$ abbiamo $\mathbb{T} \hookrightarrow \mathbb{P}^2$ come cubica liscia;
- (2) per $n = 4$ abbiamo $\mathbb{T} \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ come curva liscia di grado 4;
- (3) per $n = 5$ abbiamo $\mathbb{T} \hookrightarrow \mathbb{P}^4$ come curva liscia di grado 5.

Le immagini di tali immersioni si dicono curve ellittiche normali.

5. Sistemi canonici (e SdR iperellittiche).

Un sistema lineare particolarmente importante è quello canonico, associato al divisore di un qualsiasi differenziale. Chiaramente nel caso della sfera di Riemann tale sistema lineare è nullo, quindi non interessante. Ricordiamo che se $K = k \operatorname{div}(\omega)$ con $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$, allora $\deg K = 2g - 2$ e $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) = g$ (quindi il sistema canonico ha grado $2g - 2$ e dimensione $g - 1$).

5.1. TEOREMA (PUNTI BASE CANONICI). Se $g \geq 1$ il sistema canonico è privo di punti base.

Infatti basta verificare che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - P) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) - 1 = g - 1$ per ogni $P \in X$, e questo segue dalle uguaglianze

$$1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P) = \deg(P) + 1 - g + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - P)$$

(la prima perché $g \geq 1$, la seconda per Riemann-Roch). □

5.1.1. Da questo segue che la mappa proiettiva $k : X \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C})$ definita da K ha come sezioni iperpiani esattamente il sistema lineare completo di K .

5.2. Cerchiamo di capire quando la mappa canonica è una immersione. Dal criterio generale sappiamo che k è immersione se e solo se $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - P - Q) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) - 2$ per ogni $P, Q \in X$.

Viceversa, k non è immersione se e solo se esistono $P, Q \in X$ tali che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - P - Q) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) - 1 = g - 1.$$

Usando il teorema di Riemann-Roch possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - P - Q) &= \deg(K - P - Q) + 1 - g + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P + Q) \\ &= \deg(K) - 2 + 1 - g + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P + Q) \\ &= g - 3 + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P + Q) \end{aligned}$$

e quindi la condizione di non immersione equivale alla esistenza di $P, Q \in X$ tali che

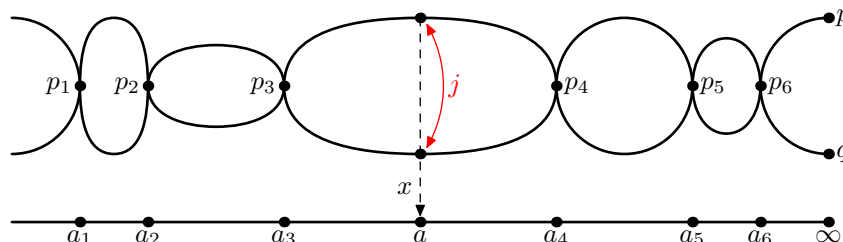
$$g - 3 + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P + Q) = g - 1,$$

e insomma $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P + Q) = 2$. Questo significa che esiste una funzione non costante in $\mathcal{L}(P + Q)$, dunque una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ che sia rivestimento ramificato con 2 fogli.

Questo motiva la seguente definizione.

5.3. DEFINIZIONE (SDR IPERELLITTICHE). Una SdR compatta si dice iperellittica se ammette una funzione meromorfa che dia un rivestimento di grado 2 della sfera di Riemann.

5.3.1. REALIZZAZIONI PIANE PER LE SDR IPERELLITTICHE. Sia X SdR iperellittica di genere g ; dunque per ipotesi esiste una mappa olomorfa $x : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ di grado 2 (rivestimento ramificato con 2 fogli). Dal teorema di Riemann-Hurwitz possiamo dedurre che $\text{ram}(x) = 2g + 2$ (inoltre ogni punto di ramificazione ha ramificazione 1: di più non può!), e allora abbiamo $\text{Ram}(x) = p_1 + \dots + p_{2g+2}$. Sia $\text{div}_\infty(x) = p + q$ (possiamo supporre che non sia di ramificazione, modulo comporre con una proiettività della retta). Diciamo $a_i = x(p_i)$ per ogni $i = 1, \dots, 2g + 2$. Il seguente disegno può illustrare la situazione:



Definiamo la mappa $j : X \rightarrow X$ che per ogni $a \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ scambia tra loro le (due) antimmagini di a tramite x . Ovviamente abbiamo che $j^2 = \text{id}_X$.

Consideriamo ora il divisore $D = (g + 1)p + (g + 1)q$. Poiché $\deg(D) = 2g + 2$ possiamo usare la formula di Riemann-Roch semplificata

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \deg(D) + 1 - g = g + 3.$$

Ora è chiaro che $j(D) = D$, e quindi viene indotto un endomorfismo lineare $j^* : \mathcal{L}(D) \rightarrow \mathcal{L}(D)$ con $(j^*)^2 = \text{id}$, quindi diagonalizzabile con autovalori ± 1 (si tratta di una simmetria). Abbiamo quindi la decomposizione in autospazi $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D)^+ \oplus \mathcal{L}(D)^-$ e possiamo già dire che $\mathcal{L}(D)^+ = \langle 1, x, \dots, x^{g+1} \rangle$, avente dimensione $g + 2$ (si tratta di composizioni di x con funzioni meromorfe sulla sfera con ordini di polo a p e q non eccedenti $g + 1$...), e quindi $\mathcal{L}(D)^- = \langle y \rangle$ risulta di dimensione 1 e $j^*y = -y$.

Vogliamo vedere che $y^2 = cg(x)$ con $c \in \mathbb{C}$ non nulla e $g(x) = \prod_i (x - a_i)$ polinomio nella x di grado $2g + 2$. Per questo basta controllare che y^2 e $g(x)$ abbiano lo stesso divisore, in modo che il loro quoziente sia olomorfo e dunque costante. Calcoliamo quindi i divisori: risulta

$$\text{div}(y) = \text{div}_0(y) - \text{div}_\infty(y) = \sum_i p_i - D$$

(perché $y(p_i) = -y(p_i)$ e quindi tutti i p_i entrano nel $\text{div}_0(y)$, sono $2g + 2$, d'altra parte gli unici poli possibili sono p e q , al massimo d'ordine $g + 1$ ciascuno...), e

$$\text{div}(g(x)) = \sum_i \text{div}(x - a_i) = \sum_i \text{div}_0(x - a_i) - \sum_i \text{div}_\infty(x - a_i) = 2 \sum_i p_i - 2D$$

come si voleva.

5.3.2. Per esercizio, si osservi che j induce un endomorfismo j^* di $\Omega^1(X)$ di quadrato identico, e che in effetti è $j^* = -\text{id}$ (un differenziale fissato da j^* proviene da uno della retta proiettiva...).

5.3.3. Conclusione del discorso precedente è che una SdR è iperellittica se e solo se è normalizzazione di una curva algebrica piana iperellittica, cioè di una curva che in opportuno riferimento ammette equazione del tipo $Y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (X - a_i)$ (con $a_i \neq a_j$ per $i \neq j$).

In particolare, SdR iperellittiche ne esistono di ogni genere.

5.3.4. DIFFERENZIALI PER LE SDR IPERELLITTICHE E MAPPA CANONICA. Dalla descrizione precedente segue che

$$\begin{aligned} \Omega^1(X) &= \left\langle \frac{dx}{y}, x \frac{dx}{y}, \dots, x^{g-1} \frac{dx}{y} \right\rangle \\ \mathcal{L}(K) &= \langle 1, x, \dots, x^{g-1} \rangle \end{aligned}$$

e la mappa canonica

$$k : X \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C}) \quad P \mapsto \begin{pmatrix} x(P) \\ \vdots \\ x^{g-1}(P) \end{pmatrix}$$

si fattorizza attraverso x seguita dalla mappa di Veronese

$$X \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C}) \quad P \mapsto x(P), \quad z \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{g-1} \end{pmatrix}$$

e quindi mostra che il rivestimento ramificato di ordine 2 della sfera di Riemann per una SdR iperellittica è canonico (sia nel senso che è intrinseco, sia nel senso che è definito dal divisore canonico).

5.4. TEOREMA (SISTEMI CANONICI). *Sia X SdR compatta di genere $g \geq 1$. Allora la mappa canonica $k : X \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C})$ è una immersione se e solo se X non è iperellittica. Precisamente:*

- (1) *se X non è iperellittica allora k immerge X in $\mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C})$ come curva di grado $2g - 2$;*
- (2) *se X è iperellittica allora k si fattorizza tramite un rivestimento con due fogli della sfera di Riemann, seguito dalla immersione di Veronese in $\mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C})$.*

È già stato dimostrato tutto. □

6. Classificazione di SdRc per generi piccoli.

Siamo ormai in grado di usare il teorema di Riemann-Roch per classificare le SdR per generi piccoli, e anche di dimostrare in generale che ogni SdR compatta si può immergere come curva algebrica (cioè definita da equazioni polinomiali) in qualche spazio proiettivo (e anzi, come già sappiamo, in uno spazio affine se rinunciamo ad un solo punto). *Il punto centrale è che la conoscenza delle funzioni meromorfe sulla SdR permette di avere informazioni sulla superficie stessa.*

6.1. SDR DI GENERE 0. *Se X è SdR compatta, esiste $P \in X$ tale che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P) > 1$ se e solo se X è di genere 0, e in tal caso X è isomorfo alla sfera di Riemann $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.*

Infatti, questo equivale all'esistenza di una funzione olomorfa non costante $f : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ con unico polo in P , quindi rivestimento con un foglio, e dunque isomorfismo.

Di conseguenza possiamo dire che il genere di X è maggiore di 0 se e solo se per ogni $P \in X$ si ha $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P) = 1$. E viceversa, il genere di X è 0 (e dunque $X \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) se e solo se per un (e allora per ogni) $P \in X$ si ha $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P) = 2$.

6.2. SDR DI GENERE 1. *Una SdR compatta X è di genere 1, se e solo se si immerge come cubica liscia nel piano proiettivo complesso (dunque se e solo se è un toro).*

Infatti, usando $D = 3P$ con $P \in X$, che sappiamo essere un divisore molto ampio, e usando ripetutamente Riemann-Roch, possiamo studiare gli spazi $\mathcal{L}(nP)$:

$$\begin{array}{ll} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P) = 1 & \mathcal{L}(P) = \langle 1 \rangle_{\mathbb{C}} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(2P) = 2 & \mathcal{L}(2P) = \langle 1, x \rangle_{\mathbb{C}} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(3P) = 3 & \mathcal{L}(3P) = \langle 1, x, y = x' \rangle_{\mathbb{C}} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(4P) = 4 & \mathcal{L}(4P) = \langle 1, x, y, x^2 \rangle_{\mathbb{C}} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(5P) = 5 & \mathcal{L}(5P) = \langle 1, x, y, x^2, xy \rangle_{\mathbb{C}} \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(6P) = 6 & \mathcal{L}(6P) = \langle 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3 \rangle_{\mathbb{C}} \end{array}$$

e vediamo che nell'ultimo scritto, che è di dimensione 6, si trovano 7 funzioni meromorfe: dunque ci deve essere tra loro una relazione di dipendenza lineare su $\mathbb{C}$, cioè una equazione algebrica, che necessariamente coinvolge le ultime due funzioni incontrate, cioè y^2, x^3 : si tratta quindi di una relazione cubica.

Noi abbiamo già realizzato questa situazione usando $x = \wp$ e $y = \wp'$.

6.3. SDR DI GENERE 2. *Ogni SdR compatta X di genere 2, è iperellittica, e quindi è la normalizzazione di una curva proiettiva piana iperellittica di grado 6.*

Qui potremmo tentare di usare divisori D di grado $2g - 1 = 3$, che darebbero chiaramente una mappa $X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (perché usando Riemann-Roch si ha $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = 2$), ma si tratterebbe di mappe di grado 3, e non 2.

Usando invece il sistema associato ad un divisore canonico $K = \text{kdiv}(\omega)$, abbiamo $\deg(K) = 2g - 2 = 2$ e $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) = g = 2$, che dunque definisce una funzione $X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ non costante di grado 2; quindi si tratta di una SdR iperellittica, che sappiamo realizzare come (normalizzazione di una) curva proiettiva piana iperellittica (di grado 6).

6.4. EQUAZIONI ALGEBRICHE. Per salire ancora con il genere, bisogna disporre di qualche strumento generale che permetta di trovare equazioni algebriche soddisfatte dalle immagini di una SdRc tramite immersioni proiettive definite da divisori. Si tratta di generalizzare il procedimento che abbiamo usato per le SdR di genere 1.

6.4.1. Consideriamo una SdR compatta X , un suo divisore molto ampio D di grado d e dimensione n , e l'immersione $g : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ definita da D .

- (1) Osserviamo che $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]_k = \binom{n+k}{k}$ (dimensione dello spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado k in $n+1$ variabili), e quindi tale dimensione è $O(k^n/n!)$. È in questi spazi che bisogna cercare le possibili equazioni per $g(X)$.
- (2) Considerando $g : X \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, per ogni $F \in \mathbb{C}[\underline{X}]_k$ possiamo definire il divisore in X di F similmente a quanto fatto per gli iperpiani:

$$\text{div}_X(F) = \text{div}_0 \left(\frac{F}{\Phi} \circ g \right)$$

usando $\Phi \in \mathbb{C}[\underline{X}]_k$ (per esempio k volte un iperpiano) che non si annulli nei punti di $g(X)$ in cui si annulla F . Ora è facile vedere che $\text{div}_X(F) \sim kD$ (equivalenza lineare), e quindi $\frac{\Phi}{F} \circ g$ è funzione meromorfa su X con poli limitati da kD .

Abbiamo quindi una applicazione lineare

$$R_k : \mathbb{C}[\underline{X}]_k \longrightarrow \mathcal{L}(\text{div}(F)) = \mathcal{L}(kD) \quad F \mapsto \frac{\Phi}{F} \circ g$$

il cui nucleo è descritto dai polinomi che si annullano identicamente su X , quindi equazioni per $g(X)$.

- (3) Applicando Riemann-Roch, abbiamo che

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(kD) &= \deg(kD) + 1 - g + \dim_{\mathbb{C}}(K - kD) \\ &= \deg(kD) + 1 - g \quad \text{per } k \gg 0 \\ &= O(k \deg(D)) \ll O(k^n/n!) \quad \text{per } k \gg 0. \end{aligned}$$

Dunque, risulta che

$$\dim_{\mathbb{C}} \ker(R_k) \geq \binom{n+k}{k} - (\deg(kD) + 1 - g) \gg 0 \quad \text{per } k \gg 0$$

(significa che vi sono molte equazioni polinomiali per $g(X)$).

6.4.2. OSSERVAZIONI.

- (1) Il nucleo di ogni applicazione R_k ha una parte ovvia che viene dal nucleo dell'applicazione precedente: se $F_1, \dots, F_s \in \ker(R_k)$, allora ogni combinazione del tipo $\sum_i l_i F_i$ con $\deg l_i = 1$ appartiene a $\ker(R_{k+1})$.
- (2) È chiaro a priori che per $k = 1$ si ha che R_1 è isomorfismo, e il suo nucleo è zero ($g(X)$ non è degenere, cioè non è contenuta in alcun iperpiano).
- (3) È utile notare che se $\deg(D) \geq g$, allora si ha che

$$\deg(kD) = k \deg(D) \geq kg \geq \begin{cases} 2g - 1 & \text{se } k \geq 2 \\ 2g + 1 & \text{se } k \geq 3 \end{cases}$$

(permette di usare formule semplificate per Riemann-Roch).

- (4) Infine, applichiamo i discorsi precedenti al caso del sistema canonico: usiamo X SdR compatta di genere $g \geq 3$, $\deg(K) = 2g - 2$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) = g$. Risulta allora che

$$\dim_{\mathbb{C}}(\ker(R_k)) \geq \binom{k+g-1}{k} - (k(2g-2) + 1 - g) = \binom{k+g-1}{k} - 2(g-1)k + (g-1)$$

(per k sufficientemente grande).

6.5. SDR DI GENERE 3. Nel caso di SdRc X di genere $g = 3$, supponiamo non iperellittiche e quindi $k : X \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ immersione, abbiamo che $\dim_{\mathbb{C}}(\ker(R_k)) \geq \binom{k+2}{k} - 4k + 2$; esplicitamente:

k	$\dim_{\mathbb{C}}(\ker(R_k))$
2	$6 - 8 + 2 = 0$
3	$10 - 12 + 2 = 0$
4	$15 - 16 + 2 = 1$

e si trova (almeno) una equazione di quarto grado (trattandosi di curve piane non si può avere più di una equazione). Quindi *le SdR compatte di genere 3 sono di due tipi: o iperellittiche (e allora sono normalizzazioni di curve proiettive piane iperellittiche di grado 8), oppure quartiche piane lisce.*

6.6. SDR DI GENERE 4. Nel caso di SdRc X di genere $g = 4$, supponiamo non iperellittiche e quindi $k : X \rightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ immersione, abbiamo che $\dim_{\mathbb{C}}(\ker(R_k)) \geq \binom{k+3}{k} - 6k + 3$; esplicitamente:

k	$\dim_{\mathbb{C}}(\ker(R_k))$
2	$10 - 12 + 3 = 1$
3	$20 - 18 + 3 = 5$

e si trova (almeno) una equazione di secondo grado e una indipendente di terzo grado. Quindi *le SdR compatte di genere 4 sono di due tipi: o iperellittiche (e allora sono normalizzazioni di curve proiettive piane iperellittiche di grado 10), oppure curve lisce intersezione di una quadrica e di una cubica in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$.*

6.7. SDR DI GENERE 5. Le SdRc di genere 5 si dividono in iperellittiche (normalizzazioni di curve piane iperellittiche di grado 12), e non iperellittiche che sono di due tipi: rivestimenti ramificati tripli della sfera di Riemann (curve trigonali) e intersezioni (complete) lisce di quadriche in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$.

6.8. SDR DI GENERE 6. Le SdRc di genere 6 si dividono in iperellittiche (normalizzazioni di curve piane iperellittiche di grado 14), e non iperellittiche che sono di tre tipi: rivestimenti ramificati tripli della sfera di Riemann (curve trigonali), intersezioni (complete) lisce di quadriche in $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$, e quintiche piane lisce.

6.9. SDR DI GENERE $g \geq 7$. Le SdRc di genere g almeno 7 si dividono in iperellittiche (normalizzazioni di curve piane iperellittiche di grado $2g + 2$), e non iperellittiche che sono di due tipi: rivestimenti ramificati tripli della sfera di Riemann (curve trigonali) e curve di grado $2g - 2$ intersezioni lisce di quadriche (?) in $\mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C})$.

7. Equivalenza tra SdRc e curve algebriche complesse.

7.0. EQUIVALENZE. Vale la pena di far notare esplicitamente che alcune delle nozioni che abbiamo via via incontrato: curve algebriche proiettive complesse (lisce, oppure piane con singolarità ordinarie), Superficie di Riemann compatte, campi di trascendenza 1 su $\mathbb{C}$ (cioè estensioni algebriche di $\mathbb{C}(z)$ dove z è trascendente su $\mathbb{C}$) non solo sono molto legati, ma sono nozioni equivalenti tra loro in un senso molto forte. Precisamente esse formano delle categorie equivalenti.

Parlare di categorie significa parlare di una classe di oggetti e per ogni coppia di essi definire anche l'insieme dei morfismi ammessi e delle composizioni tra di loro (con le ovvie richieste circa identità e associatività). Tra due categorie si parla di funtori se definiamo come trasformare oggetti dell'una in oggetti dell'altra, e anche morfismi tra oggetti in morfismi tra le immagini (commutando con le composizioni: questo si può fare in due modi: covariante se l'ordine di composizione è lo stesso, controvariante altrimenti).

Si parla di equivalenze (di categorie) se abbiamo funtori che siano biiettivi per i morfismi, e che siano "essenzialmente suriettivi" per gli oggetti: significa che ogni oggetto della seconda categoria è isomorfo a uno dell'immagine della prima.

Per fare un esempio banale: la categoria degli spazi vettoriali di dimensione finita su un campo K (oggetti gli spazi vettoriali di dimensione finita, morfismi le mappe lineari) è equivalente alla categoria che ha come oggetti i numeri naturali e come morfismi tra n e m l'insieme delle matrici $m \times n$ (con composizione il prodotto di matrici!).

7.1. LE CATEGORIE. Nel nostro caso abbiamo messo in luce (almeno) tre categorie:

7.1.1. SUPERFICIE DI RIEMANN COMPATTE. Oggetti sono le SdRc, e morfismi tra di loro sono le mappe olomorfe.

7.1.2. CURVE ALGEBRICHE PROIETTIVE COMPLESSE. Qui potremmo avere varie scelte per gli oggetti: o tutte le curve algebriche proiettive irriducibili, o solo quelle lisce (senza punti singolari, ma bisogna allora usare curve in $\mathbb{P}^n$ con $n > 2$), oppure quelle piane (irriducibili, ma bisogna allora ammettere le singolarità almeno ordinarie). Come morfismi usiamo le funzioni razionali (sono definite sulla curva tranne eventualmente un numero finito di punti).

7.1.3. CAMPI DI TRASCENDENZA 1 SU $\mathbb{C}$. Gli oggetti sono le estensioni finite di una estensione trascendente di $\mathbb{C}$. I morfismi sono applicazioni di algebre sopra $\mathbb{C}$.

7.2. LE EQUIVALENZE. Vediamo come passare dall'una all'altra di queste categorie; alcuni funtori sono semplici, altri sono più difficili; determinare poi che sono delle equivalenze è facile tra campi e curve algebriche, mentre richiede fatti non banali per le SdRc.

7.2.1. CURVE ALGEBRICHE E CAMPI. Ad ogni curva complessa irriducibile $\mathcal{C}$ definita da un ideale primo $\mathcal{P}$ in $\mathbb{C}[\underline{X}]$ possiamo associare il campo dei quozienti di $\mathbb{C}[\mathcal{C}] = \mathbb{C}[\underline{X}]/\mathcal{P}$, che di solito si indica con $\mathbb{C}(\mathcal{C})$ e si chiama campo delle funzioni razionali su $\mathcal{C}$. Nel caso delle curve piane è molto facile, poiché sono definite da un polinomio irriducibile (che genera un ideale primo). È chiaro allora che una mappa tra due curve determina un morfismo *in direzione opposta, quindi darà un funtore controvariante*, tra i due campi.

Viceversa, ogni campo di trascendenza 1 su $\mathbb{C}$ si scrive come $\mathbb{C}(x)[y]$ dove y è algebrico su $\mathbb{C}(x)$, cioè soddisfa ad un polinomio $P(x, y) = 0$: a questo campo associamo la curva (piana, eventualmente singolare) data dagli zeri di quel polinomio, o una sua normalizzazione algebrica. Anche in questo caso si vede facilmente l'azione sui morfismi.

Il secondo funtore fa vedere che il primo è essenzialmente suriettivo. Che si tratti di biiezioni tra i morfismi si può vedere sia esplicitamente, sia componendo i due funtori.

7.2.2. SDRc E CAMPI. Ad ogni SdRc X possiamo associare il suo campo delle funzioni mero-morfe $\mathcal{M}(X)$; qui abbiamo un problema: dovremmo dimostrare che è di trascendenza 1 su $\mathbb{C}$, e sappiamo che è difficile anche dimostrare che non è banale; superato questo problema, è chiara l'azione sui morfismi (per composizione, di nuovo controvariante).

Costruire un funtore in senso inverso, è chiaramente più facile passando per le curve algebriche: un campo definisce una curva algebrica piana, e possiamo prendere una sua desingularizzazione come SdRc.

Il teorema di struttura di $\mathcal{M}(X)$ (cioè che è campo di trascendenza 1 su $\mathbb{C}$) si può dimostrare a partire dalle seguenti due proprietà: per ogni punto $P \in X$ esiste una funzione f con zero semplice in P , per ogni coppia di punti esiste una funzione f con $f(P) \neq f(Q)$ (si può anche supporre che f abbia zero in P e polo in Q). Queste proprietà si estendono facilmente ad avere funzioni che hanno uno zero in un prefissato P e poli in prefissati $Q_1, \dots, Q_n$, anche con ordini maggiori o uguali a un prefissato intero positivo, e anche ad avere prefissate code di Laurent in prefissati punti $P_1, \dots, P_n$.

Ora, data una funzione f non costante e quindi trascendente su $\mathbb{C}$, mostrare che il grado di trascendenza di $\mathcal{M}(X)$ è 1 si può fare con un confronto di dimensioni: supponiamo $f, g \in \mathcal{M}(X)$, e siano entrambe in $\mathcal{L}(D)$; allora $f^i g^j \in \mathcal{L}(nD)$ se $i + j \leq n$, indipendenti se supponiamo indipendenti f e g , il che direbbe che $\dim_{\mathbb{C}}(nD) \geq \binom{n+2}{2}$, mentre sappiamo che $\dim_{\mathbb{C}}(nD) \leq 1 + \deg(nD) = 1 + n \deg(D)$ (stime incompatibili per n grande: una quadratica, l'altra lineare).

Per dimostrare poi che $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] < \infty$ si può mostrare che è esattamente $= \deg \operatorname{div}_{\infty}(f)$. Se fosse maggiore potremmo dimostrare che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nD) \geq (n - n_0 + 1)(d + 1)$ (usando $g_0, \dots, g_d$ linearmente indipendenti su $\mathbb{C}(f)$, e $p_i(f)g_i \in \mathcal{L}(n_0D)$: allora $f^i p_j(f)g_j \in \mathcal{L}(nD)$ linearmente indipendenti per $i \leq n - n_0$), mentre $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nD) \leq 1 + nd$, di nuovo stime incompatibili. Infine basta trovare quel numero di funzioni linearmente indipendenti: ponendo $\operatorname{div}_{\infty}(f) = \sum_i n_i P_i$ per ogni $j \leq n_i$ troviamo $g_{i,j}$ avente polo in P_i di ordine j , e zeri negli altri P_k ; si tratta di funzioni linearmente indipendenti (al variare degli indici i, j) in numero pari a d .

7.2.3. CURVE ALGEBRICHE E SDRc. Passare da curve algebriche a SdRc è banale se si tratta di curve lisce, usa il teorema di desingularizzazione altrimenti.

In senso inverso bisogna ricorrere al teorema di Riemann-Roch, o meglio alle sue conseguenze per i divisori ampi che permettono di realizzare ogni SdRc come curva algebrica immersa in qualche spazio proiettivo.

Naturalmente, che tali funtori siano equivalenze è già dimostrato dai primi due casi analizzati (si tratta di due categorie equivalenti ad una terza, quindi equivalenti tra loro).

7.3. GENERE, GRADO, DIMENSIONE. È un argomento classico studiare per una curva algebrica complessa liscia (quindi una SdRc) di genere g , grado d immersa non degenera in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ quali relazioni vi siano tra g , d ed n .

7.3.1. Usando il fatto che l'immersione è determinata da un sistema lineare $\mathcal{S}$ contenuto in $|D|$ per qualsiasi divisore D di una sezione iperpiana, $n = \dim \mathcal{S}$, $d = \deg D$, vediamo in generale che $d \geq n$:

$$n = \dim \mathcal{S} \leq \dim |D| = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - 1 \leq \deg(D) .$$

7.3.2. Dalle disequazioni precedenti si vede subito che se vale l'uguaglianza allora il sistema lineare $\mathcal{S}$ è completo, e il genere della curva è 0, quindi le curve non degeneri di grado n in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ sono esattamente le curve razionali (normali).

7.3.3. Similmente le curve di grado $n + 1$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ sono esattamente le curve ellittiche (normali).

7.3.4. STIMA DI CASTELNUOVO. La stima classica che lega g, d, n è dovuta a Castelnuovo, e si esprime classicamente in questi termini: considerando la divisione con resto di $d - 1$ per $n - 1$, cioè $d - 1 = m(n - 1) + \varepsilon$ ($m \geq 1$ e $0 \leq \varepsilon < n - 1$) abbiamo

$$g \leq \frac{1}{2}m(m-1)(n-1) + m\varepsilon .$$

Inoltre, se vale l'uguaglianza abbiamo che la mappa canonica

$$\mathrm{Sym}_k(\mathcal{L}(D)) \longrightarrow \mathcal{L}(kD)$$

è suriettiva per ogni divisore iperpiano D (il nucleo permette di trovare "equazioni soddisfatte da X ").

7.3.5. Le curve che ottengono l'uguaglianza (quindi di massimo genere per il loro grado, o di minimo grado per il loro genere) si dicono curve di Castelnuovo, e molte curve facili lo sono: curve piane, curve razionali normali, curve canoniche di non iperellittiche, curve immerse con grado $d > 2g + 1$.

8. Teorema di Riemann-Roch (dimostrazione).

8.1. STRATEGIA GENERALE. La dimostrazione che presentiamo del teorema di Riemann-Roch (ve ne sono molte possibili, in quasi ogni libro se ne trova una diversa: questa viene essenzialmente dal Miranda) cerca di mettere in luce gli aspetti algebrici del problema e procede secondo questo schema:

8.1.1. Introduciamo un problema più generale che è quello di determinare gli spazi di funzioni con preassegnate code (negative) di Laurent in un numero finito di punti (problema di Mittag-Leffler).

8.1.2. Per questo definiremo i divisori (di code) di Laurent: ad ogni divisore D si associa un $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale $\mathcal{T}(D)$, e vi sarà una applicazione lineare $\alpha_D : \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathcal{T}(D)$ che ad ogni funzione associa l'insieme delle sue code di Laurent (opportunamente troncate). Sarà $\ker \alpha_D = \mathcal{L}(D)$ e chiameremo $\mathcal{H}(D) = \mathrm{coker} \alpha_D$. Confrontando questi spazi per divisori diversi, troveremo che l'espressione $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - \deg(D) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D)$ è costante al variare di D .

8.1.3. Usando $D = 0$ troveremo un precursore di Riemann-Roch nella forma

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) &= \deg(D) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(0) - \deg(0) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D) \\ &= \deg(D) + 1 - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D) \end{aligned}$$

in cui restano da interpretare i termini $\mathcal{H}$.

8.1.4. Infine, introdurremo la dualità di Serre, che dice che $\mathcal{H}(D)^* \cong \mathcal{H}(D) \cong \mathcal{L}(K - D)$, da cui segue che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - D)$ e $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) = g$ per arrivare all'enunciato classico di Riemann-Roch.

8.1.5. Resta da notare che tutta la dimostrazione è basata sulla esistenza di (abbastanza) funzioni meromorfe, che noi non abbiamo fatto, e che su alcuni aspetti della dimostrazione (finitzza di alcune dimensioni e dimostrazione del risultato di Serre) sorvoleremo.

8.2. DIVISORI DI LAURENT. Definiamo l'insieme dei divisori (di code) di Laurent nel modo seguente:

$$\mathcal{T}(X) = \left\{ \sum_{P \in X} T_P(z_P)P : \begin{array}{l} z_P \text{ coordinata locale a } P \\ T_P(z_P) \text{ polinomio di Laurent in } P \end{array} \right\}$$

(si tratta di assegnare in ogni punto un polinomio di Laurent, indipendente da punto a punto).

Per ogni divisore $D \in \text{Div}(X)$ definiamo i divisori di Laurent controllati da D :

$$\mathcal{T}(D) = \{T \in \mathcal{T}(X) : \deg_{z_P} T_P(z_P) < -\text{ord}_P(D)\}$$

(dove $\deg_{z_P} T_P(z_P)$ indica l'esponente massimo con cui compare z_P nel polinomio di Laurent $T_P(z_P)$).

Per esempio:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(0) &= \{T \in \mathcal{T}(X) : T_P(z_P) \text{ ha solo termini di grado negativo per ogni } P\} \\ \mathcal{T}(P) &= \left\{ T \in \mathcal{T}(X) : \begin{array}{l} T_Q(z_Q) \text{ ha solo termini di grado negativo per } Q \neq P \\ T_P(z_P) \text{ ha solo termini di grado } < -1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

8.2.1. RELAZIONE CON LE FUNZIONI MEROMORFE. Abbiamo una applicazione canonica per ogni divisore $D \in \text{Div}(X)$

$$\alpha_D : \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{T}(D)$$

che invia ogni funzione f nel divisore di Laurent formato dagli sviluppi di Laurent di f troncati dal divisore D . È facile osservare che $\ker \alpha_D = \mathcal{L}(D)$.

8.2.2. RELAZIONE CON L'ORDINE TRA I DIVISORI. Se $D_1 \leq D_2$ risulta immediatamente che $\mathcal{T}(D_1) \supseteq \mathcal{T}(D_2)$ e abbiamo un morfismo canonico di troncamento delle code di Laurent

$$t = t_{D_1, D_2} : \mathcal{T}(D_1) \longrightarrow \mathcal{T}(D_2)$$

che è suriettivo e ha nucleo formato dalle code di Laurent in P che presentano termini di grado $\geq -\text{ord}_P(D_2)$ e $< -\text{ord}_P(D_1)$. Lo indicheremo con $\mathcal{T}(D_1/D_2)$.

8.3. PROBLEMA DI MITTAG-LEFFLER. Il problema di Mittag-Leffler è quello di determinare dato $T \in \mathcal{T}(D)$ se esiste $f \in \mathcal{M}(X)$ con $\alpha_D(f) = T$, cioè di vedere se esistono funzioni meromorfe con assegnate code di Laurent in un numero finito di punti, e olomorfe altrove.

Il problema di trovare tali funzioni (l'ostruzione all'esistenza) è misurato dal conucleo della mappa α_D , quindi introduciamo

$$\mathcal{H}(D) = \text{coker}(\alpha_D) = \mathcal{T}(D)/\text{im}(\alpha_D) .$$

Ne risulta allora una sequenza esatta di $\mathbb{C}$ -spazi vettoriali

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{M}(X) \xrightarrow{\alpha_D} \mathcal{T}(D) \longrightarrow \mathcal{H}(D) \longrightarrow 0$$

ovvero una sequenza esatta breve

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}(X)/\mathcal{L}(D) \xrightarrow{\alpha_D} \mathcal{T}(D) \longrightarrow \mathcal{H}(D) \longrightarrow 0 .$$

Il termine sequenza esatta significa che si tratta di una sequenza di mappe lineari tali che l'immagine di ogni mappa coincide con il nucleo della successiva (in particolare ogni composizione di due mappe successive è zero).

Noi vorremmo calcolare le dimensioni di questi spazi, ma si vede subito che $\mathcal{M}$ e $\mathcal{T}$, e anche $\mathcal{M}/\mathcal{L}$ sono in generale di dimensione infinita.

8.3.1. FINITEZZA DI $\mathcal{H}(D)$. Risulta invece che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D)$ è finita. Non ne facciamo la dimostrazione, che richiede qualche conoscenza sulla struttura di $\mathcal{M}(X)$ in generale.

8.3.2. Confrontando ora le due sequenze esatte brevi relative a due divisori $D_1 \leq D_2$ otteniamo un diagramma

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(X)/\mathcal{L}(D_1) & \longrightarrow & \mathcal{T}(D_1) & \longrightarrow & \mathcal{H}(D_1) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}(X)/\mathcal{L}(D_2) & \longrightarrow & \mathcal{T}(D_2) & \longrightarrow & \mathcal{H}(D_2) \longrightarrow 0 \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono indotte dal troncamento e sono suriettive. Passando ai nuclei si ottiene una sequenza esatta breve

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}(D_2)/\mathcal{L}(D_1) \longrightarrow \mathcal{T}(D_1/D_2) \longrightarrow \mathcal{H}(D_1/D_2) \longrightarrow 0 .$$

(è un caso facile del lemma del serpente che esplicitiamo più sotto). Siccome qui tutte le dimensioni sono finite possiamo scrivere che

$$(\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D_2) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D_1)) - (\deg(D_2) - \deg(D_1)) + (\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D_1) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D_2)) = 0$$

(si tratta della usuale formula delle dimensioni per applicazioni lineari) ovvero che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D_2) - \deg(D_2) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D_2) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D_1) - \deg(D_1) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D_1)$$

e di conseguenza che l'espressione

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - \deg(D) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D)$$

è costante indipendentemente dal divisore D scelto (basta confrontare due divisori qualsiasi tramite il divisore somma che è maggiore di entrambi).

8.3.3. TEOREMA PRECURSORE DI RIEMANN-ROCH. Confrontando allora un generico D con il divisore nullo, ne risulta che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) = \deg(D) + 1 - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D)$$

e il problema diventa di dare una buona interpretazione per gli spazi $\mathcal{H}(D)$, in particolare per $D = 0$.

8.4. TEOREMA FACILE DEL SERPENTE. Prima abbiamo usato il seguente fatto: dato un diagramma commutativo di sequenze esatte brevi, se il primo morfismo è suriettivo anche la sequenza dei nuclei risulta esatta breve:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(f) & \longrightarrow & \ker(g) & \longrightarrow & \ker(h) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \longrightarrow 0 \end{array}$$

(ipotesi, oltre alle esattezze, è che f sia suriettivo). Bisogna mostrare che la prima mappa tra i nuclei è iniettiva, che ha per immagine il nucleo della seconda, e che la seconda mappa è suriettiva. Tutte e tre le cose si fanno con una facile “caccia sul diagramma”:

- (1) se $a \in \ker(f)$ ha immagine nulla in $\ker(g) \subseteq B$, si tratta di un elemento di A con immagine nulla in B , e quindi è nullo per l'iniettività di $A \rightarrow B$;
- (2) se un elemento $b \in \ker(g)$ ha immagine nulla in $\ker(h)$, si tratta di un elemento di B con immagine nulla in C , e quindi è immagine di un (unico) $a \in A$ che necessariamente appartiene a $\ker(f)$ (perché?);
- (3) per ogni elemento $c \in \ker(h)$, essendo $c \in C$ esiste $b \in B$ la cui immagine in C sia c , tuttavia b non appartiene necessariamente a $\ker(g)$; siccome però la sua immagine $b' = g(b)$ in B' ha immagine nulla in C' (perché?) esiste $a' \in A'$ con immagine b' , e per suriettività di f , esiste $a \in A$ con $f(a) = a'$; sia β l'immagine di a in B : allora $b - \beta$ è elemento di $\ker(g)$ con immagine c in C (perché?).

(si osservi che per la suriettività della seconda mappa è stato necessario usare la suriettività di f).

8.5. TEOREMA DI DUALITÀ DI SERRE. Il teorema di dualità di Serre afferma che per ogni divisore D si ha che

$$\mathcal{H}(D)^* \cong \mathcal{H}(D)$$

(e noi sappiamo già che quest'ultimo spazio è isomorfo a $\mathcal{L}(K - D)$).

Tenendo conto della finitezza della dimensione di $\mathcal{H}(D)$ otteniamo subito che

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D)^* = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(D) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - D)$$

da cui possiamo ricavare

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(K) &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(K) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - K) = 1 \end{aligned}$$

e usando il precursore di Riemann-Roch prima stabilito, abbiamo

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) = \deg(K) + 1 + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(K) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) = 2g - 2 + 1 + 1 - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K)$$

e concludiamo che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K) = g$.

Sostituendo questi valori nel precursore di Riemann-Roch otteniamo l'enunciato classico dello stesso teorema.

8.5.1. COSTRUZIONE DELLA MAPPA DI SERRE. Per ottenere la dualità di Serre, consideriamo la mappa bilineare

$$\text{Res} : \mathcal{K}(D) \times \mathcal{T}(D) \longrightarrow \mathbb{C} \quad (\omega, T) \mapsto \text{Res}(\omega, T) = \sum_P \text{Res}_P(T_P \omega)$$

ove: se $f \in \mathcal{M}(X)$ e $\omega \in \mathcal{M}^1(X)$, $\text{Res}_P(f\omega)$ è il coefficiente di $\frac{dz_P}{z_P}$ nello sviluppo di Laurent di $f\omega$ in una coordinata locale z_P a P .

In particolare: se $f = \sum_i a_i z_P^i$ e $\omega = \left(\sum_{i \geq n_P} c_i z_P^i \right) dz_P$ allora risulta $\text{Res}_P(f\omega) = \sum_{i \geq n_P} a_{-i-1} c_i$ (somma finita).

8.5.2. Si osserva subito che per $\omega \in \mathcal{K}(D)$ abbiamo $k\text{div}(\omega) \geq D$ ($\text{ord}_P(\omega) \geq \text{ord}_P(D)$ per ogni $P \in X$) e per $T \in \mathcal{T}(D)$ abbiamo $\deg_{z_P} T_P < -\text{ord}_P(D)$ per ogni $P \in X$. Quindi per $f \in \mathcal{M}(X)$, usando $\alpha_D(f) \in \mathcal{T}(D)$ otteniamo che

$$\text{Res}(\omega, \alpha_D(f)) = \text{Res}(\omega f) = 0$$

per il teorema dei residui (la somma dei residui di un differenziale meromorfo su una DdR compatta è nulla).

Quindi abbiamo che $\text{Res}(\omega, \text{im}(\alpha_D)) = 0$ per ogni $\omega \in \mathcal{K}(D)$ e possiamo portare a quoziente $\mathcal{K}(D) = \mathcal{T}(D)/\text{im}(\alpha_D)$ l'applicazione bilineare:

$$\text{Res} : \mathcal{K}(D) \times \mathcal{K}(D) \longrightarrow \mathbb{C}$$

e quindi avere un morfismo lineare

$$\mathcal{K}(D) \longrightarrow \mathcal{K}(D)^* \quad \omega \mapsto \text{Res}(\omega, \cdot) : \mathcal{K}(D) \rightarrow \mathbb{C}$$

(questo è il morfismo di Serre).

Il teorema di dualità di Serre afferma che questo morfismo è un isomorfismo di spazi vettoriali (ovvero che l'ultimo morfismo bilineare scritto è non degenere).

8.6. OSSERVAZIONI SUL GENERE. Va osservato che nel corso della dimostrazione sono emersi alcuni significati del genere che è opportuno evidenziare, e confrontare con la prima definizione che ne abbiamo dato:

- (1) il genere topologico, invariante della classificazione delle superficie reali compatte orientabili, legato alla caratteristica di Eulero-Poincaré, e al numero di “buchi” della superficie;
 - (2) il genere aritmetico $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(0)$ è un invariante coomologico legato alla ostruzione per trovare soluzioni al problema di Mittag-Leffler;
 - (3) il genere analitico $\dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(X)$ come dimensione dello spazio dei differenziali olomorfi;
- nel caso di SdR compatte (cioè di varietà complesse compatte di dimensione 1) questi tre invarianti coincidono; gli ultimi due si generalizzano ai casi di dimensioni maggiori, e per varietà su altri corpi, ma in generale non coincidono più.

9. Divisori Speciali e Teorema di Clifford.

9.1. DIVISORI SPECIALI. Si dicono divisori speciali di X quei divisori $D \geq 0$ per cui sia $\mathcal{L}(D)$ sia $\mathcal{L}(K - D)$ sono non nulli. Quindi necessariamente abbiamo $\deg D \geq 0$ e $\deg D \leq 2(g - 1)$ (altrimenti si annulla $\mathcal{L}(K - D)$): si tratta di divisori di grado “piccolo”. Talvolta la dimensione di $\mathcal{L}(K - D)$ si dice indice di specialità.

Chiaramente sono i divisori per cui è difficile usare la formula di Riemann-Roch, in quanto bisogna conoscere almeno uno tra i due termini non banali:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - D) = \deg(D) + 1 - g .$$

Possiamo in ogni caso ottenere un limite per questi.

9.2. In generale, dati due divisori D e D' abbiamo che

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\min(D, D')) &= \mathcal{L}(D) \cap \mathcal{L}(D') \\ \mathcal{L}(\max(D, D')) &\supseteq \mathcal{L}(D) + \mathcal{L}(D') \end{aligned}$$

(quando vale l'uguaglianza?) e quindi applicando Grassman abbiamo

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D') \leq \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(\min(D, D')) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(\max(D, D')) .$$

Applicando questa formula con $D' = K - D$ otteniamo la disequazione

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - D) \leq 1 + g$$

perché supponiamo D speciale, quindi possiamo trovare due divisori positivi e disgiunti nei due sistemi $|D|$ e $|K - D|$.

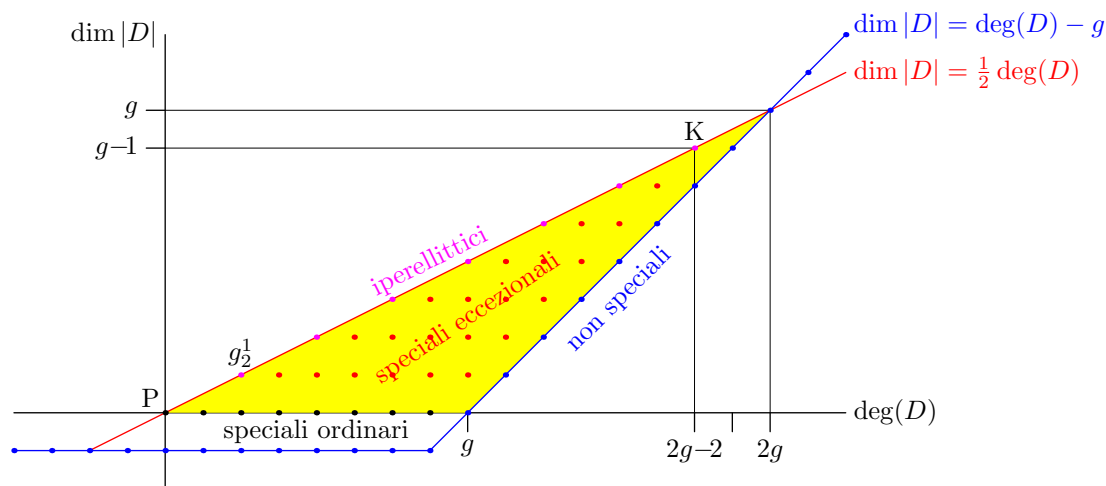
9.3. TEOREMA DI CLIFFORD. Sommando le due formule per differenza e somma delle dimensioni di $\mathcal{L}(D)$ e $\mathcal{L}(K - D)$ otteniamo la stima di Clifford:

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) \leq \frac{1}{2} \deg(D) + 1 \quad \text{ovvero} \quad \dim |D| \leq \frac{1}{2} \deg(D)$$

(notare anche che per $D = 0, K$, vale l'uguaglianza, e sono gli unici casi se X non è iperellittica; se X è iperellittica anche i g_2^1 danno uguaglianze?).

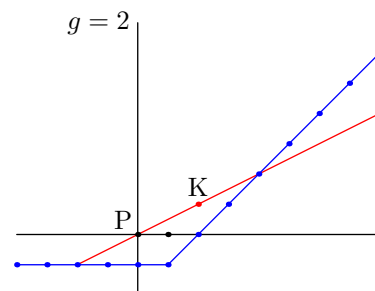
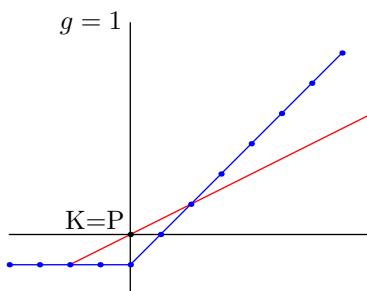
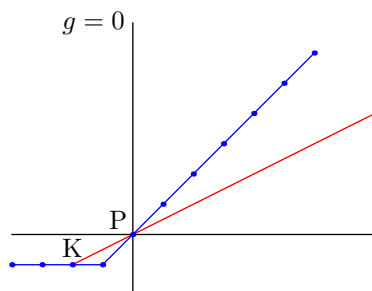
La formula si può giustificare anche in base al fatto che $D - K$ deve essere linearmente equivalente ad un divisore effettivo, essendo D speciale, da cui $\dim |D| + \dim |D - K| \leq \dim |K| = g - 1$, da usare di nuovo insieme al teorema di Riemann-Roch.

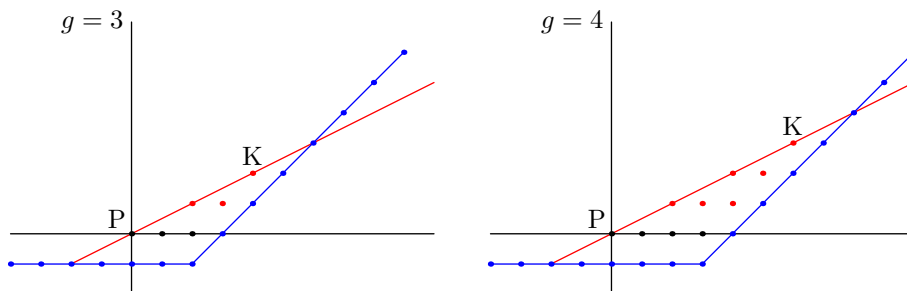
9.3.1. Questo permette di capire la posizione delle possibili coppie $(\deg(D), \dim |D|)$ nel piano cartesiano: in generale abbiamo la retta costante -1 fino a $\deg(D) = -1$ e la retta $\dim |D| = \deg(D) - g$ per $\deg(D) \geq 2g$; gli eventuali valori intermedi sono compresi nel triangolo $y \geq -1$, $y \geq x - g$ e $2y \leq x$:



In particolare:

- (0) se $g = 0$ le prime due condizioni determinano tutto (non ci sono divisori speciali!),
- (1) se $g = 1$ i divisori speciali possono avere solo grado nullo (e dimensione -1).





9.3.2. Conviene ricordare che D è principale se $\deg(D) = 0$ e $\dim |D| = 0$ e sono divisori speciali se $g > 1$; ed è canonico se $\deg(D) = 2(g-1)$ e $\dim |D| = g-1$ (sse $K-D$ è principale) e non sono speciali.

9.3.3. Se X è una SdRc immersa come curva algebrica non degenere in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ di grado $d < 2n$, allora $g \leq d-n$, e il sistema delle sezioni iperpiane è completo (il divisore D di un iperpiano ha $\dim |D| \geq n > d/2$, quindi non è speciale, e risulta $\dim \mathcal{L}(D) = d+1-g$, ovvero $\dim |D| = d-g$).

In particolare una curva liscia non degenere di grado n in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ è razionale (normale).

9.4. PRINCIPIO DI RIDUZIONE. Conviene anche notare il seguente fatto: dato un divisore D e considerato $D-P$ (togliamo un punto P), abbiamo che

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K-D) &= \deg(D) + 1 - g \\ \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D-P) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K-(D-P)) &= \deg(D-P) + 1 - g \end{aligned}$$

e tramite sottrazione di ottiene

$$(\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D-P)) - (\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K-D) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K-(D-P))) = 1$$

da cui si deduce che ogni volta che si toglie un punto ad un divisore esattamente uno tra i due spazi $\mathcal{L}(D)$ e $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K-D)$ varia di dimensione: o diminuisce il primo o aumenta il secondo, cioè o diminuisce lo spazio delle funzioni o aumenta l'indice di specialità (ed esattamente di 1).

9.5. VERSIONE GEOMETRICA DEL TEOREMA RIEMANN-ROCH. Consideriamo una SdRc non iperellittica X , e la sua immersione canonica $X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{g-1}$ (di grado $2g-2$). Per ogni divisore D su X definiamo lo span lineare $\langle D \rangle$ come il più piccolo sottospazio di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{g-1}$ la cui intersezione con X sia maggiore o uguale a D . Più precisamente $\langle D \rangle$ è l'intersezione di tutti gli iperpiani H di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{g-1}$ tali che la sezione iperpiana di X definita da H è maggiore o uguale a D (come divisore: si noti che questo dipende anche dalla curva X , non solo dai punti del supporto di D : se un punto ha una certa molteplicità, solo gli iperpiani abbastanza tangenti a X in quel punto soddisfano la condizione).

9.5.1. Vale allora la seguente uguaglianza:

$$\dim \langle D \rangle = \deg(D) - \dim |D| - 1 = \deg(D) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(D).$$

In particolare, se il divisore D ha punti distinti (senza molteplicità), $\dim \langle D \rangle$ è la dimensione dello spazio generato da quei punti, che sarebbe $\deg(D) - 1$ se fossero in posizione generale: quindi l'enunciato dice che $\dim |D|$ è pari al numero di relazioni indipendenti tra i punti di D .

9.5.2. Per dimostrare la formula, ci si può ricondurre al teorema di Riemann-Roch tramite la seguente osservazione: le sezioni lineari degli iperpiani H su X descrivono per costruzione il sistema canonico $|K|$, quindi gli iperpiani H tali che $\text{div}(k^*H) \geq D$ corrispondono biunivocamente ai divisori del sistema lineare $|K-D|$ (un divisore E di tale sistema è tale che $E+D$ è canonico, quindi una sezione iperpiana della mappa canonica). Ma allora

$$\dim \langle D \rangle = (g-1) - (\dim |K-D| + 1) = \deg(D) - \dim |D| - 1$$

(la seconda uguaglianza viene da Riemann-Roch nella forma $\dim |D| = \deg(D) + 1 - g + \dim |K-D|$).

In particolare, se D non è speciale, cioè $|K-D|$ è vuoto, lo span $\langle D \rangle$ è tutto $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{g-1}$; se D è speciale allora $\langle D \rangle$ è sottospazio proprio di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{g-1}$, ed è un iperpiano quando $\dim |K-D| = 0$ (questo caso è detto ordinario, gli altri casi essendo divisori eccezionali).

9.5.3. Rimane da notare che il risultato resta vero per le SdR iperellittiche, se nella definizione di $\langle D \rangle$ si usa l'antimmagine degli iperpiani H tramite la mappa canonica, invece delle sezioni iperpiane.

10. Punti di inflessione e di Weierstrass, Automorfismi.

10.0. MOTIVAZIONI. Data una immersione di X in uno spazio proiettivo, l'insieme formato dai divisori che si ottengono intersecando X con gli iperpiani dello spazio proiettivo formano un sistema lineare (detto delle sezioni iperpiane di X). Per ogni punto $P \in X$ gli iperpiani passanti per P (cioè il cui divisore di intersezione contiene P) si possono “stratificare” a seconda della molteplicità con cui P è contenuto nel divisore di intersezione: genericamente questa molteplicità sarà 1, ma per altri sarà maggiore (iperpiani tangenti in quel punto) e il minimo di queste molteplicità speciali sarà una indicazione di “flesso” per quel punto.

Convieni, perché si risolve con gli stessi strumenti, generalizzare il problema a qualsiasi sistema lineare contenuto in un dato $|D|$ (sistema lineare completo di un divisore): si tratta di studiare i sottospazi che si ottengono togliendo via via multipli di P al divisore dato.

10.1. NOTAZIONI GENERALI. Sia D un divisore che possiamo supporre positivo, V un sottospazio di $\mathcal{L}(D)$, $\mathcal{S}$ il sottospazio corrispondente di $|D|$. Per ogni $P \in X$ poniamo:

$$\begin{aligned} V(-nP) &= V \cap \mathcal{L}(D - nP) = \{f \in V : \text{ord}_P f \geq n - \text{ord}_P D\} \\ \mathcal{S}(-nP) &= \mathcal{S} \cap |D - nP| = \{D \in \mathcal{S} : D \geq nP\}. \end{aligned}$$

10.1.1. Si ottiene così una filtrazione decrescente di V :

$$V = V(0P) \geq V(-P) \geq V(-2P) \geq \dots \geq V(-nP) \geq \dots$$

che per $n > \deg(D)$ arriva a zero, perché allora $\mathcal{L}(D - kP) = 0$. Inoltre la differenza di dimensioni tra due termini consecutivi può essere solo 0 o 1. Usando al solito $d = \deg(D)$ e $r = \dim |D|$, vediamo che questa filtrazione diventa zero in al massimo $d + 1$ passi, e siccome parte con uno spazio di dimensione $r + 1$ devono esserci esattamente $r + 1$ punti in cui la dimensione varia (diminuendo di uno).

10.2. NUMERI DI GAP E PUNTI DI INFLESSIONE. Diciamo numeri di gap di V (o $\mathcal{S}$) per P gli interi n_i in cui la filtrazione fa un salto; di tratta di $r + 1$ interi compresi tra 1 e $d + 1$ per i quali

$$V(-(n_i - 1)P) > V(-n_i P) \quad \text{ovvero} \quad \dim_{\mathbb{C}} V(-n_i P) = \dim_{\mathbb{C}} V(-(n_i - 1)P) - 1.$$

Vi sono subito alcune osservazioni facili sui numeri di gap:

- 10.2.1.** il numero di ‘gap numbers’ per V è pari a $r + 1 = \dim_{\mathbb{C}} V = \dim \mathcal{S} + 1$;
- 10.2.2.** $\{n_1, n_2, \dots, n_{r+1}\} \subseteq \{1, 2, \dots, d + 1\}$ dove $d = \deg(D)$;
- 10.2.3.** 1 non è un gap (cioè $n_1 \neq 1$) sse P è un punto base di $\mathcal{S}$;
- 10.2.4.** $d + 1$ è un gap (cioè $n_{r+1} = d + 1$) sse $dP \in \mathcal{S}$;
- 10.2.5.** per il sistema nullo $|0|$ l’unico gap è 1 per ogni P .

Togliere P ripetutamente al divisore D significa aggiungere ad ogni passo una condizione lineare al sistema: se tali condizioni fossero indipendenti ad ogni passo, la dimensione diminuirebbe sempre di 1 fino ad arrivare a zero; quindi genericamente ci aspettiamo che i numeri di gap per un punto (generico) siano l’insieme $\{1, 2, \dots, r + 1\}$.

Se ciò non succede, diciamo che il punto P è un punto di inflessione per il sistema lineare $\mathcal{S}$. Significa esattamente che le condizioni lineari che si impongono togliendo P non sono tutte linearmente indipendenti nei primi $r + 1$ passi (come capita alle tangenti di un flesso: chiedere che intersechi 2 o 3 volte nel punto di tangenza è lo stesso).

10.2.6. BASI INFLESSIONARIE. Se i numeri di gap per V a P sono $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_{r+1} \leq d + 1$, allora abbiamo una filtrazione di V data da

$$V = V(0) > V(-n_1 P) > V(-n_2 P) > \dots > V(-n_r P) > V(-n_{r+1} P) = 0$$

e possiamo scegliere una base per V associata a questa filtrazione usando $f_1, f_2, \dots, f_{r+1}$ dove $f_i \in V(-n_{i-1} P) \setminus V(-n_i P)$, cioè $\text{ord}_P f_i = n_i - 1 - \text{ord}_P D$. Una qualunque tale base si dirà una base inflessionaria di V nel punto P .

Un punto non è inflessionario sse $n_i = i$ per ogni $i = 1, 2, \dots, r + 1$, e in termini di una base inflessionaria sse $\text{ord}_P f_i = i - 1 - \text{ord}_P D$.

Convieni usare le funzioni $z^{\text{ord}_P D} f_i$ (dove z è un parametro locale a P), che quindi nel caso di punti non inflessionari hanno ordini in P pari a $i - 1$. Quindi data una base qualsiasi h_j di V , il punto P non è inflessionario sse esistono combinazioni lineari $\sum_j c_j z^{\text{ord}_P D} h_j$ con ordini $i - 1$ a P per ogni $i = 1, 2, \dots, r + 1$. Questo è chiaramente possibile se il wronskiano $W_z(z^{\text{ord}_P D} h_j)$ non è nullo in P .

Quindi un punto P è di inflessione per V sse per ogni base di V si ha che il wronskiano $W_z(z^{\text{ord}_P D} h_j)$ si annulla in P . Essendo il wronskiano una funzione meromorfa non identicamente nulla, i suoi zeri sono discreti e quindi finiti (X è compatto), il che ci dice che i punti di inflessione sono in numero finito.

10.3. NUMERO DI PUNTI DI INFLESSIONE. Per calcolare il numero di punti di inflessione di un sistema lineare bisogna chiaramente disporre di qualche strumento globale, mentre il criterio wronskiano per il momento è espresso solo in termini locali. D'altra parte il calcolo del wronskiano comporta un determinante di derivate successive fino ad un ordine pari al numero di funzioni coinvolte (meno uno), quindi in un certo senso un prodotto simmetrico di differenziali; per questo tipo di oggetti si può fare una teoria analoga a quella fatta per i differenziali meromorfi.

10.3.1. DIFFERENZIALI SIMMETRICI DI ORDINE n . Un n -differenziale su una SdR è una collezione $\{(U_i, \omega_i)\}_i$ dove gli U_i sono aperti di un ricoprimento di S dotato di carte $\varphi_i : U_i \rightarrow V_i$ (aperti di $\mathbb{C}$), $\omega_i = f_i(z)(dz)^n$ sono n -differenziali sulle carte, soggetti alle condizioni di compatibilità seguenti: se φ_{ij} sono le mappe di transizione, allora per ogni i, j dev'essere $\omega_j = \omega_i \circ \varphi_{ij}$, cioè $f_j = (f_i \circ \varphi_{ij})\varphi'_{ij}{}^n$. Gli n -differenziali si dicono olomorfi o meromorfi a seconda che lo siano tutte le espressioni locali. Il $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale degli n -differenziali meromorfi si indica con $\mathcal{M}^{(n)}(S)$.

Si possono fare osservazioni analoghe a quelle dei differenziali, circa l'esistenza di espressioni globali, la corrispondenza con le funzioni meromorfe, che il prodotto di n differenziali dà un n -differenziale, ecc.

Usando che ogni n -differenziale si scrive localmente come $f_i(z)(dz)^n$ in una coordinata locale z attorno ad un punto, possiamo definire il divisore di un n -differenziale usando l'ordine in P del coefficiente $f_i(z)$. Il grado dei divisori degli n -differenziali sarà quindi $2n(g-1)$.

10.3.2. SPAZI CONTROLLATI DAI DIVISORI. Analogamente al caso di funzioni, definiamo gli spazi

$$\mathcal{L}^{(n)}(D) = \{\omega \in \mathcal{M}^{(n)}(X) : \text{kdiv}(\omega) + D \geq 0\}$$

e vediamo subito degli isomorfismi

$$\mathcal{L}^{(n)}(D) \cong \mathcal{L}(D + nK)$$

scegliendo qualunque differenziale ω e mandando f in $f\omega^n$.

10.3.3. CASO DEL WRONSKIANO. Il risultato fondamentale per il calcolo del wronskiano su una superficie di Riemann è il seguente: se $g_1, \dots, g_\ell \in \mathcal{L}(D)$ allora $W(g_1, \dots, g_\ell) \in \mathcal{L}^{(\ell(\ell-1)/2)}(\ell D)$.

10.3.4. PESO INFLESSIONARIO E NUMERO DI PUNTI. In particolare ritornando al sistema lineare $\mathcal{S}$ di dimensione r e grado d , abbiamo che

$$\deg(\text{div}(W(\mathcal{S}))) = r(r+1)(g-1) = \sum_P \text{ord}_P(W(\mathcal{S})) .$$

D'altra parte possiamo calcolare gli ordini del wronskiano di interesse in due modi:

$$\text{ord}_P(W_z(z^{\text{ord}_P D} f_i)) = \begin{cases} (r+1)\text{ord}_P D + \text{ord}_P W(\mathcal{S}) & (\text{perché?}) \\ \sum_{i=1}^{r+1} (n_i - i) & (\text{perché?}) \end{cases}$$

ora, chiamando $w_P(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{r+1} (n_i - i)$ peso inflessionario di P per $\mathcal{S}$ (notare che è nullo se il punto non è di inflessione per $\mathcal{S}$), abbiamo infine:

$$\begin{aligned} \sum_{P \in X} w_P(\mathcal{S}) &= \sum_{P \in X} \text{ord}_P(W_z(z^{\text{ord}_P D} f_i)) \\ &= \sum_{P \in X} (r+1)\text{ord}_P D + \sum_{P \in X} \text{ord}_P W(\mathcal{S}) \\ &= (r+1)d + r(r+1)(g-1) \\ &= (r+1)(d + r(g-1)) \end{aligned}$$

e questo è il numero di punti di inflessione, contando ciascuno con il proprio peso.

10.4. FLESSI DELLE CURVE ALGEBRICHE PIANE. Nel caso delle curve algebriche piane, il sistema delle intersezioni iperpiane (è il sistema lineare che dà l'immersione) è di grado d pari a quello della curva, e ovviamente di dimensione 2 (siamo nel piano). I numeri di gap sono chiaramente $n_1 = 1$ (genericamente P non appartiene alle rette), $n_2 = 2$ (le rette per P tranne la tangente hanno intersezione semplice, perché supponiamo la curva liscia, essendo SdRc), $n_3 = k+1$ se k è la molteplicità di

intersezione della curva con la tangente in P . Allora $w_P = k - 2$, mentre il genere è $g = (d-1)(d-2)/2$ (curva liscia) e troviamo

$$(r+1)(d+r(g-1)) = 3(d+(d^2-3d)) = 3d(d-2)$$

flessi contati ciascuno con la sua molteplicità (cosa che già si conosce dalla teoria delle curve algebriche piane, poiché i flessi sono dati dalle intersezioni della curva con la sua hessiana, almeno nel caso liscio).

10.5. SISTEMA CANONICO: PUNTI DI WEIERSTRASS. Il caso del sistema canonico è particolarmente interessante perché individua dei punti che sono intrinsecamente definiti per la curva, senza dipendere da immersione in qualche ambiente come gli spazi proiettivi (i punti di flesso dipendono dall'immersione). In questo caso abbiamo $D = K$, $d = \deg(K) = 2(g-1)$, $r = \dim |K| = g-1$, quindi ci sono g numeri di gap per ogni punto e sono compresi tra 1 e $2g-1$. I punti di inflessione per K si chiamano punti di Weierstrass, e contati con il relativo peso (specificarlo) sono

$$(r+1)(d+r(g-1)) = g(2(g-1) + (g-1)^2) = g(g-1)(g+1) = g^3 - g.$$

10.5.1. CARATTERIZZAZIONI DEI PUNTI DI WEIERSTRASS. Siccome

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - (n-1)P) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(K - nP) &= \\ &= (\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}((n-1)P) - (n-1) + g - 1) - (\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nP) - n + g - 1) = \\ &= \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}((n-1)P) - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nP) + 1 \end{aligned}$$

considerando la filtrazione crescente

$$0 \leq \mathcal{L}(0P) \leq \mathcal{L}(P) \leq \mathcal{L}(2P) \leq \dots \leq \mathcal{L}(nP) \leq \dots$$

abbiamo che n è numero di gap per P sse $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}((n-1)P) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nP)$, sse la filtrazione rimane stabile passando da $n-1$ ad n , sse non esistono funzioni con polo d'ordine esattamente n in P (e null'altro); si osservi che quest'ultima affermazione implica che il complementare in $\mathbb{N}$ dei numeri di gap è un monoide additivo.

Di conseguenza un punto P è di Weierstrass sse i numeri di gap non sono l'insieme tra 1 e g , sse la filtrazione degli $\mathcal{L}(iP)$ non è costante (di dimensione 1) nei primi g passi, sse $\mathcal{L}(gP)$ contiene funzioni non costanti, sse $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(gP) \geq 2$.

Nei punti non di Weierstrass (quindi per quasi tutti) la filtrazione sopra scritta rimane costante per tutti i primi g passi, e poi aumenta di dimensione ad ogni passo successivo.

10.6. APPLICAZIONE AGLI AUTOMORFISMI ($g \geq 2$). Per le curve di genere 0 (sfere) e 1 (tori) sappiamo che i gruppi di automorfismi non sono finiti. Invece per le SdRc di genere almeno 2 è diverso:

10.6.1. TEOREMA DI SCHWARZ. Il gruppo degli automorfismi di una SdRc di genere $g \geq 2$ è finito.

10.6.2. TEOREMA DI HURWITZ. L'ordine del gruppo degli automorfismi di una SdRc di genere $g \geq 2$ è minore o uguale a $84(g-1)$.

10.6.3. La dimostrazione del teorema di Schwarz è più elementare, e si può ottenere per esempio a partire dal conteggio dei punti di Weierstrass. Per le curve iperellittiche sappiamo che c'è un automorfismo canonico involutivo (che scambia i punti sulle fibre della mappa canonica verso $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$); ogni automorfismo commuta con la mappa canonica, quindi deve permutare i $2g+2$ punti di ramificazione (sono i punti di Weierstrass dell'iperellittica?), e abbiamo una mappa $\text{Aut}(X) \rightarrow S_{2g+2}$, con nucleo generato dall'involuzione canonica. Per le curve non iperellittiche si può vedere che hanno almeno $2g+6$ punti di Weierstrass, che ogni automorfismo li deve permutare, e quindi troviamo una mappa $\text{Aut}(X) \rightarrow S_{2g+6}$ con nucleo banale perché un automorfismo diverso dall'identità può fissare al più $2g+2$ punti (se $f \in \mathcal{L}((g+1)P)$ non costante, e φ un automorfismo, allora $f - f\varphi$ ha $2g+2$ poli, e i punti fissi di φ sono tra gli zeri di questa funzione). In entrambi i casi concludiamo quindi che si tratta di gruppi finiti, anche se la stima della dimensione è esagerata.

Dimostrare il teorema di Hurwitz si fa con metodi elementari. Prima si osserva che l'azione di un gruppo finito G su una superficie di Riemann X dà luogo ad un quoziente X/G che ha ancora struttura di superficie di Riemann (per trovare delle carte attorno a punti immagini di punti di X con stabilizzatore non banale, si osserva che lo stabilizzatore è ciclico, e si normalizzano le coordinate), e la mappa quoziente $\pi: X \rightarrow X/G$ è un rivestimento ramificato con $|G|$ fogli con ramificazioni omogenee

sulle fibre. Quindi applicando la formula di Riemann-Hurwitz abbiamo

$$\begin{aligned} 2(g_X - 1) &= |G|(2g_{X/G} - 2) + \sum_{i=1}^k \frac{|G|}{\nu_i} (\nu_i - 1) \\ &= |G| \left(2g_{X/G} - 2 + \sum_{i=1}^k (1 - 1/\nu_i) \right) \end{aligned}$$

ed è un problema aritmetico vedere che per interi γ e $\nu_i > 1$ (sequenza di k interi) l'espressione $C = 2\gamma - 2 + \sum_{i=1}^k (1 - 1/\nu_i)$ ha valore $\geq 1/42$ se è > 0 . Infatti:

- per $\gamma \geq 1$:
 - ▷ se $k = 0$ abbiamo $C = 0$ oppure $C \geq 2$;
 - ▷ se $k \geq 1$ abbiamo $C \geq 1/2$;
- per $\gamma = 0$:
 - ▷ se $k \leq 2$ allora $C \leq 0$;
 - ▷ se $k = 3$ abbiamo il caso più articolato:
 - $(2, 2, \nu_3)$ dà $C < 0$,
 - $(2, 3, \nu_3)$ dà $C < 0$ se $\nu_3 \leq 6$, $C = 1/42$ se $\nu_3 = 7$, $C > 1/42$ se $\nu_3 > 7$,
 - $(2, 4, 4)$ dà $C = 0$,
 - terne maggiori danno $C \geq -2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} > 1/42$,
 - ▷ se $k = 4$ abbiamo $(2, 2, 2, 2)$ che dà $C = 0$, e per ogni altra quaterna $C \geq -2 + 3\frac{1}{2} + \frac{2}{3} > 1/42$;
 - ▷ se $k \geq 5$ allora $C \geq -2 + 5\frac{1}{2} \geq 1/2$.

10.6.4. In realtà è genericamente (nel senso degli spazi di moduli) vero che una SdRc di genere almeno 2 non ha automorfismi diversi dall'identità. D'altro canto, ogni gruppo finito si realizza come gruppo di automorfismi di qualche SdR compatta.

11. Cenni sugli spazi di moduli

11.1. Studiare la struttura geometrica dello spazio delle classi di isomorfismo di SdR compatte di un fissato genere g non è facile, e noi l'abbiamo fatto solo nei due casi facili ($g = 0$, e si tratta di un punto, e $g = 1$, e si tratta del quoziente del semipiano di Poincaré $\mathbb{H}$ sotto l'azione del gruppo modulare $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$).

Quello che si può invece fare più facilmente è, dando per scontato che tale spazio abbia struttura di varietà complessa, determinarne la dimensione, ovvero capire qual è il numero di parametri indipendenti che permette di determinare la classe di isomorfismo di una generica SdRc di fissato genere. Vedremo due risultati:

11.1.1. la dimensione dello spazio di moduli delle SdR iperellittiche di genere $g \geq 1$ è $2g - 1$; questo si può giustificare già pensando alla loro realizzazione come curve piane iperellittiche, di equazioni $Y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (X - a_i)$ che dipendono dai $2g + 2$ parametri a_i , di cui si può pensare di normalizzarne 3 tramite proiettività (della retta delle ascisse).

11.1.2. la dimensione dello spazio di moduli di tutte le SdR compatte di genere $g \geq 2$ è $3g - 3$ (Riemann).

11.1.3. È simpatico confrontare i due risultati:

g	iperell.	tutte
0	0	0
1	1	1
2	3	3
3	5	6
4	7	9
5	9	12

11.2. PRELIMINARI PER IL CONTEGGIO DI RIEMANN. Per calcolare le dimensioni di varietà complesse applicheremo sempre il principio per cui se $f : A \rightarrow B$ è mappa suriettiva di varietà le cui fibre hanno genericamente dimensione d (dimensione relativa), allora $\dim A = \dim B + d$ (come se

si trattasse di applicazioni lineari tra spazi vettoriali; si giustifica essenzialmente passando agli spazi tangenti alle varietà).

11.2.1. GRASSMANNIANA DELLE RETTE DI $\mathbb{P}^n$. Consideriamo $\mathbb{G}(1, n)$ l'insieme delle rette di $\mathbb{P}^n$ e definiamo lo spazio di incidenza

$$\mathcal{I} = \{(\ell, P, Q) : P, Q \in \ell, P \neq Q\} \subseteq \mathbb{G}(1, n) \times \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$$

(triplette formate da una retta e una coppia di punti distinti su di essa). Abbiamo allora due mappe canoniche di proiezione, entrambe suriettive

$$\mathbb{G}(1, n) \longleftarrow \mathcal{I} \longrightarrow (\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n) \setminus \text{diagonale}$$

in cui la seconda ha dimensione relativa nulla, la prima ha dimensione relativa 2 (la fibra su una fissata retta ℓ è data essenzialmente da $\ell \times \ell \setminus \text{diagonale}$), da cui possiamo concludere che $\dim \mathbb{G}(1, n) = 2n - 2$ (perché $\dim(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n) = 2n$).

11.2.2. k -UPLE DISORDINATE MODULO PROIETTIVITÀ. Sia P_k lo spazio delle k -uple non ordinate di punti di $\mathbb{P}^1$ modulo proiettività; siccome una proiettività della retta può determinare arbitrariamente l'immagine di tre punti distinti, abbiamo una applicazione suriettiva

$$(\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})^{k-3} \setminus C \longrightarrow P_k$$

(C è l'insieme di coincidenza di almeno due dei punti) che dimentica semplicemente l'ordine dei punti; quindi le fibre dell'applicazione sono discrete, e la dimensione relativa è zero. Ne segue che $\dim P_k = k - 3$.

11.3. CONTEGGIO DELLE SDR IPERELLITTICHE. Le SdR iperellittiche di genere g sono determinate dalla mappa canonica $k : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, che è a sua volta determinata dai $2g + 2$ punti di ramificazione, da considerarsi non ordinati e a meno di proiettività. Quindi la dimensione cercata è $\dim(P_{2g+2}) = (2g + 2) - 3 = 2g - 1$, come già ci aspettavamo.

11.4. CONTEGGIO DI RIEMANN DELLE SDRc. Vi sono varie mappe suriettive che indicheremo insieme alla loro dimensione relativa; a destra indichiamo il conteggio delle dimensioni, che parte dal basso:

$$\begin{array}{ccc} \{X : \text{SdRc, genere } g\} & & 3g - 3 \\ \uparrow 2g-1 & & \\ \{(X, D) : \deg(D) = 2g - 1\} & & 5g - 4 \\ \downarrow g-1 & & \\ \{(X, |D|) : \deg(D) = 2g - 1\} & & 4g - 3 \\ \uparrow 2g-4 & & \\ \{(X, G) : \deg(G) = 2g - 1, \dim G = 1\} & & 6g - 7 \\ \parallel & & \\ \{g : X \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) : \deg(g) = 2g - 1, \text{ram}(g) = 6g - 4\} & & 6g - 7 \\ \downarrow 0 & & \\ P_{6g-4} & & 6g - 7 \end{array}$$

dove:

- la prima mappa dimentica il divisore D ;
- la seconda mappa sceglie un divisore nel sistema $|D|$ che ha dimensione $\dim |D| = g - 1$ (Riemann-Roch);
- la terza mappa considera le rette in $|D|$, e quindi ha dimensione relativa $2(g - 1) - 2$;
- la quarta mappa è la corrispondenza canonica;
- la quinta mappa “determina” g in base ai suoi punti di ramificazione (che si contano con Riemann-Hurwitz).

Varietà Jacobiane di Superficie di Riemann compatte.

In questo capitolo vedremo come ad ogni SdR compatta di genere g si possa associare una “varietà abeliana complessa di dimensione g ” (cioè una varietà complessa di dimensione g dotata di una struttura di gruppo compatibile con l’atlante olomorfo) in cui la superficie stessa si immerge. Questa varietà, della Jacobiana della SdRc, è in effetti un toro g -dimensionale, e nel caso di superficie di genere 1 coincide con il toro stesso.

Utilizzando la Jacobiana, potremo dare un criterio affinché un dato divisore sia principale (cioè sia il divisore di una funzione meromorfa) detto teorema di Abel, e potremo anche caratterizzare la varietà Jacobiana in termini dei divisori della SdRc iniziale (teorema di Jacobi). Come applicazione mostreremo che una SdR compatta, e dunque anche una curva algebrica complessa, ammette una struttura di varietà abeliana (cioè una operazione di gruppo compatibile con l’atlante olomorfo) se e solo se è di genere 1.

Studiare l’immersione della SdRc X e dei suoi prodotti nella sua Jacobiana $\text{Jac}(X)$ dà notevoli informazioni sulla curva stessa: in effetti X è caratterizzata dalla sua Jacobiana e dalla conoscenza di un divisore Θ su di essa.

0. Omologia delle superficie.

Introduciamo come preliminare il “primo gruppo di omologia” per superficie reali; si tratta essenzialmente di avere un opportuno insieme (con struttura di gruppo abeliano) da utilizzare come “spazio di cammini per le integrazioni” sulle superficie.

0.1. COMPLESSO DELLE CATENE. Sia X una superficie reale; definiamo i seguenti gruppi:

$$C_0(X) = \mathbb{Z}^{(X)} \text{ gruppo abeliano libero generato dai punti di } X$$

$$C_1(X) = \mathbb{Z}^{\{[0,1] \rightarrow X\}} \text{ gruppo abeliano libero generato dai segmenti di } X$$

$$C_2(X) = \mathbb{Z}^{\{\Delta \rightarrow X\}} \text{ gruppo abeliano libero generato dai triangoli di } X$$

e le seguenti mappe tra i gruppi precedenti:

$$\begin{array}{ccccc} C_2(X) & \xrightarrow{b_2} & C_1(X) & \xrightarrow{b_1} & C_0(X) \\ \Delta & \longmapsto & l_0 - l_1 + l_2 & & \\ & & l & \longmapsto & P_1 - P_0 \end{array}$$

dove l_0, l_1, l_2 sono i tre lati del triangolo Δ di vertici P_0, P_1, P_2 opposti a P_0, P_1, P_2 rispettivamente, mentre $P_1 = l(1)$ e $P_0 = l(0)$ sono i due estremi del segmento l su X (questo definisce le mappe sui generatori). Si osserva subito che la composizione delle due mappe è zero ($b_1 \circ b_2 = 0$), e quindi $\text{im } b_2 \subseteq \ker b_1$.

0.2. PRIMO GRUPPO DI OMOLOGIA. Diciamo catene chiuse gli elementi di $\ker b_1$, bordi gli elementi di $\text{im } b_2$, e definiamo

$$H_1(X) = \ker(b_1) / \text{im}(b_2)$$

il primo gruppo di omologia X : si tratta del quoziente tra il gruppo abeliano generato dalle catene chiuse e il suo sottogruppo generato dai bordi di triangoli.

Si osservi che cammini chiusi che differiscono per bordi di triangoli sono tra loro identificati, e d’altra parte integrare su tali cammini delle forme differenziali olomorfe dà chiaramente lo stesso risultato.

0.2.1. RELAZIONE CON IL GRUPPO FONDAMENTALE. Per chi conosce la nozione di gruppo fondamentale $\pi_1(X)$ di una superficie X (cammini chiusi basati in un punto, modulo omotopia tra cammini: costruzione che dà luogo ad un gruppo non necessariamente abeliano), la relazione tra le

due nozioni è che $H_1(X) = \pi_1(X)^{\text{ab}}$, cioè il primo gruppo di omologia è l'abelianizzato del gruppo fondamentale.

0.2.2. RELAZIONE CON LA CARATTERISTICA DI EULERO-POINCARÉ. Introducendo anche i gruppi $H_0(X) = C_0(X)/\text{im } b_1$ e $H_2(X) = \ker b_2$ e detti r_i i ranghi di $H_i(X)$, la caratteristica di Eulero-Poincaré che noi abbiamo definito via triangolazioni si può caratterizzare come somma alternata dei ranghi dei tre gruppi di omologia:

$$\chi(X) = r_0 - r_1 + r_2$$

(questo è un buon modo per mostrare che la caratteristica di Eulero-Poincaré dipende dalla superficie e non dalla triangolazione scelta).

0.2.3. CALCOLO MEDIANTE TRIANGOLAZIONI. Dalla definizione non è per nulla ovvio che il gruppo quoziente sia finitamente generato: i gruppi delle catene hanno un numero infinito di generatori, come pure cicli e bordi. Si può vedere però che lo stesso gruppo di omologia si può ottenere con lo stesso procedimento (nucleo/immagine) a partire da una data triangolazione (quindi finita per SdRc, quindi a partire da gruppi finitamente generati).

0.2.4. CASO DI SUPERFICIE COMPATTE ORIENTABILI. Per le superficie X ottenute da un $4g$ -agone via identificazione dei lati nel modo standard, $\#_{i=1}^g a_i b_i \bar{a}_i \bar{b}_i$, abbiamo che $H_1(X)$ è il gruppo abeliano libero generato dai lati a_i, b_i , dunque con $2g$ generatori.

1. Periodi e varietà Jacobiana di una Superficie di Riemann.

1.1. PERIODI. Ogni elemento $\gamma \in H_1(X)$ dà luogo ad una applicazione

$$\int_\gamma : \Omega^1(X) \longrightarrow \mathbb{C} \quad \omega \longmapsto \int_\gamma \omega$$

che è chiaramente lineare (per la struttura di $\mathbb{C}$ spazio vettoriale dei differenziali olomorfi su X), e quindi $\int_\gamma \in (\Omega^1(X))^*$.

Abbiamo quindi una applicazione

$$\int : H_1(X) \longrightarrow (\Omega^1(X))^* \quad \gamma \longmapsto \int_\gamma$$

che è chiaramente una mappa di gruppi abeliani.

Definiamo $\Lambda := \text{im } \int$, che è il sottogruppo abeliano di $(\Omega^1(X))^*$ generato dagli elementi del tipo $\int_\gamma$ per $\gamma \in H_1(X)$; si dice il sottogruppo dei periodi di X .

1.2. VARIETÀ JACOBIANA DI UNA SdRc. La varietà Jacobiana associata ad X SdRc compatta è il gruppo quoziente

$$\text{Jac}(X) = (\Omega^1(X))^* / \Lambda$$

(duale del gruppo dei differenziali olomorfi, modulo periodi).

1.2.1. Osserviamo prima di tutto che, se X ha genere g , allora $\dim_{\mathbb{C}} \Omega^1(X) = g$, e anche $\dim_{\mathbb{C}} (\Omega^1(X))^* = g$; quindi una scelta di basi permette di ottenere degli isomorfismi con $\mathbb{C}^g$.

1.3. Il sottogruppo dei periodi è generato dagli elementi del tipo $\int_{a_i}$ e $\int_{b_i}$ (per una rappresentazione della SdRc come $4g$ -agone) che si dicono gli a -periodi e i b -periodi. Per ogni $\omega \in \Omega^1(X)$ poniamo

$$A_i(\omega) = \int_{a_i} \omega \quad \text{e} \quad B_i(\omega) = \int_{b_i} \omega$$

(a - e b -periodi di ω).

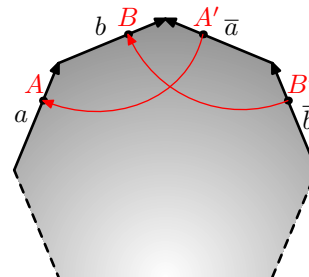
1.3.1. Per σ differenziale meromorfo, definiamo la “primitiva” $(\int \sigma)(P) = \int_O^P \sigma$ (O punto fissato di X). Allora per ogni τ differenziale meromorfo, abbiamo

$$2\pi i \sum_{P \in \mathcal{P}} \text{res}_P((\int \sigma)\tau) = \int_{\partial \mathcal{P}} (\int \sigma)\tau = \sum_{i=1}^g (A_i(\sigma)B_i(\tau) - A_i(\tau)B_i(\sigma))$$

(dove $\mathcal{P}$ è una rappresentazione poligonale piana per X). Infatti, detti a_i e b_i i lati del poligono P (sono i lati in $\partial \mathcal{P}$), considerati i punti $A \in a_i$ e il corrispondente $A' \in \bar{a}_i$ (e anche $B \in b_i$ e il

corrispondente $B' \in \bar{b}_i$) abbiamo:

$$\begin{aligned} (\int \sigma)(A) - (\int \sigma)(A') &= \int_{A'}^A \sigma = - \int_{b_i} \sigma = -B_i(\sigma) \\ (\int \sigma)(B) - (\int \sigma)(B') &= \int_{B'}^B \sigma = \int_{a_i} \sigma = A_i(\sigma) \end{aligned}$$



e possiamo allora calcolare:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{D}} (\int \sigma) \tau &= \sum_i \left(\int_{a_i} + \int_{\bar{a}_i} + \int_{b_i} + \int_{\bar{b}_i} \right) (\int \sigma) \tau = \\ &= \sum_i \left(\int_{a_i} \left(\int_O^A \sigma - \int_O^{A'} \sigma \right) \tau(A) + \int_{b_i} \left(\int_O^B \sigma - \int_O^{B'} \sigma \right) \tau(B) \right) = \\ &= \sum_i \left(-B_i(\sigma) \int_{a_i} \tau + A_i(\sigma) \int_{b_i} \tau \right) = \sum_i \left(-B_i(\sigma) A_i(\tau) + A_i(\sigma) B_i(\tau) \right). \end{aligned}$$

1.3.2. Per $\omega \in \Omega^1(X)$ risulta

$$\Im \sum_{i=1}^g (A_i(\omega) \overline{B_i(\omega)}) < 0$$

perché possiamo applicare la formula precedente a $\sigma = \omega$, $\tau = \bar{\omega}$ e tenendo conto che

$$(2i \Im \sum A_i(\omega) \overline{B_i(\omega)}) = \int_{\partial \mathcal{D}} (\int \omega) \bar{\omega} = \int_{\mathcal{D}} \omega \wedge \bar{\omega} = \int_{\mathcal{D}} f \bar{f} dz \wedge d\bar{z} = -2i \int_{\mathcal{D}} |f|^2 dx \wedge dy$$

(teorema di Stokes, poi esplicitando con $\omega = f dz$).

1.3.3. Come conseguenza, $\omega = 0$ se e solo se $A_i(\omega) = 0$ per ogni i , o equivalentemente $B_i(\omega) = 0$ per ogni i .

1.3.4. MATRICI DEI PERIODI (RELAZIONI DI RIEMANN). Scelta una base $\omega_1, \dots, \omega_g$ di $\Omega^1(X)$ su $\mathbb{C}$, i $2g$ vettori di $\mathbb{C}^g$ dati da

$$A_i(\omega_j) = \begin{pmatrix} \int_{a_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{a_i} \omega_g \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, g \quad \text{e} \quad B_i(\omega_j) = \begin{pmatrix} \int_{b_i} \omega_1 \\ \vdots \\ \int_{b_i} \omega_g \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, g$$

formano le due matrici A e B dette matrici dei periodi nelle basi scelte a_i, b_i di $H_1(X)$ e ω_j di $\Omega^1(X)$.

Le due matrici sono invertibili (cioè di rango massimo g) e inoltre soddisfano alle relazioni bilineari di Riemann:

- (1) $A^t B = B^t A$
- (2) $i(A^t \bar{B} - B^t \bar{A}) > 0$ (matrice hermitiana definita positiva).

Infatti per (1) basta usare i risultati precedenti, con $\sigma = \omega_i$, $\tau = \omega_j$, e notare che l'integrale di superficie è nullo, trattandosi di forme olomorfe. Per (2) conviene esplicitare $\Im(A\bar{B}) = 2(A\bar{B} - \bar{A}B)$ e usare la formula di negatività con $\omega = \sum_k c_k \omega_k$.

1.3.5. Cambiando generatori di $H_1(X)$ o di $\Omega^1(X)$ si può far sì che la matrice A diventi l'identità, e in questo caso la matrice dei b -periodi $\tilde{B}$ si dice normalizzata e le relazioni bilineari di Riemann dicono semplicemente (e sono equivalenti a) che essa è simmetrica con parte immaginaria definita positiva.

1.3.6. Infine, le colonne delle matrici A e B danno $2g$ vettori (di $\mathbb{C}^g$) che sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ (possiamo ragionare sulla matrice normalizzata, che ha la parte immaginaria definita positiva; insieme alla matrice unità otteniamo $2g$ colonne indipendenti su $\mathbb{R}$).

1.4. Dalle considerazioni precedenti risulta dunque che in quanto gruppi abeliani abbiamo

$$\text{Jac}(X) \cong \mathbb{C}^g / \langle A, B \rangle_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{C}^g / \langle \mathbb{I}_g, \tilde{B} \rangle_{\mathbb{Z}}$$

il che generalizza la definizione del toro complesso

$$\mathbb{T}_\tau = \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}}$$

(caso di dimensione 1). Di solito si indica con $\mathbb{H}_g$ e si chiama semispazio di Siegel lo spazio delle matrici simmetriche complesse con parte immaginaria definita positiva; il caso $g = 1$ è quello del semipiano di Poincaré. Il teorema di Torelli dirà che la matrice $\tilde{B} \in \mathbb{H}_g$ determina la SdRc X di genere g a meno di isomorfismo, come τ fa per i tori 1-dimensionali, ovvero le SdRc di genere 1.

1.4.1. Dalla descrizione esplicita si vede dunque facilmente che le Jacobiane di SdRc sono varietà complesse di dimensione g , detti tori g -dimensionali, e che si tratta di varietà compatte, poiché sono isomorfe a prodotti di $2g$ copie di $\mathbb{S}^1$ (circolo unitario sul piano).

1.4.2. Le relazioni bilineari di Riemann garantiscono infine che le Jacobiane di SdRc si possono immergere in spazi proiettivi come varietà algebriche (questo capita sempre in dimensione 1, non è in generale vero per tori complessi in dimensioni superiore): queste si dicono varietà abeliane (varietà algebriche complesse con struttura di gruppo data da mappe algebriche).

1.5. DIFFERENZIALI NORMALIZZATI DI SECONDA E TERZA SPECIE. Scelta una base a_i, b_i per l'omologia e una base ω_k di differenziali olomorfi (o di prima specie) normalizzata come sopra, possiamo normalizzare i differenziali di seconda specie in P e di terza specie in P, Q imponendo che abbiano nulli tutti gli a -periodi (basta sommare un opportuno differenziale olomorfo). Con questa normalizzazione risulta che:

(1) $B_k(\omega_P^{(n)}) = \frac{2\pi i}{n!} f_k^{(n-1)}(P)$ (dove $\omega_k = f_k dz$ con z coordinata locale in P);

(2) $B_k(\omega_{P,Q}) = 2\pi i \int_Q^P \omega_k$.

Per entrambe le formule, prima si osserva che i b -periodi cercati coincidono con l'integrale sul bordo del poligono di $(\int \omega_k)$ moltiplicato per il differenziale in questione; poi basta valutare l'integrale di circuito con i residui.

2. Mappa di Abel-Jacobi.

2.1. MAPPE DI ABEL-JACOBI. Sia $P \in X$ punto di una SdRc. L'integrale $\int_O^P \omega$ dipende (da O e) da P e non dal cammino scelto per l'integrazione da O a P , modulo il sottogruppo dei periodi di X . Abbiamo quindi una mappa ben definita

$$A : X \longrightarrow \text{Jac}(X) \quad P \longmapsto \int_O^P \left(: \omega \mapsto \int_O^P \omega \right)$$

che si estende per linearità ai divisori di X :

$$A : \text{Div}(X) \longrightarrow \text{Jac}(X) \quad \sum_i a_i P_i \longmapsto \sum_i a_i A(P_i) = \sum_i a_i \int_O^{P_i}.$$

2.1.1. Le mappe A (dipendono da O) ristrette ai divisori di grado 0 non dipendono da O e definiscono una unica mappa di gruppi abeliani

$$A_0 : \text{Div}_0(X) \longrightarrow \text{Jac}(X)$$

che si dice la mappa di Abel-Jacobi per X .

Infatti, se $D = \sum_i a_i P_i$ è divisore di grado zero, e $O, O' \in X$, le due immagini $A_O(D)$ e $A_{O'}(D)$ differiscono per

$$A_O(D) - A_{O'}(D) = \sum_i a_i \int_O^{P_i} - \sum_i a_i \int_{O'}^{P_i} = \sum_i (a_i \int_O^{O'}) = \left(\sum_i a_i \right) \int_O^{O'} = 0$$

e cioè coincidono.

2.1.2. La mappa iniziale A definita da tutto $\text{Div}(X)$ è allora data dalla scelta del punto O e dalla composizione $\text{Div}(X) \longrightarrow \text{Div}_0(X) \xrightarrow{A_0} \text{Jac}(X)$ dove la prima mappa manda $D \in \text{Div}(X)$ in $D - \deg(D)O \in \text{Div}_0(X)$.

3. Teoremi di Abel e di Jacobi.

3.1. TEOREMA DI ABEL-JACOBI. La sequenza di gruppi

$$0 \longrightarrow \text{PDiv}(X) \longrightarrow \text{Div}_0(X) \xrightarrow{A_0} \text{Jac}(X) \longrightarrow 0$$

è esatta. Più precisamente:

- (1) (TEOREMA DI ABEL) per ogni $D \in \text{Div}(X)$ si ha $D \in \text{PDiv}(X)$ se e solo se $\deg(D) = 0$ e $A_0(D) = 0$ (significa esattamente che $\ker A_0 = \text{PDiv}(X)$, e caratterizza i divisori principali come i divisori di grado zero e di somma nulla sulla Jacobiana);
- (2) (TEOREMA DI INVERSIONE DI JACOBI) la mappa A_0 è suriettiva.

In particolare si deduce che

$$\text{Jac}(X) \cong \frac{\text{Div}_0(X)}{\text{PDiv}(X)} \equiv \text{Pic}_0(X)$$

(identificazione della varietà jacobiana associata a X con il gruppo dei divisori di grado 0 modulo divisori principali; questo porta ad un significato e ad una costruzione “algebrica” della jacobiana che abbiamo definito in modo “analitico” via integrali.).

3.1.1. La parte facile del teorema di Abel è il “solo se”, e garantisce la buona definizione della mappa quoziente $\text{Pic}_0(X) \rightarrow \text{Jac}(X)$. Se $D = \sum_P n_P P = \text{div}(f)$ è principale, usiamo il differenziale $\omega = df/f$ e risulta:

$$\sum_P n_P \int_O^P \omega_k = \sum_P \text{res}_P(\omega(\int \omega_k)) = \sum_{i=1}^g (A_i(\omega_k) B_i(\omega) - A_i(\omega) B_i(\omega_k)) \in \Lambda$$

(perché i periodi di ω sono in $2\pi i\mathbb{Z}$, usando il logaritmo).

3.1.2. L'altra implicazione (equivale alla iniettività della mappa quoziente $\text{Pic}_0(X) \rightarrow \text{Jac}(X)$) richiede l'uso delle relazioni bilineari di Riemann. Prendiamo $D = \sum_P n_P P$ divisore di grado zero con $A_0(D) = 0 \in \text{Jac}(X)$. Allora esiste un differenziale ω meromorfo su X con poli semplici e residui n_P nei punti P (e olomorfi altrove) per il criterio di esistenza di differenziali. Possiamo inoltre modificare ω in modo tale che i suoi periodi siano in $2\pi i\mathbb{Z}$: qui intervengono le relazioni di Riemann. Vogliamo modificare ω con un differenziale $\sum_k c_k \omega_k$ per ottenere la condizione voluta, e si trovano i coefficienti c_k osservando che la sequenza

$$\mathbb{C}^g \xrightarrow{\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}} \mathbb{C}^{2g} \xrightarrow{(B^t - A^t)} \mathbb{C}^g$$

è esatta per le relazioni di Riemann e questioni di dimensioni. Allora, a partire dagli a - e b -periodi di ω (sono nel nucleo della seconda mappa) si trovano i coefficienti c (immagine della prima mappa) con cui modificare il differenziale.

A questo punto, definiamo $f(P) = \exp \int_O^P \omega$ che è funzione meromorfa ben definita, indipendente dal cammino di integrazione, olomorfa dove ω lo è; nei punti P del divisore D abbiamo in coordinate locali $\omega = n_P/z + g(z)$, $\int \omega = n \log z + h(z)$, quindi $f(z) = z^{n_P} e^{h(z)}$, quindi meromorfa con il divisore desiderato.

3.1.3. La dimostrazione del teorema di Jacobi invece è equivalente alla suriettività di A_0 , e si può fare localmente. Si dimostra in effetti che già dai divisori effettivi di grado g si surietta $\text{Jac}(X)$ in questo modo: presi g punti $M_i \in X$ e per punti $P_i \in V_i$ intorno dei punti dati, poniamo $D = \sum (P_i - M_i)$, e allora la mappa A definisce una mappa $\prod_i V_i \rightarrow \mathbb{C}^g$ che è $A(D) = (\sum_i \int_{M_i}^{P_i} \omega_k)_k$, il cui jacobiano si calcola con $\det(\omega_k(P_i))$: basta quindi dimostrare che questo determinante non si annulla (allora la mappa è localmente suriettiva). In generale la mappa $\Omega(X) \rightarrow \mathbb{C}^g$ che manda un differenziale nella g -upla calcolata nei g punti scelti è iniettiva (quindi isomorfismo) per una scelta opportuna (generica, in effetti) dei punti.

3.2. ANALITICITÀ E FIBRE DELLA MAPPA DI ABEL-JACOBI. Indicheremo sempre con la stessa lettera A anche le restrizioni della mappa di Abel-Jacobi a sottinsiemi dello spazio dei divisori.

3.2.1. DIVISORI EFFETTIVI E POTENZE SIMMETRICHE DI X . Possiamo restringere la mappa di Abel-Jacobi ai sottinsiemi dei divisori formati dai divisori positivi di un certo grado (tolto un fissato O per ottenere un divisore di grado nullo, per applicare A_0). L'insieme dei divisori effettivi di grado k può essere visto come il quoziente di X^k (prodotto cartesiano di k copie di X) modulo l'azione del gruppo simmetrico su k elementi; indichiamo con $S^k(X) = X^{(k)}$ questo quoziente, detto prodotto

simmetrico k -esimo di X . Dal quoziente $X^k \rightarrow X^{(k)}$ otteniamo una struttura di varietà analitica per il prodotto simmetrico, che usa come carte il prodotto di carte locali di X fuori dai luoghi delle diagonali (dove due o più termini sono uguali), e funzioni simmetriche elementari delle carte locali di X altrimenti.

Allora possiamo dimostrare che la mappa composta

$$X^{(d)} \longrightarrow \text{Div}_0(X) \xrightarrow{A_0} \text{Jac}(X) \quad \text{oppure} \quad X^{(d)} \times X^{(d)} \longrightarrow \text{Div}_0(X) \xrightarrow{A_0} \text{Jac}(X)$$

(la prima mappa manda D in $D - \deg(D)O$, oppure (D, D') in $D - D'$) è olomorfa per le strutture analitiche definite sui due spazi.

3.2.2. FIBRE E IMMAGINI DI A . Per ogni $D \in X^{(d)}$ abbiamo che la fibra in $A(D)$:

$$A^{-1}(A(D)) = \{D' \in X^{(d)} : D' \sim D\} = \{D + \text{div}(f) : f \in \mathcal{L}(D)\}$$

è quindi uno spazio proiettivo di dimensione $\dim |D|$. Per esempio per $d = g$ sappiamo da Jacobi che la mappa è suriettiva, quindi genericamente finita, e allora genericamente iniettiva.

Poniamo $W_d = A(X^{(d)}) \subseteq \text{Jac}(X)$. Si tratta di una sottovarietà di dimensione d per $1 \leq d \leq g$ (tutto $\text{Jac}(X)$ per $d \geq g$). In particolare W_{g-1} è un divisore di $\text{Jac}(X)$.

3.3. CASO DEL TORO COMPLESSO. Usando come SdRc il toro $\mathbb{T}_\tau = \mathbb{C}/\Lambda_\tau$ ove $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ (a il lato da 0 a 1, e b il lato da 0 a τ), abbiamo $g = 1$, $H_1(\mathbb{T}_\tau) = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$ e $\Omega^1(\mathbb{T}_\tau) = \mathbb{C}dz$.

I periodi in questo caso sono $\int_a dz = 1$ e $\int_b dz = \tau$. Quindi risulta

$$\text{Jac}(\mathbb{T}_\tau) \cong \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{T}_\tau$$

e cioè la varietà jacobiana del toro è isomorfa al toro stesso.

3.3.1. Questo fatto ci permette di ritrovare il teorema di Abel per i tori nella forma

$$D \in \text{PDiv}(X) \quad \text{se e solo se} \quad \deg(D) = 0 \quad \text{e} \quad s(D) = 0$$

(ove s è somma su $\text{Jac}(\mathbb{T}_\tau) \cong \mathbb{T}_\tau$, cioè $s = A_0$) e anche nella forma relativa alla curva ellittica corrispondente:

3.3.2. Infatti, usando come divisore $D = P_1 + P_2 + P_3 - 3O$ e la mappa $v : \mathcal{C}_\tau \rightarrow \mathbb{T}_\tau$ vediamo che

$$D = \text{div}(f) \quad \text{se e solo se} \quad (\deg(D) = 0 \quad \text{e}) \quad v(P_1 + P_2 + P_3 - 3O) = v(P_1) + v(P_2) + v(P_3) = 0$$

e osserviamo che necessariamente f risulta lineare, e dunque ha come divisore una retta che incontra la curva ellittica nei tre punti P_1, P_2, P_3 (e ha un polo d'ordine 3 nel punto improprio O della curva). Questo significa esattamente che v è mappa di gruppi abeliani tra la legge geometrica della curva ellittica e quella indotta da $\mathbb{C}$ sul toro.

3.4. VARIETÀ ABELIANE DI DIMENSIONE 1. Concludiamo questa sezione facendo notare che, seppur disponiamo di una mappa $A : X \rightarrow \text{Jac}(X)$ che immerge una SdRc X in una varietà con struttura di gruppo, l'immagine di X non è un sottogruppo della jacobiana, a meno che non sia $g = 1$, nel qual caso si ha canonicamente $X = \text{Jac}(X)$.

Altrimenti (per $g > 1$) il teorema di Jacobi ci dice che X è immersa in $\text{Jac}(X)$ in modo estremamente "sghembo" rispetto alla struttura di gruppo, perché il più piccolo sottogruppo di $\text{Jac}(X)$ contenente X (cioè il sottogruppo generato dai punti di X in $\text{Jac}(X)$) è tutto $\text{Jac}(X)$: bastano le g -uple di punti di X per generare tutta la Jacobiana usando la sua legge di gruppo.

3.4.1. In effetti possiamo dimostrare che le uniche SdRc che ammettono una struttura di gruppo che le renda varietà abeliane sono quelle di genere 1, cioè solo i tori complessi, ovvero solamente le curve ellittiche (in senso esteso: curve algebriche di genere 1). Lo faremo usando alcuni concetti nuovi.

3.4.2. TEOREMA DEL PUNTO FISSO DI LEFSCHETZ-HOPF. Siano X una varietà reale compatta e orientabile e $\alpha : X \rightarrow X$ una applicazione continua. Allora risulta che

$$(\Delta \cdot \Gamma_\alpha) = \sum_i (-1)^i \text{tr}(\alpha|H_i(X, \mathbb{Q}))$$

dove:

Δ è la diagonale di X in $X \times X$;

Γ_α è il grafico di α in $X \times X$;

$\Delta \cdot \Gamma_\alpha$ è il prodotto di intersezione di Δ con Γ_α , dunque $(\Delta \cdot \Gamma_\alpha)$ il numero di punti fissi di α contati con l'opportuna molteplicità;

$\alpha|H_i(X, \mathbb{Q})$ è l'endomorfismo ($\mathbb{Q}$ -lineare) indotto da α sui gruppi di omologia $H_i(X, \mathbb{Q})$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$ (invece che $\mathbb{Z}$ come fin'ora);

tr è la traccia in quanto endomorfismo di uno spazio vettoriale di dimensione finita (somma dei termini diagonali di una qualunque sua matrice).

3.4.3. Non dimostreremo il risultato nemmeno per superficie (di solito è riportato nei libri di topologia algebrica, per es. Bredon), ma facciamo alcuni commenti:

- (1) invece di H_i si possono usare anche i gruppi di coomologia H^i (questioni di dualità);
- (2) è un teorema di Hopf il fatto che, se $f: C \rightarrow C$ è un morfismo di complessi di spazi vettoriali di dimensione finita su un corpo, allora risulta $\sum_i (-1)^i \text{tr}(f_i) = \sum_i (-1)^i \text{tr}(f_i|H_i(C))$ (si tratta di un elemento del corpo);
- (3) La quantità dell'enunciato è diversa da zero se e solo se α ammette punti fissi, dunque è nulla se e solo se α non ha punti fissi.

3.4.4. Vediamo ora come applicare il teorema di Lefschetz-Hopf per dimostrare il seguente enunciato: *se una curva proiettiva non singolare possiede una legge di gruppo algebrico, allora essa ha genere 1 (e quindi può essere immersa nel piano proiettivo come cubica non singolare).*

Sia X la curva, e consideriamola come superficie reale compatta e orientabile; dalla legge di gruppo per ogni $P \in X$ abbiamo un morfismo di traslazione $\alpha_P: X \rightarrow X$ con $\alpha_P(Q) = Q + P$ che è applicazione continua priva di punti fissi se $P \neq 0$ (elemento nullo della legge di gruppo). Dunque per $P \neq 0$ abbiamo $\Delta \cdot \Gamma_{\alpha_P} = 0$.

La funzione $X \rightarrow \mathbb{Z}$ che manda P in $(\Delta \cdot \Gamma_{\alpha_P})$ è localmente costante, dunque costante poiché X è connessa, e di conseguenza abbiamo $\Delta \cdot \Gamma_{\alpha_0} = \Delta \cdot \Delta = 0$. Applicando il teorema di Lefschetz-Hopf per α_0 abbiamo allora (α_0 essendo l'identità) $\text{tr}(\alpha|H_i(X, \mathbb{Q})) = \dim_{\mathbb{Q}} H_i(X, \mathbb{Q})$, dunque

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} H_i(X, \mathbb{Q}) = 0$$

(caratteristica di Eulero-Poincaré tramite omologia razionale) da cui segue che $g(X) = 1$.

4. Divisori Theta e teoremi di Riemann e Torelli.

4.1. PROBLEMA. Data una superficie di Riemann X , possiamo scegliere una base a_i, b_i dell'omologia e una base ω_k dei differenziali olomorfi in modo che le matrici dei periodi siano normalizzate: $A = \mathbb{I}$ e $B = \tilde{B} \in \mathbb{H}_g$.

Il problema di Torelli consiste nel capire se il dato della matrice $\tilde{B} \in \mathbb{H}_g$ determina unicamente X a meno di isomorfismi. La risposta è affermativa, e l'idea della dimostrazione è questa: naturalmente $\tilde{B} \in \mathbb{H}_g$ determina la jacobiana come quoziente $J = \mathbb{C}^g / \langle \mathbb{I}, \tilde{B} \rangle_{\mathbb{Z}}$, e determina anche una funzione theta ϑ su $\mathbb{C}^g$ che a sua volta definisce un divisore Θ su J . Ora un teorema di Riemann dice che questo divisore è un traslato dell'immagine $W_{g-1} = A(X^{(g-1)})$, e un teorema di Torelli dice che questa determina X a meno di isomorfismo.

4.2. FUNZIONE E DIVISORE THETA. Con i dati precedenti, definiamo la funzione $\vartheta(z)$ per $z \in \mathbb{C}^g$ tramite:

$$\vartheta(z) = \vartheta(z, B) = \sum_{n \in \mathbb{N}^g} \exp(\pi i n \cdot B n + 2\pi i n \cdot z)$$

($\cdot$ usuale prodotto scalare; si noti che nel caso 1-dimensionale è esattamente la funzione theta di Riemann studiata sui tori). Indicando con e_i le colonne della matrice $\mathbb{I}$ e b_i le colonne della B , abbiamo:

4.2.1. la serie che definisce $\vartheta(z)$ converge uniformemente sui compatti,

4.2.2. la funzione $\vartheta(z)$ è pari,

4.2.3. periodicità rispetto alla prima parte del reticolo: $\vartheta(z + e_i) = \vartheta(z)$,

4.2.4. semi-periodicità sulla seconda parte del reticolo: $\vartheta(z + b_i) = \exp(-\pi i b_{ii} - 2\pi i z_i) \vartheta(z)$, a meno di fattori esponenziali.

4.2.5. Indichiamo con Θ il divisore su $\text{Jac}(X)$ determinato dalle funzioni locali ϑ (nella intersezione di due aperti un rapporto tra tali funzioni è invertibile, quindi gli zeri sono ben definiti

globalmente). Per ogni $v \in \mathbb{C}^g$ si indica con Θ_v il traslato $\Theta + v$, che è il divisore della funzione $\vartheta(z - v)$.

4.3. TEOREMA DI RIEMANN. Fissata una immersione di X in $\text{Jac}(X)$ (basta fissare un punto $O \in X$), consideriamo

$$J_0(X) = \{v \in \text{Jac}(X) : X \not\subseteq \Theta_v\}.$$

Sono i punti di $\text{Jac}(X)$ tali che X non è contenuta nel traslato del divisore Θ , e per questi possiamo considerare l'intersezione di X e Θ_v in quanto divisore di X ; si tratta di un divisore effettivo di grado g . Abbiamo allora la mappa

$$J_0(X) \longrightarrow X^{(g)} \quad v \mapsto X \cap \Theta_v$$

e la composizione con la mappa di Abel-Jacobi è una traslazione $v \mapsto v - \kappa$ per un ben definito $\kappa \in \text{Jac}(X)$.

4.3.1. TEOREMA DI RIEMANN: abbiamo che $W_{g-1} = \Theta_{-\kappa}$ (in particolare la funzione theta determina l'immagine di $X^{(g-1)}$).

4.4. TEOREMA DI TORELLI. La coppia $(\text{Jac}(X), \Theta)$ determina X ; più precisamente se $f : X \rightarrow Y$ è funzione olomorfa tra SdRc tali che la mappa indotta $f : \text{Jac}(X) \rightarrow \text{Jac}(Y)$ è un isomorfismo con $f^*(\Theta_Y) = \Theta_X$, allora f era un isomorfismo. In particolare X è determinata a meno di isomorfismo dalla sua matrice dei periodi normalizzata $\tilde{B} \in \mathbb{H}_g$.

4.5. FUNZIONI THETA DI ORDINE SUPERIORE. Più in generale, una funzione $\vartheta(z, B)$ si dice “theta di ordine r ” se è periodica sulla prima parte del reticolo e ha fattori automorfi del tipo $\exp(\pi i r(-b_{ii} - 2z_i))$. Quindi le funzioni theta di Riemann lo sono di ordine 1.

Si può vedere che lo spazio delle theta di ordine r è di dimensione r^g (come spazio vettoriale di $\mathbb{C}$), e di conseguenza definiscono funzioni $\mathbb{C}^g/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}^{r^g-1}$.

4.5.1. TEOREMA DI IMMERSIONE DI LEFSCHETZ: per $r = 3$ abbiamo delle immersioni (delle Jacobiane in spazi proiettivi).

Appendice A

Temì d'esame SdR (Superficie di Riemann)

1. Problemi risolti (a.a. 2006/7)

1.1. PRIMA PROVA PARZIALE (21 FEBBRAIO 2007).

Testo.

Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione $Y^2 + Y^4 - X^3 - X^4 = 0$;

- (1) determinare i punti singolari di $\mathcal{C}$ e il genere della Superficie di Riemann $\tilde{\mathcal{C}}$ che desingularizza $\mathcal{C}$;
- (2) determinare grado e ramificazione della mappa di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ data dalla proiezione sull'asse delle ascisse;
- (3) esistono rivestimenti ramificati con due fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (eventualmente, indicarne uno e studiare il luogo di ramificazione)? [Sugg.: la curva $\mathcal{C}$ è di secondo grado rispetto ad una variabile proiettiva...]
- (4) esistono rivestimenti ramificati con due fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ su un toro (eventualmente, indicarne uno e studiare il luogo di ramificazione)? [Sugg.: identificare tori con curve di genere uno, e sfruttare il fatto che $\mathcal{C}$ ha equazione biquadratica in Y ...]
- * (5) determinare grado e ramificazione della mappa di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ data dalla proiezione sull'asse delle ordinate.

Soluzione.

- (1) L'equazione omogenea della curva è $X_0^2 X_2^2 + X_2^4 - X_0 X_1^3 - X_1^4 = 0$, e il sistema delle tre derivate parziali è dato da:

$$\begin{cases} 2X_0 X_2^2 - X_1^3 = 0 \\ 3X_0 X_1^2 + 4X_1^3 = 0 \\ X_0^2 X_2 + 2X_2^3 = 0 \end{cases}$$

e quindi si trova l'unico punto singolare $\left(\frac{1}{0}\right)$. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che si tratta di una cuspidale semplice, quindi di un solo posto con molteplicità 2, classe 1 e tangente $Y = 0$.

Il genere di $\tilde{\mathcal{C}}$ è quindi (essendo 4 il grado di $\mathcal{C}$) $\frac{3 \cdot 2}{2} - 1 = 2$ (formula di Plücker classica: ogni cuspidale ordinaria contribuisce con -1 , come i nodi).

- (2) La proiezione sull'asse delle ascisse è una mappa di rivestimento ramificato con 4 fogli (per ogni fissato valore di X , i punti della curva soddisfano ad una equazione di quarto grado in Y), e i punti di ramificazione sono tra i punti di $\mathcal{C}$ a tangente verticale, cioè che annullano la terza derivata parziale:

$$(X_0^2 + 2X_2^2)X_2 = 0.$$

Trattandosi di tre rette, basta intersecarle con la curva:

- (a) per $X_2 = 0$ i punti di intersezione sono dati da $X_0 X_1^3 + X_1^4 = 0$: il punto singolare contato 3 volte, e un ulteriore punto semplice, dunque di ramificazione 1; la cuspidale va contata con ramificazione 1 anch'essa, poiché è di molteplicità 2, e non ha tangente verticale.
- (b) per $X_0^2 + 2X_2^2 = 0$ si tratta di due rette ciascuna delle quali interseca $\mathcal{C}$ in punti non singolari, quindi di ramificazione, e ciascuna porta contributo 4 alla ramificazione totale.

Quindi la ramificazione totale è $1 + 1 + 8 = 10$, e dalla formula di Riemann-Hurwitz (per codominio la sfera di Riemann) si ha $g = 1 - e + r/2 = 1 - 4 + 5 = 2$, giustamente.

- (3) Consideriamo la curva nel piano affine complementare di $X_1 = 0$, quindi con equazione affine

$$Z^2 Y^2 + Y^4 - Z - 1 = 0.$$

Essendo di secondo grado in Z , è chiaro che la proiezione sull'asse delle Y (dove viene proiettato il punto singolare?) dà un rivestimento con due fogli di quell'asse. D'altra parte i punti di ramificazione sono tra quelli di $\mathcal{C}$ che annullano la prima derivata parziale,

$$2X_0X_2^2 - X_1^3 = 0.$$

Si tratta di una cubica razionale con parametrizzazione $\begin{pmatrix} s^3/2 \\ st^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$. Sostituendo nella curva data troviamo il punto singolare (contato 6 volte) e altri sei punti non singolari che sono quindi di ramificazione. D'altra parte il punto singolare non è di ramificazione, perché sull'origine dell'asse delle Y (nel piano affine Y, Z) si proiettano due punti distinti. Quindi la ramificazione totale è 6, e dalla formula di Riemann-Hurwitz (per codominio la sfera di Riemann) si ha $g = 1 - e + r/2 = 1 - 2 + 3 = 2$, giustamente.

Si poteva fare lo stesso discorso per la proiezione sull'asse delle X nel piano affine (X, Z) (complementare di $X_2 = 0$)?

Per capire meglio la situazione, esplicitiamo la mappa di proiezione: detto P in punto singolare, e r la retta $X_0 = 0$, la funzione $\pi_P : \mathcal{C} \setminus \{P\} \rightarrow r$ data da $\pi_P(Q) = (P \vee Q) \wedge r$ si estende per continuità a P mandandolo in $t_P \wedge r$ (t_P essendo la tangente in P a $\mathcal{C}$); in generale bisognerebbe estendere la mappa a $\tilde{\mathcal{C}}$, ma qui abbiamo un solo posto in P e quindi una biiezione tra $\mathcal{C}$ e $\tilde{\mathcal{C}}$... Siccome il punto di proiezione è doppio per $\mathcal{C}$, allora la mappa π_P ha $\deg \mathcal{C} - m_P(\mathcal{C}) = 4 - 2 = 2$ fogli, e il punto P stesso per tale mappa è di molteplicità $m_P(t_P, \mathcal{C}) - m_P(\mathcal{C}) = 3 - 2 = 1$, perciò di ramificazione zero.

- (4) Consideriamo la curva $\mathcal{D}$ di equazione affine

$$Y + Y^2 - X^3 - X^4 = 0$$

(e proiettiva $X_0^3X_2 + X_0^2X_2^2 - X_0X_1^3 - X_1^4 = 0$); si tratta di una quartica con un punto doppio con unica tangente avente molteplicità di intersezione 4 con la curva (si consideri infatti la disomogeneizzazione rispetto a Y , che dà $Z^2 + Z^3 - ZX^3 - X^4$). In tale punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ vi sono due posti lineari, di classe 1, tangente comune $X_0 = 0$ e molteplicità di intersezione 2 con una generica polare. Quindi tale punto contribuisce con $-2^{2-1+1} = -2$ alle formule di Plücker per il genere, che risulta essere $g = \frac{3 \cdot 2}{2} - 2 = 1$; quindi $\mathcal{D}$ si desingularizza in un toro $\tilde{\mathcal{D}}$.

È chiaro che la mappa $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y^2 \end{pmatrix}$ porta $\mathcal{C}$ in $\mathcal{D}$ nel piano affine $X_0 \neq 0$, e che induce un rivestimento con 2 fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\tilde{\mathcal{D}}$ (attenzione: $\tilde{\mathcal{C}}$ nella retta impropria ha quattro punti, quelli non singolari di $\mathcal{C}$, mentre $\tilde{\mathcal{D}}$ ha due punti, corrispondenti ai due posti nell'unico punto improprio, singolare, di $\mathcal{D}$...). Il luogo di ramificazione è individuato dai punti di $\tilde{\mathcal{C}}$ corrispondenti a quelli di $\mathcal{C}$ di ordinata nulla, quindi a due punti distinti, che sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La ramificazione totale è quindi 2, e riotteniamo ancora il genere usando la formula di Riemann-Hurwitz (per codominio un toro) $g = 1 + r/2 = 1 + 1 = 2$, giustamente.

- (5) La proiezione sull'asse delle ordinate è una mappa di rivestimento ramificato con 4 fogli (per ogni fissato valore di Y , i punti della curva soddisfano ad una equazione di quarto grado in X), e i punti di ramificazione sono tra quelli a tangente orizzontale, cioè che annullano la seconda derivata parziale: $(3X_0 + 4X_1)X_1^2 = 0$.

Trattandosi di tre rette, basta intersecarle con la curva:

- (a) per $X_1^2 = 0$ i punti di intersezione sono dati dal punto singolare e due ulteriori punti semplici, dunque di ramificazione 2 ciascuno (è la molteplicità di intersezione ivi di curva e polare; per controllo, tali punti sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm i \end{pmatrix}$, e sulle rette $Y = \pm i$ la curva dà $X^3 + X^4 = 0$, quindi $X = 0$ con molteplicità 3, ramificazione 2, e si tratta di punti di flesso della curva...); la cuspidale va contata con ramificazione 2 poiché è di molteplicità 2, e ha tangente orizzontale (e classe 1: la sua ramificazione è $m + c - 1 = 2 + 1 - 1$).
- (b) per $3X_0 + 4X_1 = 0$ si tratta di una retta che interseca $\mathcal{C}$ in punti non singolari, quindi di ramificazione.

La ramificazione totale è allora $2 + 2 + 2 + 4 = 10$, e dalla formula di Riemann-Hurwitz (per codominio la sfera di Riemann) si ha ancora $g = 1 - e + r/2 = 1 - 4 + 5 = 2$.

N.B. Fare il disegno della curva (può sembrare una goccia in qualche piano affine) non è molto utile, perché buona parte della sua struttura complessa è invisibile (per esempio i rivestimenti ramificati degli assi hanno al più due punti reali...).

1.2. SECONDA PROVA PARZIALE (16 MARZO 2007).

Testo.

Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione $Y^2 + Y^4 - X^3 - X^4 = 0$; si ricordi che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne è l'unico punto singolare (cuspid ordinaria con posto $(\frac{T^2}{T^3+\dots})$). Sia $\tilde{\mathcal{C}}$ la Superficie di Riemann associata.

- (1) calcolare il divisore $\text{div}(dX)$ del differenziale dX , e i divisori $\text{div}(X)$, $\text{div}(Y)$ delle funzioni X, Y su $\tilde{\mathcal{C}}$;
- (2) determinare una base su $\mathbb{C}$ dello spazio $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$ dei differenziali olomorfi;
- (3) esplicitare la mappa canonica di $\tilde{\mathcal{C}}$; si tratta di una immersione?
- (4) determinare, per ogni $n \geq 0$, la dimensione su $\mathbb{C}$ di $\mathcal{L}(nP)$ dove P è il punto di $\tilde{\mathcal{C}}$ corrispondente al punto singolare di $\mathcal{C}$. Per quali n questi divisori danno immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ in spazi proiettivi (e di che dimensione)?
- *(5) Fino al primo di tali n , si descrivano generatori per $\mathcal{L}(nP)$ ed equazioni cartesiane dell'immagine di $\tilde{\mathcal{C}}$ tramite $\varphi_{|nP|}$.

Soluzione. Chiamiamo x, y le funzioni X, Y ristrette a $\mathcal{C}$, in modo da usare X, Y per le coordinate affini usuali.

- (1) Per calcolare i divisori richiesti, ricordiamo che $\tilde{\mathcal{C}}$ ha un unico punto P corrispondente al posto di $\mathcal{C}$ di centro origine, in cui possiamo usare come parametrizzazione $(\frac{T^2}{T^3+\dots})$. Inoltre i punti sulla retta impropria sono quattro $Q_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ con $\varepsilon^4 = 1$, e in tali posti possiamo usare come parametro locale sia $\zeta = X_0/X_1$, sia $\eta = X_2/X_1$ (basta controllare che non siano tangenti...); infine il passaggio di coordinate da (X, Y) a (ζ, η) (due carte coordinate affini) è dato da $X = \frac{X_1}{X_0} = \frac{X_1/X_1}{X_0/X_1} = \frac{1}{\zeta}$ e $Y = \frac{X_2}{X_0} = \frac{X_2/X_1}{X_0/X_1} = \frac{\eta}{\zeta}$. Dunque $dX = d\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\frac{1}{\zeta^2}d\zeta$. Possiamo quindi vedere che

$$\text{ord}_Q(dx) = \begin{cases} 0 & \text{se } X \text{ è coordinata locale a } Q \\ 1 & \text{se } Q = P \text{ perché } d(T^2) = 2TdT \\ 1 & \text{se } Q \text{ è affine, ma } X \text{ non è coordinata locale} \\ -2 & \text{se } Q \text{ è uno dei punti impropri} \end{cases}$$

dove i punti che non hanno X come coordinata locale sono quelli che annullano la derivata parziale rispetto a Y dell'equazione della curva, quindi i punti di $Y(1 + 2Y^2) = 0$ (che stiano anche su $\mathcal{C}$). Si tratta (a parte P , già considerato a parte), di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e di altri otto punti: P_1, P_2, P_3, P_4 punti di $\mathcal{C}$ sulla retta $Y = i/\sqrt{2}$, e dei quattro coniugati $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ punti di $\mathcal{C}$ sulla retta $Y = -i/\sqrt{2}$. Dunque:

$$\text{div}(dx) = P + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sum_i P_i + \sum_i \bar{P}_i - 2 \sum_\varepsilon Q_\varepsilon$$

(divisore di grado $2g - 2 = 2$). Con considerazioni analoghe si trova che

$$\text{div}(x) = 2P + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix} - \sum_\varepsilon Q_\varepsilon$$

e

$$\text{div}(y) = 3P + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \sum_\varepsilon Q_\varepsilon$$

(divisori di grado zero, essendo di funzioni meromorfe).

- (2) Poiché abbiamo facilmente (in realtà già implicitamente calcolato prima) che

$$\text{div}(1 + 2y^2) = \sum_i P_i + \sum_i \bar{P}_i - 2 \sum_\varepsilon Q_\varepsilon$$

risulta che

$$\operatorname{div} \left(\frac{dx}{1+2y^2} \right) = P + \left(\frac{1}{0} \right) \quad \text{e} \quad \operatorname{div} \left(\frac{x}{y} \frac{dx}{1+2y^2} \right) = \left(\frac{1}{i} \right) + \left(\frac{1}{-i} \right)$$

(divisori positivi, quindi differenziali privi di poli), e quindi una base per $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$ è data da $\frac{dx}{1+2y^2}$ e $\frac{x}{y} \frac{dx}{1+2y^2}$ (spazio vettoriale di dimensione $g = 2$ su $\mathbb{C}$).

- (3) Dal punto precedente abbiamo $\mathcal{L}(K) = \langle 1, \frac{x}{y} \rangle$ (usando come K il divisore canonico del primo differenziale olomorfo trovato), e quindi la mappa canonica si esplicita come

$$\begin{aligned} \varphi_K : \tilde{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ Q &\longmapsto \begin{pmatrix} x/y \\ 1 \end{pmatrix}(Q) = \begin{pmatrix} x(Q) \\ y(Q) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(il punto P va in $(\frac{1}{0})$). Si vede subito che è un rivestimento con due fogli della retta proiettiva (d'altra parte tutte le SdRc di genere due sono iperellittiche), e anche che si identifica con la proiezione di $\mathcal{C}$ dall'origine sulla retta impropria usuale.

- (4) Per $n \geq 2g - 1 = 3$ il teorema di Riemann-Roch dà $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nP) = n - 1$; per $n = 0$ abbiamo $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(0) = 1$ (per compattezza di $\tilde{\mathcal{C}}$), per $n = 1$ abbiamo $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P) = 1$ (perché $\tilde{\mathcal{C}}$ non è omeomorfa alla sfera), e ci resta un dubbio per $n = 2$: la dimensione potrebbe essere 1 oppure 2 (ma per questo basta controllare un generatore non costante di $\mathcal{L}(3P)$, vedendo se ha polo d'ordine 2 o 3 in P).

Per $n \geq 2g + 1 = 5$ abbiamo una immersione di $\tilde{\mathcal{C}}$ in $\mathbb{P}^{n-2}(\mathbb{C})$; per $n = 4$ abbiamo una mappa olomorfa di $\tilde{\mathcal{C}}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, che non può essere una immersione, poiché non esistono curve algebriche piane lisce di genere 2.

- (5) Osservando che y ha uno zero d'ordine 3 in P , e che la funzione $1+x$ ha divisore $2\left(\frac{1}{0}\right) + \left(\frac{1}{i}\right) + \left(\frac{1}{-i}\right) - \sum_{\varepsilon} Q_{\varepsilon}$ possiamo concludere che la funzione $\frac{1+x}{y}$ ha unico polo in P di ordine 3 (che divisore?), quindi possiamo anche concludere che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(2P) = 1$. Considerando le funzioni x^2 e xy (zeri di ordine 4 e 5 in P), possiamo concludere che

$$\mathcal{L}(nP) = \begin{cases} \langle 1 \rangle & \text{se } n = 0 \\ \langle 1 \rangle & \text{se } n = 1 \\ \langle 1 \rangle & \text{se } n = 2 \\ \langle 1, \frac{1+x}{y} \rangle & \text{se } n = 3 \\ \langle 1, \frac{1+x}{y}, \frac{1+y^2}{x^2} \rangle & \text{se } n = 4 \\ \langle 1, \frac{1+x}{y}, \frac{1+y^2}{x^2}, \frac{1+x+y^2}{xy} \rangle & \text{se } n = 5 \end{cases}$$

(i numeratori servono per eliminare i poli diversi da P dei denominatori). Le mappe olomorfe corrispondenti a questi divisori sono (a parte i casi banali) le seguenti tre:

(5.1)

$$\begin{aligned} \varphi_{|3P|} : \tilde{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ Q &\longmapsto \begin{pmatrix} (1+x)/y \\ 1 \end{pmatrix}(Q) = \begin{pmatrix} 1+x(Q) \\ y(Q) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che è un rivestimento con tre fogli di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (suriettivo, quindi).

(5.2)

$$\begin{aligned} \varphi_{|4P|} : \tilde{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \\ Q &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ (1+x)/y \\ (1+y^2)/x^2 \end{pmatrix}(Q) \end{aligned}$$

che ha immagine la curva piana la cui equazione si ottiene eliminando x e y dal sistema

$$\begin{cases} X_0 = 1 \\ X_1 = \frac{1+x}{y} \\ X_2 = \frac{1+y^2}{x^2} \end{cases} \quad \text{ovvero da} \quad \begin{cases} yX = 1+x \\ x^2Y = 1+y^2 \\ y^2(1+y^2) = x^3(1+x) \end{cases}$$

e si ottiene facilmente che $y = \frac{X}{Y}x$ (mescolando le equazioni), poi $x = \frac{Y}{X^2-Y}$ (sostituendo nella prima), e infine $y = \frac{X}{X^2-Y}$. Sostituendo i parametri nella penultima equazione troviamo che l'immagine soddisfa all'equazione $Y^3 - X^2 = (X^2 - Y)^2$, che è una quartica con un punto doppio ordinario nell'origine; possiamo concludere che $\varphi_{|4P|}$ non è iniettiva (né immersiva, come già sapevamo). D'altra parte, $\varphi_{|4P|}$ è genericamente iniettiva, e $\tilde{\mathcal{C}}$ è la desingularizzazione della sua stessa immagine.

(5.3)

$$\begin{aligned} \varphi_{|5P|} : \tilde{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \\ Q &\longmapsto \left(\begin{matrix} 1 \\ (1+x)/y \\ (1+y^2)/x^2 \\ (1+x+y^2)xy \end{matrix} \right) (Q) \end{aligned}$$

che è certamente una immersione perché $5P$ è divisore molto ampio, e ha immagine la curva un cui sistema di equazioni affini si ottiene eliminando x e y dal sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = 1 \\ X_1 = \frac{1+x}{y} \\ X_2 = \frac{1+y^2}{x^2} \\ X_3 = \frac{1+x+y^2}{xy} \\ y^2(1+y^2) = x^3(1+x) \end{array} \right. \quad \text{ovvero da} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{Y}{X^2-Y} \\ y = \frac{X}{X^2-Y} \\ Y^3 - X^2 = (X^2 - Y)^2 \\ xyZ = 1 + x + y^2 \end{array} \right.$$

(da prima), e quindi la curva di equazioni $Y^3 - X^2 = (X^2 - Y)^2$ e $ZXY = (X^2 - Y)^2 + Y(X^2 - Y) + X^2$, o meglio

$$\left\{ \begin{array}{l} Y^3 - X^2 = (X^2 - Y)^2 \\ ZX = Y^2 + (X^2 - Y) \end{array} \right.$$

(sostituendo la prima nella seconda, e semplificando; così sembra ad intersezione completa).

1.3. UN APPELLO (2007).

Testo.

Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione $Y^2 - Y^4 + X^3 - X^4 = 0$

- (1) determinare i punti singolari di $\mathcal{C}$ e il genere della Superficie di Riemann $\tilde{\mathcal{C}}$ che desingularizza $\mathcal{C}$;
- (2) determinare grado e ramificazione della mappa di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ data dalla proiezione sull'asse delle ascisse;
- (3) esistono rivestimenti ramificati con due fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (eventualmente, indicarne uno e studiare il luogo di ramificazione)?
- (4) determinare il divisore $\text{div}(dX)$ del differenziale dX , e i divisori $\text{div}(X)$, $\text{div}(Y)$ delle funzioni X , Y su $\tilde{\mathcal{C}}$;
- (5) determinare una base su $\mathbb{C}$ dello spazio $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$ dei differenziali olomorfi;
- (6) esplicitare la mappa canonica di $\tilde{\mathcal{C}}$; si tratta di una immersione?
- (7) determinare per ogni $n \geq 0$ dimensione su $\mathbb{C}$ di $\mathcal{L}(nP)$ dove P è il punto di $\tilde{\mathcal{C}}$ corrispondente al punto singolare di $\mathcal{C}$. Per quali n questi divisori danno immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ in spazi proiettivi (e di che dimensione)?
- (8) fino al primo di tali n , si descrivano generatori per $\mathcal{L}(nP)$ ed equazioni cartesiane per l'immagine di $\tilde{\mathcal{C}}$ tramite $\varphi_{|nP|}$.

Soluzione. Chiamiamo x, y le funzioni X, Y ristrette a $\mathcal{C}$, in modo da usare X, Y per le coordinate affini usuali.

- (1) L'unico punto singolare della curva è l'origine affine, dove c'è una cuspidine ordinaria con parametrizzazione $\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} -T^2 \\ T^3 + \dots \end{pmatrix}$. In questo caso il contributo alla formula di Plücker per il genere è -1 , e il genere risulta $g = 2$.

- (2) Chiamiamo $\pi : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la proiezione. Si tratta chiaramente di un rivestimento ramificato con 4 fogli. I punti di ramificazione sono $\mathfrak{P}$ con molteplicità 2 (ramificazione 1), e i punti della curva a tangente verticale, cioè che annullano la derivata rispetto a Y dell'equazione $(Y(1 - 2Y^2))$. Si tratta quindi dei punti $\left(\frac{1}{0}\right)$ (su $Y = 0$) e di otto punti $P_i^\pm = \left(\frac{\alpha_i}{\pm/\sqrt{2}}\right)$ (sulle due rette $2Y^2 = 1$). Tutti con ramificazione 1. Quindi abbiamo $\text{Ram}(\pi) = \mathfrak{P} + \left(\frac{1}{0}\right) + \sum P_i^\pm$, e $\text{ram}(\pi) = 10$, il che torna poiché da Riemann-Hurwitz ritroviamo $g = 1 - 4 + \frac{10}{2} = 2$.
- (3) Siccome la curva è di genere 2, $\tilde{\mathcal{C}}$ è una SdR iperellittica, e quindi è un rivestimento doppio della retta proiettiva, essenzialmente tramite la mappa canonica. Una realizzazione π_∞ di questo rivestimento si può ottenere proiettando $\mathcal{C}$ dall'origine sulla retta impropria, poiché l'origine è punto doppio. In tal caso il divisore di ramificazione è formato dai punti di $\mathcal{C}$ la cui tangente passa per l'origine (cioè soddisfano $2Y^2 + X^3 = 0$), e si tratta di sei punti semplici (quindi di ramificazione 1). Di nuovo abbiamo $g = 1 - 2 + \frac{6}{2} = 2$.
- (4) Considerando che dx è il differenziale immagine inversa del differenziale dX su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tramite la mappa π prima studiata, possiamo applicare il teorema di Riemann-Hurwitz (versione differenziali) e ottenere

$$\text{div}(dx) = \pi^*(-2\infty) + \text{Ram}(\pi) = -2 \sum_{\varepsilon} Q_{\varepsilon} + \mathfrak{P} + \left(\frac{1}{0}\right) + \sum P_i^\pm$$

(metodo proposto da Davide Rinaldi), dove $Q_{\varepsilon} = \left(\frac{0}{\varepsilon}\right)$ con $\varepsilon^4 = 1$ sono i punti impropri di $\mathcal{C}$, che giustamente dà un divisore di grado $2 = 2g - 2$.

In alternativa si può studiare l'ordine di dx nei vari punti:

$$\text{ord}_Q(dx) = \begin{cases} 0 & \text{se } X \text{ è coordinata locale a } Q \\ 1 & \text{se } Q = P \text{ perché } d(T^2) = 2TdT \\ 1 & \text{se } Q \text{ è affine, ma } X \text{ non è coordinata locale} \\ -2 & \text{se } Q \text{ è uno dei punti impropri} \end{cases}$$

dove i punti che non hanno X come coordinata locale sono quelli che annullano la derivata parziale rispetto a Y dell'equazione della curva, quindi i punti che abbiamo visto di ramificazione per la proiezione sull'asse delle ascisse. Per i punti impropri abbiamo che $\zeta = X_0/X_1$ è una coordinata locale (controllare le tangenti in tali punti), e quindi $dX = d\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\frac{1}{\zeta^2}d\zeta$ presenta un polo d'ordine 2 (si ricordi che $X = \frac{X_1}{X_0} = \frac{X_1/X_1}{X_0/X_1} = \frac{1}{\zeta}$).

Invece risulta facilmente che

$$\text{div}(x) = 2\mathfrak{P} + \left(\frac{1}{0}\right) + \left(\frac{1}{-1}\right) - \sum_{\varepsilon} Q_{\varepsilon}$$

e

$$\text{div}(y) = 3\mathfrak{P} + \left(\frac{1}{0}\right) - \sum_{\varepsilon} Q_{\varepsilon}$$

- (5) Poiché si ricava facilmente che

$$\text{div}\left(\frac{dx}{1-2y^2}\right) = \mathfrak{P} + \left(\frac{1}{0}\right) \quad \text{e} \quad \text{div}\left(\frac{x}{y} \frac{dx}{1-2y^2}\right) = \left(\frac{1}{0}\right) + \left(\frac{1}{-1}\right)$$

abbiamo che una base per lo spazio dei differenziali olomorfi è data da $\frac{dx}{1-2y^2}$ e $\frac{x}{y} \frac{dx}{1-2y^2}$.

- (6) Dal punto precedente abbiamo $\mathcal{L}(K) = \langle 1, \frac{x}{y} \rangle$ (usando come K il divisore canonico del primo differenziale olomorfo trovato), e quindi la mappa canonica si esplicita come

$$\begin{aligned} \varphi_K : \tilde{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ Q &\longmapsto \begin{pmatrix} x/y \\ 1 \end{pmatrix}(Q) = \begin{pmatrix} x(Q) \\ y(Q) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(il punto P va in $\left(\frac{1}{0}\right)$). Si vede subito che coincide con π_∞ , si tratta di un rivestimento doppio e non di immersione, come già sapevamo in base al genere.

- (7) Per $n \geq 2g - 1 = 3$ il teorema di Riemann-Roch dà $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nP) = n - 1$; per $n = 0$ abbiamo $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(0) = 1$ (per compattezza di $\tilde{\mathcal{C}}$), per $n = 1$ abbiamo $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P) = 1$ (perché $\tilde{\mathcal{C}}$ non è omeomorfa alla sfera), e ci resta un dubbio per $n = 2$: la dimensione potrebbe essere 1 oppure 2 (ma per questo basta controllare un generatore non costante di $\mathcal{L}(3P)$, vedendo se ha polo d'ordine 2 o 3 in P).

Per $n \geq 2g + 1 = 5$ abbiamo una immersione di $\tilde{\mathcal{C}}$ in $\mathbb{P}^{n-2}(\mathbb{C})$; per $n = 4$ abbiamo una mappa olomorfa di $\tilde{\mathcal{C}}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, che non può essere una immersione, poiché non esistono curve algebriche piane lisce di genere 2.

- (8) Osservando che la funzione $\frac{x-1}{y}$ ha unico polo in P di ordine 3 (che divisore?), possiamo anche concludere che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(2P) = 1$. Considerando le funzioni x^2 e xy (zeri di ordine 4 e 5 in P), possiamo esplicitare

$$\mathcal{L}(nP) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{se } n = 0 \\ \mathbb{C} & \text{se } n = 1 \\ \mathbb{C} & \text{se } n = 2 \\ \langle 1, \frac{x-1}{y} \rangle & \text{se } n = 3 \\ \langle 1, \frac{x-1}{y}, \frac{y^2-1}{x^2} \rangle & \text{se } n = 4 \\ \langle 1, \frac{x-1}{y}, \frac{y^2-1}{x^2}, \frac{y^2+x-1}{xy} \rangle & \text{se } n = 5 \end{cases}$$

(i numeratori servono per eliminare i poli diversi da P dei denominatori). Le mappe olomorfe corrispondenti a questi divisori sono (a parte i casi banali) le seguenti tre:

(8.1)

$$\begin{aligned} \varphi_{|3P|} : \tilde{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ Q &\longmapsto \begin{pmatrix} (x-1)/y \\ 1 \end{pmatrix} (Q) = \begin{pmatrix} x(Q)-1 \\ y(Q) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che è un rivestimento con tre fogli di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (suriettivo, quindi).

(8.2)

$$\begin{aligned} \varphi_{|4P|} : \tilde{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \\ Q &\longmapsto \begin{pmatrix} (x-1)/y \\ (y^2-1)/x^2 \end{pmatrix} (Q) \end{aligned}$$

che ha immagine la curva piana la cui equazione si ottiene eliminando x e y dal sistema

$$\begin{cases} X_0 = 1 \\ X_1 = \frac{x-1}{y} \\ X_2 = \frac{y^2-1}{x^2} \\ y^2(y^2-1) = -x^3(x-1) \end{cases} \quad \text{ovvero da} \quad \begin{cases} yX = x-1 \\ x^2Y = y^2-1 \\ yY = -xX \end{cases}$$

e si ottiene facilmente che $y = -\frac{X}{Y+X^2}$, $x = \frac{Y}{Y+X^2}$. Sostituendo i parametri nella penultima equazione troviamo che l'immagine soddisfa all'equazione $Y^3 = X^2 - (X^2 + Y)^2$, che è una quartica con un punto doppio ordinario nell'origine; possiamo concludere che $\varphi_{|4P|}$ non è iniettiva (né immersiva, come già sapevamo). D'altra parte, $\varphi_{|4P|}$ è genericamente iniettiva, e $\tilde{\mathcal{C}}$ è la desingularizzazione della sua stessa immagine.

(8.3)

$$\begin{aligned} \varphi_{|5P|} : \tilde{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \\ Q &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ (x-1)/y \\ (y^2-1)/x^2 \\ (y^2+x-1)/xy \end{pmatrix} (Q) \end{aligned}$$

che è certamente una immersione perché $5P$ è divisore molto ampio, e ha immagine la curva un

cui sistema di equazioni affini si ottiene eliminando x e y dal sistema

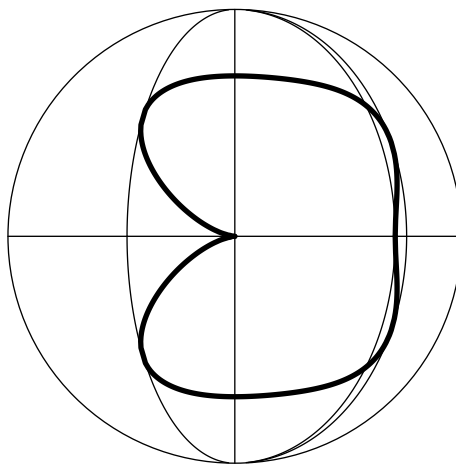
$$\left\{ \begin{array}{l} X_0 = 1 \\ X_1 = \frac{x-1}{y} \\ X_2 = \frac{y^2-1}{x^2} \\ X_3 = \frac{y^2+x-1}{xy} \\ y^2(y^2-1) = -x^3(x-1) \end{array} \right. \quad \text{ovvero da} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{Y}{Y+X^2} \\ y = -\frac{X}{Y+X^2} \\ Y^3 = X^2 - (X^2+Y)^2 \\ xyZ = y^2+x-1 \end{array} \right.$$

(da prima), e quindi la curva di equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} Y^3 = X^2 - (X^2+Y)^2 \\ ZY = X(Y+X^2-1) \end{array} \right.$$

(dopo qualche astuzia?).

P.S. Come al solito lo scheletro reale della curva non aiuta molto nella comprensione della geometria complessa, anche se in questo caso qualcuno dei risultati precedenti è visibile:



(il disco rappresenta il piano proiettivo reale, la circonferenza esterna - modulo antipodia - la retta impropria usuale; sono rappresentati gli assi coordinati e alcune rette “verticali” che vedono punti di ramificazione per la proiezione verticale).

1.4. ALTRO APPELLO (2007).

Testo.

Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione $Y^2 - Y^4 - X^2 - X^4 = 0$

- (1) determinare i punti singolari di $\mathcal{C}$ e il genere della Superficie di Riemann $\tilde{\mathcal{C}}$ che desingularizza $\mathcal{C}$;
- (2) determinare grado e ramificazione della mappa di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ data dalla proiezione sull'asse delle ascisse;
- (3) esistono rivestimenti ramificati con due fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (eventualmente, indicarne uno e studiare il luogo di ramificazione)?
- (4) determinare il divisore $\text{div}(dX)$ del differenziale dX , e i divisori $\text{div}(X)$, $\text{div}(Y)$ delle funzioni X , Y su $\tilde{\mathcal{C}}$;
- (5) determinare una base su $\mathbb{C}$ dello spazio $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$ dei differenziali olomorfi;
- (6) esplicitare la mappa canonica di $\tilde{\mathcal{C}}$; si tratta di una immersione?
- (7) determinare per ogni $n \geq 0$ dimensione su $\mathbb{C}$ di $\mathcal{L}(nP)$ dove P è uno dei punti di $\tilde{\mathcal{C}}$ corrispondenti al punto singolare di $\mathcal{C}$. Per quali n questi divisori danno immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ in spazi proiettivi (e di che dimensione)?

- (8) fino al primo di tali n , si descrivano generatori per $\mathcal{L}(nP)$ ed equazioni cartesiane per l'immagine di $\tilde{\mathcal{C}}$ tramite $\varphi_{|nP|}$.

Soluzione. Chiamiamo x, y le funzioni X, Y ristrette a $\mathcal{C}$, in modo da usare X, Y per le coordinate affini usuali.

- (1) L'unico punto singolare della curva è l'origine affine, dove c'è un nodo (punto doppio ordinario) con due posti (lineari, di classe 2 e tangenti $Y \mp X$) di parametrizzazione $\mathfrak{P}_{\pm} = \begin{pmatrix} T \\ \pm T + T^3 + \dots \end{pmatrix}$. In questo caso il contributo alla formula di Plücker per il genere è -1 , e il genere risulta $g = 2$.
- (2) Chiamiamo $\pi : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la proiezione. Si tratta chiaramente di un rivestimento ramificato con 4 fogli. I punti di ramificazione sono i punti della curva a tangente verticale (non i posti del nodo, essendo lineari), cioè che annullano la derivata rispetto a Y dell'equazione $(Y(1-2Y^2))$. Si tratta quindi dei punti $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}$ (su $Y = 0$) e di otto punti $P_i^{\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_i \\ \pm/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ (sulle due rette $2Y^2 = 1$). Tutti con ramificazione 1. Quindi abbiamo $\text{Ram}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + \sum P_i^{\pm}$, e $\text{ram}(\pi) = 10$, il che torna poiché da Riemann-Hurwitz ritroviamo $g = 1 - 4 + \frac{10}{2} = 2$.
- (3) Siccome la curva è di genere 2, $\tilde{\mathcal{C}}$ è una SdR iperellittica, e quindi è un rivestimento doppio della retta proiettiva, essenzialmente tramite la mappa canonica. Una realizzazione π_{∞} di questo rivestimento si può ottenere proiettando $\mathcal{C}$ dall'origine sulla retta impropria, poiché l'origine è punto doppio. In tal caso il divisore di ramificazione è formato dai punti di $\mathcal{C}$ la cui tangente passa per l'origine (cioè soddisfano $Y^2 - X^2 = 0$), e si tratta di sei punti semplici, contando anche $\mathfrak{P}_{\pm}, \dots$, (quindi di ramificazione 1). Di nuovo abbiamo $g = 1 - 2 + \frac{6}{2} = 2$.
- (4) Considerando che dx è il differenziale immagine inversa del differenziale dX su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tramite la mappa π prima studiata, possiamo applicare il teorema di Riemann-Hurwitz (versione differenziali) e ottenere

$$\text{div}(dx) = \pi^*(-2\infty) + \text{Ram}(\pi) = -2 \sum_{\varepsilon} Q_{\varepsilon} + \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} + \sum P_i^{\pm}$$

dove $Q_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ con $\varepsilon^4 = -1$ sono i punti impropri di $\mathcal{C}$, che giustamente dà un divisore di grado $2 = 2g - 2$.

In alternativa si può studiare l'ordine di dx nei vari punti:

$$\text{ord}_Q(dx) = \begin{cases} 0 & \text{se } X \text{ è coordinata locale a } Q \\ 0 & \text{se } Q = \mathfrak{P}_{\pm} \text{ perché } d(x) = d(T) \\ 1 & \text{se } Q \text{ è affine, ma } X \text{ non è coordinata locale} \\ -2 & \text{se } Q \text{ è uno dei punti impropri} \end{cases}$$

dove i punti che non hanno X come coordinata locale sono quelli che annullano la derivata parziale rispetto a Y dell'equazione della curva, quindi i punti che abbiamo visto di ramificazione per la proiezione sull'asse delle ascisse. Per i punti impropri abbiamo che $\zeta = X_0/X_1$ è una coordinata locale (controllare le tangenti in tali punti), e quindi $dX = d\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\frac{1}{\zeta^2}d\zeta$ presenta un polo d'ordine 2 (si ricordi che $X = \frac{X_1}{X_0} = \frac{X_1/X_1}{X_0/X_1} = \frac{1}{\zeta}$).

Invece risulta facilmente che

$$\text{div}(x) = \mathfrak{P}_+ + \mathfrak{P}_- + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \sum_{\varepsilon} Q_{\varepsilon}$$

e

$$\text{div}(y) = \mathfrak{P}_+ + \mathfrak{P}_- + \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} - \sum_{\varepsilon} Q_{\varepsilon}$$

(giustamente, divisori di grado zero).

- (5) Poiché si ricava facilmente che

$$\text{div}\left(\frac{dx}{1-2y^2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \text{div}\left(\frac{x}{y} \frac{dx}{1-2y^2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

abbiamo che una base per lo spazio dei differenziali olomorfi è data da $\frac{dx}{1-2y^2}$ e $\frac{x}{y} \frac{dx}{1-2y^2}$.

- (6) Dal punto precedente abbiamo $\mathcal{L}(K) = \langle 1, \frac{x}{y} \rangle$ (usando come K il divisore canonico del primo differenziale olomorfo trovato), e quindi la mappa canonica si esplicita come

$$\begin{aligned} \varphi_K : \tilde{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ Q &\longmapsto \begin{pmatrix} x/y \\ 1 \end{pmatrix}(Q) = \begin{pmatrix} x(Q) \\ y(Q) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(dove finiscono i punti $\mathfrak{P}_{\pm}$?). Si vede subito che coincide con π_{∞} , si tratta di un rivestimento doppio e non di immersione, come già sapevamo in base al genere.

- (7) Scegliamo $P = \mathfrak{P}_+$. Per $n \geq 2g - 1 = 3$ il teorema di Riemann-Roch dà $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nP) = n - 1$; per $n = 0$ abbiamo $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(0) = 1$ (per compattezza di $\tilde{\mathcal{C}}$), per $n = 1$ abbiamo $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P) = 1$ (perché $\tilde{\mathcal{C}}$ non è omeomorfa alla sfera), e ci resta un dubbio per $n = 2$: la dimensione potrebbe essere 1 oppure 2 (ma per questo basta controllare un generatore non costante di $\mathcal{L}(3P)$, vedendo se ha polo d'ordine 2 o 3 in P).

Per $n \geq 2g + 1 = 5$ abbiamo una immersione di $\tilde{\mathcal{C}}$ in $\mathbb{P}^{n-2}(\mathbb{C})$; per $n = 4$ abbiamo una mappa olomorfa di $\tilde{\mathcal{C}}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, che non può essere una immersione, poiché non esistono curve algebriche piane lisce di genere 2.

- (8) Osservando che la funzione $x - y$ ha divisore $3\mathfrak{P}_+ + \mathfrak{P}_- - \sum_{\varepsilon} Q_{\varepsilon}$, abbiamo che $\frac{x}{x-y}$ ha unico polo in P di ordine 2 (che divisore? e poi, perché non usare anche $\frac{y}{x-y}$?), possiamo anche concludere che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(2P) = 2$. Possiamo esplicitare

$$\mathcal{L}(nP) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{se } n = 0 \\ \mathbb{C} & \text{se } n = 1 \\ \langle 1, \frac{x}{x-y} \rangle & \text{se } n = 2 \\ \langle 1, \frac{x}{x-y} \rangle & \text{se } n = 3 \\ \langle 1, \frac{x}{x-y}, (\frac{x}{x-y})^2 \rangle & \text{se } n = 4 \\ \langle 1, \frac{x}{x-y}, (\frac{x}{x-y})^2, \frac{x+y}{(x-y)^2} \rangle & \text{se } n = 5 \end{cases}$$

(i numeratori servono per eliminare i poli diversi da P dei denominatori). Le mappe olomorfe corrispondenti a questi divisori sono (a parte i casi banali) le seguenti tre:

(8.1)

$$\begin{aligned} \varphi_{|2P|} = \varphi_{|3P|} : \tilde{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ Q &\longmapsto \begin{pmatrix} x/(x-y) \\ 1 \end{pmatrix}(Q) = \begin{pmatrix} x(Q) \\ x(Q) - y(Q) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

che è un rivestimento con due fogli di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (suriettivo, quindi).

(8.2)

$$\begin{aligned} \varphi_{|4P|} : \tilde{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \\ Q &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x/(x-y) \\ x^2/(x-y)^2 \end{pmatrix}(Q) \end{aligned}$$

che ha immagine la curva piana di equazione $Y = X^2$. Possiamo concludere che $\varphi_{|4P|}$ non è iniettiva (né immersiva, come già sapevamo). D'altra parte, $\varphi_{|4P|}$ è un altro rivestimento con due fogli della sfera di Riemann, travestimento del precedente.

(8.3)

$$\begin{aligned} \varphi_{|5P|} : \tilde{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \\ Q &\longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ x/(x-y) \\ x^2/(x-y)^2 \\ (x+y)/(x-y)^2 \end{pmatrix}(Q) \end{aligned}$$

che è certamente una immersione perché $5P$ è divisore molto ampio, e ha immagine la curva un cui sistema di equazioni affini si ottiene eliminando x e y dal sistema

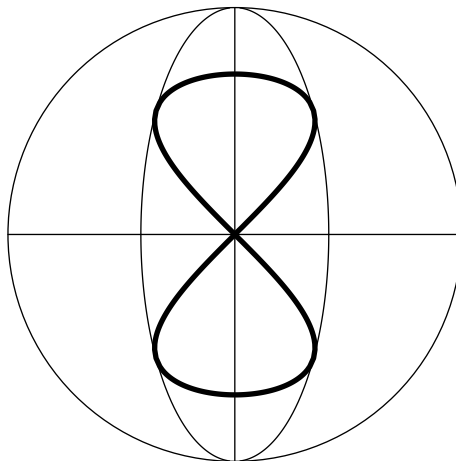
$$\begin{cases} X_0 = 1 \\ X_1 = \frac{x}{x-y} \\ X_2 = \frac{x^2}{(x-y)^2} \\ X_3 = \frac{x+y}{(x-y)^2} \\ y^2(y^2 - 1) = -x^2(x^2 + 1) \end{cases} \quad \text{ovvero da} \quad \begin{cases} Y = X^2 \\ x = \frac{Y}{Z} \left(\frac{X-1}{X} + 1 \right) \\ y = x \frac{X-1}{X} \\ y^2(y^2 - 1) = -x^2(x^2 + 1) \end{cases}$$

e quindi la curva di equazioni

$$\begin{cases} Y = X^2 \\ Z^2 = -(2X - 1)((X - 1)^4 + Y^2) \end{cases}$$

(dopo qualche sostituzione e semplificazione).

P.S. Come al solito lo scheletro reale della curva non aiuta molto nella comprensione della geometria complessa, anche se in questo caso qualcuno dei risultati precedenti è visibile:



(il disco rappresenta il piano proiettivo reale, la circonferenza esterna - modulo antipodia - la retta impropria usuale; sono rappresentati gli assi coordinati e alcune rette “verticali” che vedono punti di ramificazione per la proiezione verticale).

1.5. ULTERIORE APPELLO (2007).

Testo.

Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione $Y^2 - Y^4 - X^4 = 0$

- (1) determinare i punti singolari di $\mathcal{C}$ e il genere della Superficie di Riemann $\tilde{\mathcal{C}}$ che desingularizza $\mathcal{C}$;
- (2) determinare grado e ramificazione della mappa di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ data dalla proiezione sull'asse delle ascisse;
- (3) esistono rivestimenti ramificati con due fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (eventualmente, indicarne uno e studiare il luogo di ramificazione)?
- (4) determinare il divisore $\text{div}(dX)$ del differenziale dX , e i divisori $\text{div}(X)$, $\text{div}(Y)$ delle funzioni X , Y su $\tilde{\mathcal{C}}$;
- (5) determinare una base su $\mathbb{C}$ dello spazio $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$ dei differenziali olomorfi;
- (6) esistono immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ nel piano proiettivo complesso? Esistono rivestimenti ramificati con due fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ su un toro?
- (7) determinare per ogni $n \geq 0$ dimensione su $\mathbb{C}$ di $\mathcal{L}(nP)$ dove P è un punto di $\tilde{\mathcal{C}}$ corrispondente al punto singolare di $\mathcal{C}$. Per quali n questi divisori danno immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ in spazi proiettivi (e di che dimensione)?
- (8) fino al secondo di tali n , si descrivano generatori per $\mathcal{L}(nP)$ ed equazioni cartesiane per l'immagine di $\tilde{\mathcal{C}}$ tramite $\varphi_{|nP|}$.

Soluzione. Chiamiamo x, y le funzioni X, Y ristrette a $\mathcal{C}$, in modo da usare X, Y per le coordinate affini usuali.

- (1) L'unico punto singolare della curva è l'origine affine, dove c'è un punto doppio non ordinario con due posti (lineari, di classe 1 e tangenti Y) di parametrizzazione $\mathfrak{P}_{\pm} = (\pm T^2, \pm T^3)$. Un tacnodo? Una generica polare (per esempio quella rispetto al punto improprio delle ordinate, di equazione

$Y - 2Y^3$) ha molteplicità di intersezione 2 con entrambi i posti. In questo caso quindi il contributo alla formula di Plücker per il genere è $2^{\frac{2-1+1}{2}} = 2$, e il genere risulta $g = 1$; $\tilde{\mathcal{C}}$ è quindi un toro.

- (2) Chiamiamo $\pi : \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ la proiezione. Si tratta chiaramente di un rivestimento ramificato con 4 fogli. I punti di ramificazione sono i punti della curva a tangente verticale (non i posti del tacnodo, essendo lineari), cioè che annullano la derivata rispetto a Y dell'equazione $(Y(1 - 2Y^2))$.

Si tratta quindi degli otto punti $P_i^\pm = \left(\frac{1}{\pm/\sqrt{2}} \right)$ (sulle due rette $2Y^2 = 1$). Tutti con ramificazione

1. Quindi abbiamo $\text{Ram}(\pi) = \sum P_i^\pm$, e $\text{ram}(\pi) = 8$, il che torna poiché da Riemann-Hurwitz ritroviamo $g = 1 - 4 + \frac{8}{2} = 1$.

- (3) Siccome la curva è di genere 1, $\tilde{\mathcal{C}}$ è una SdR iperellittica (ellittica, in effetti; di solito non si dice iperellittica), e quindi è un rivestimento doppio della retta proiettiva. Una realizzazione π_∞ di questo rivestimento si può ottenere proiettando $\mathcal{C}$ dall'origine sulla retta impropria, poiché l'origine è punto doppio. In tal caso il divisore di ramificazione è formato dai punti di $\mathcal{C}$ la cui tangente passa per l'origine (cioè soddisfano $Y = 0$), e si tratta dei quattro punti impropri (!, ciascuno con ramificazione 1). Di nuovo abbiamo $g = 1 - 2 + \frac{4}{2} = 1$.

- (4) Considerando che dx è il differenziale immagine inversa del differenziale dX su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ tramite la mappa π prima studiata, possiamo applicare il teorema di Riemann-Hurwitz (versione differenziali) e ottenere

$$\text{div}(dx) = \pi^*(-2\infty) + \text{Ram}(\pi) = -2 \sum_{\varepsilon} Q_{\varepsilon} + \sum P_i^\pm$$

dove $Q_{\varepsilon} = \left(\frac{0}{\varepsilon} \right)$ con $\varepsilon^4 = -1$ sono i punti impropri di $\mathcal{C}$, che giustamente dà un divisore di grado $0 = 2g - 2$.

In alternativa si può studiare l'ordine di dx nei vari punti:

$$\text{ord}_Q(dx) = \begin{cases} 0 & \text{se } X \text{ è coordinata locale a } Q \\ 0 & \text{se } Q = \mathfrak{P}_{\pm} \text{ perché } d(x) = d(T) \\ 1 & \text{se } Q \text{ è affine, ma } X \text{ non è coordinata locale} \\ -2 & \text{se } Q \text{ è uno dei punti impropri} \end{cases}$$

dove i punti che non hanno X come coordinata locale sono quelli che annullano la derivata parziale rispetto a Y dell'equazione della curva, quindi i punti che abbiamo visto di ramificazione per la proiezione sull'asse delle ascisse. Per i punti impropri abbiamo che $\zeta = X_0/X_1$ è una coordinata locale (controllare le tangenti in tali punti), e quindi $dX = d\left(\frac{1}{\zeta}\right) = -\frac{1}{\zeta^2}d\zeta$ presenta un polo d'ordine 2 (si ricordi che $X = \frac{X_1}{X_0} = \frac{X_1/X_1}{X_0/X_1} = \frac{1}{\zeta}$).

Invece risulta facilmente che

$$\text{div}(x) = \mathfrak{P}_+ + \mathfrak{P}_- + \left(\frac{1}{1} \right) + \left(\frac{1}{-1} \right) - \sum_{\varepsilon} Q_{\varepsilon}$$

e

$$\text{div}(y) = 2\mathfrak{P}_+ + 2\mathfrak{P}_- - \sum_{\varepsilon} Q_{\varepsilon}$$

(giustamente, divisori di grado zero).

- (5) Poiché si ricava facilmente che

$$\text{div}\left(\frac{dx}{1-2y^2}\right) = 0$$

abbiamo che una base per lo spazio dei differenziali olomorfi è data da $\frac{dx}{1-2y^2}$ o anche da $\frac{ydy}{x^3}$. La mappa canonica in questo caso è particolarmente inutile: il codominio è un solo punto.

- (6) I tori si realizzano come curve ellittiche piane, quindi esistono immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ nel piano complesso come curve di grado 3, e per questo basta prendere la mappa associata ad un divisore (effettivo) di grado 3 (lo faremo dopo).

Per la formula di Riemann-Hurwitz i rivestimenti tra tori sono privi di ramificazione. E per ogni n esistono rivestimenti (non ramificati) di ogni toro su sé: basta considerare la mappa $P \mapsto nP$, sfruttando la struttura di gruppo abeliano del toro stesso, ma queste sono mappe con n^2 fogli.

Sfruttando la biquadraticità dell'equazione in X oppure in Y si possono trovare rivestimenti con due fogli di curve più semplici di cui studiare il genere.

- (7) Scegliamo $P = \mathfrak{P}_+$. Per $n \geq 2g - 1 = 1$ il teorema di Riemann-Roch dà $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nP) = n$; per $n = 0$ abbiamo $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(0) = 1$ (per compattezza di $\tilde{\mathcal{C}}$).

Per $n \geq 2g + 1 = 3$ abbiamo una immersione di $\tilde{\mathcal{C}}$ in $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$.

- (8) Osservando che la funzione $y - x^2$ ha divisore $6\mathfrak{P}_+ + 2\mathfrak{P}_- - 2 \sum_{\varepsilon} Q_{\varepsilon}$, abbiamo che $\frac{y^2}{y-x^2}$ ha unico polo in P di ordine 2 (che divisore?). Possiamo esplicitare

$$\mathcal{L}(nP) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{se } n = 0 \\ \mathbb{C} & \text{se } n = 1 \\ \langle 1, \frac{y^2}{y-x^2} \rangle & \text{se } n = 2 \\ \langle 1, \frac{y^2}{y-x^2}, \frac{xy}{y-x^2} \rangle & \text{se } n = 3 \\ \langle 1, \frac{y^2}{y-x^2}, \frac{xy}{y-x^2}, \frac{x^2}{y-x^2} \rangle & \text{se } n = 4 \end{cases}$$

(i numeratori servono per eliminare i poli diversi da P dei denominatori). Le mappe olomorfe corrispondenti a questi divisori sono (a parte i casi banali) le seguenti tre:

(8.1)

$$\begin{aligned} \varphi_{|2P|} : \tilde{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \\ Q &\longmapsto \left(\frac{y^2}{y-x^2}, 1 \right)(Q) \end{aligned}$$

che è un rivestimento con due fogli di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (suriettivo, quindi).

(8.2)

$$\begin{aligned} \varphi_{|3P|} : \tilde{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \\ Q &\longmapsto \left(\frac{y^2}{y-x^2}, \frac{xy}{y-x^2}, 1 \right)(Q) \end{aligned}$$

che ha immagine la curva piana un cui sistema di equazioni affini si ottiene eliminando x e y dal sistema

$$\begin{cases} X_0 = 1 \\ X_1 = \frac{y^2}{y-x^2} \\ X_2 = \frac{xy}{y-x^2} \\ y^2(y^2 - 1) = -x^4 \end{cases} \quad \text{ovvero da} \quad \begin{cases} x = \frac{XY}{Y^2 + X} \\ y = \frac{X^2}{Y^2 + X} \\ y^2(y^2 - 1) = -x^4 \end{cases}$$

e quindi la curva di equazione $2Y^2 = X^3 - X$ (dopo sostituzione e qualche semplificazione).

(8.3)

$$\begin{aligned} \varphi_{|4P|} : \tilde{\mathcal{C}} &\longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \\ Q &\longmapsto \left(\frac{y^2}{y-x^2}, \frac{xy}{y-x^2}, \frac{x^2}{y-x^2}, 1 \right)(Q) \end{aligned}$$

che è certamente una immersione perché $4P$ è divisore molto ampio, e ha immagine la curva un cui sistema di equazioni affini si ottiene eliminando x e y dal sistema

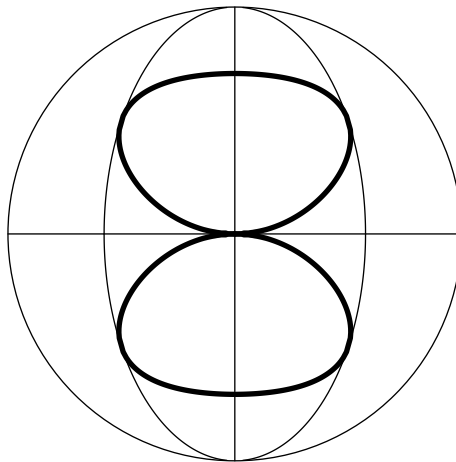
$$\begin{cases} X_0 = 1 \\ X_1 = \frac{y^2}{y-x^2} \\ X_2 = \frac{xy}{y-x^2} \\ X_3 = \frac{x^2}{y-x^2} \\ y^2(y^2 - 1) = -x^4 \end{cases} \quad \text{ovvero da} \quad \begin{cases} x = \frac{XY}{Y^2 + X} \\ y = \frac{X^2}{Y^2 + X} \\ 2Y^2 = X^3 - X \\ Z = \frac{x^2}{y-x^2} \end{cases}$$

e quindi la curva di equazioni

$$\begin{cases} 2Y^2 = X^3 - X \\ ZX = Y^2 \end{cases}$$

(dopo qualche sostituzione e semplificazione).

P.S. Come al solito lo scheletro reale della curva non aiuta molto nella comprensione della geometria complessa, anche se in questo caso qualcuno dei risultati precedenti è visibile:



(il disco rappresenta il piano proiettivo reale, la circonferenza esterna - modulo antipodia - la retta impropria usuale; sono rappresentati gli assi coordinati e alcune rette “verticali” che vedono punti di ramificazione per la proiezione verticale).

2. Problemi (a.a. 2014/15)

2.1. PRIMA PROVA PARZIALE (4 APRILE 2015).

Esercizio 1. Sia $\varphi(z) = \frac{z^3(z+1)}{(z-1)^2}$ mappa di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in sè.

- Mostrare che è rivestimento ramificato, determinando il numero di fogli, punti e valori di ramificazione.
- Verificare la formula di Riemann-Hurwitz per φ , determinando per ogni punto molteplicità e ramificazione.

Risultati.

- Si tratta di un rivestimento di grado 4. I punti di ramificazione con immagine affine si trovano dagli zeri della derivata (e la loro molteplicità come zeri della derivata è la ramificazione)

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{z^2(2z^2 - 3z - 3)}{(z-1)^3}$$

e sono 0 (con ramificazione 2) e $\frac{3 \pm \sqrt{33}}{4}$ (con ramificazione 1 ciascuno). Il punto improprio $\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha antimmagine formata dai due punti 1 e ∞ entrambi di molteplicità 2 e dunque ramificazione 1.

- La formula di Riemann-Hurwitz prevede ramificazione totale 6, che è giusto la somma delle ramificazioni sui cinque punti trovati.

Esercizio 2. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione $Y^2 - X^3 - Y^4 = 0$;

- determinare i punti singolari di $\mathcal{C}$ e il genere della Superficie di Riemann $\tilde{\mathcal{C}}$ che desingularizza $\mathcal{C}$;
- si consideri ora la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{D}$ di equazione $Y - X^3 - Y^2 = 0$; determinarne il genere, e determinare grado e ramificazione della mappa φ di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\tilde{\mathcal{D}}$ indotta da $\varphi(X, Y) = (X, Y^2)$;
- si consideri ora la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{E}$ di equazione $Y - X - Y^2 = 0$; determinarne il genere, e determinare grado e ramificazione della mappa ψ di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\tilde{\mathcal{E}}$ indotta da $\psi(X, Y) = (X^3, Y^2)$;

(4) determinare i divisori sulla curva $\mathcal{C}$ delle funzioni X , Y e dei differenziali dX , dY .

- Esistono differenziali olomorfi di $\mathcal{C}$ aventi come divisore il punto improprio di $\mathcal{C}$ contato due volte?

Risultati.

(1) L'unico punto singolare $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Disomogeneizzando rispetto a X_0 si vede che si tratta di una cuspide semplice, quindi di un solo posto con molteplicità 2, classe 1 e tangente $Y = 0$.

Il genere di $\tilde{\mathcal{C}}$ è quindi (essendo 4 il grado di $\mathcal{C}$) $\frac{3 \cdot 2}{2} - 1 = 2$ (formula di Plücker classica: ogni cuspide ordinaria contribuisce con -1 , come i nodi). Conviene scrivere la parametrizzazione

dell'unico posto della cuspide P che inizia con $\begin{pmatrix} 1 \\ T^2 \\ T^3 \end{pmatrix}$ e del posto dell'unico punto improprio P_∞

che inizia con $\begin{pmatrix} T^4 \\ 1 \\ T \end{pmatrix}$.

(2) La cubica $\mathcal{D}$ è non singolare, quindi di genere 1. La mappa φ ha chiaramente due fogli e ramifica nei punti con $Y = 0$, cioè in P e in P_∞ (ovviamente con ramificazione 1 ciascuno). La ramificazione totale è 2, come prevede la formula di Riemann-Hurwitz.

(3) La conica $\mathcal{E}$ è non singolare, quindi di genere 0. La mappa ψ ha chiaramente sei fogli e ramifica nei punti con $X = 0$ oppure $Y = 0$, cioè in P e in P_∞ (con ramificazione 5 ciascuno) e nei punti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ (con ramificazione 2 ciascuno). La ramificazione totale è 14, come prevede la formula di Riemann-Hurwitz.

(4) detti $P_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ e $Q_{i,\pm} = \begin{pmatrix} 1 \\ \xi_i \\ \pm 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ con $\xi_i^3 = 3/4$,

$$\operatorname{div}(X) = 2P + P_+ + P_- - 4P_\infty$$

$$\operatorname{div}(Y) = 3P - 3P_\infty$$

$$\operatorname{div}(1 - 2Y^2) = \sum Q_{i,\pm} - 6P_\infty$$

$$\operatorname{div} \frac{dX}{Y(1 - 2Y^2)} = \operatorname{div} \frac{dY}{X^2} = -2P + 4P_\infty$$

$$\operatorname{div}(dX) = P + \sum Q_{i,\pm} - 5P_\infty$$

$$\operatorname{div}(dY) = 2P + 2P_+ + 2P_- - 4P_\infty$$

- Non ne esistono: i differenziali olomorfi sono tutti combinazioni complesse di $\frac{dY}{X}$ e $\frac{Y}{X} \frac{dY}{X}$, e bisognerebbe avere una funzione $\alpha X + \beta Y$ con divisore $2P - 2P_\infty$ (ma hanno tre o quattro zeri affini).

2.2. SECONDA PROVA PARZIALE (9 GIUGNO 2015).

Esercizio 1. Si ricordi che una Superficie di Riemann compatta si dice trigonale se ammette un rivestimento con tre fogli di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

- Mostrare che ogni Superficie di Riemann compatta non iperellittica di genere 3 è trigonale.
- Mostrare che ogni Superficie di Riemann compatta non iperellittica di genere 4 è trigonale.
- Calcolare la dimensione dello spazio delle classi di isomorfismo delle Superficie di Riemann compatte trigonali di genere g e dedurre che per $g \geq 5$ esistono Superficie di Riemann compatte non trigonali.

Risultati.

- Ogni SdRc di genere 3 che non sia iperellittica viene immersa dal suo sistema canonico come quartica liscia nel piano proiettivo; basta considerare la proiezione da un qualsiasi suo punto verso una retta complementare: si tratta di un rivestimento con tre fogli. Di tali rivestimenti ne esiste essenzialmente uno per ogni punto della SdRc.
- Ogni SdRc di genere 4 che non sia iperellittica viene immersa dal suo sistema canonico come intersezione di una quadrica e una cubica nello spazio proiettivo; le rette di una schiera della

quadrica intersecano la cubica in tre punti e formano un sistema lineare di dimensione 1 e grado 3, quindi un rivestimento con tre fogli di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Di tali rivestimenti ne esistono essenzialmente due, quelli delle due schiere.

- (c) Se il genere g è sufficientemente grande (≥ 4), possiamo vedere che esiste solo un numero finito di tali rivestimenti, e quindi identificare lo spazio delle classi di isomorfismo di SdRc trigonali con le coppie (X, π) con π rivestimento trigonale, a sua volta determinato dai suoi punti di ramificazione, che sono genericamente di ramificazione semplice, e quindi $2(g+2)$ punti distinti per Riemann-Hurwitz. Quindi la dimensione cercata è quella delle collezioni non ordinate di $2g+4$ punti in una retta proiettiva, quindi $2g+1$. Siccome il conteggio di Riemann per la dimensione dello spazio delle classi di isomorfismo delle SdRc di genere g dà dimensione $3g-3$ abbiamo che $3g-3 > 2g+1$ (quindi esistono SdRc non trigonali, e anzi quelle non trigonali sono generiche) se $g > 4$.

Esercizio 2. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione $Y^3 - Y^5 - X^4 = 0$; si osservi che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne è l'unico punto singolare (con un solo posto posto $\begin{pmatrix} T^3 \\ T^4 + \dots \end{pmatrix}$). Sia $\tilde{\mathcal{C}}$ la Superficie di Riemann associata; verificare che il genere è 3.

- (1) calcolare i divisori $\text{div}(X)$, $\text{div}(Y)$ e $\text{div}(1 - Y^2)$ delle funzioni X , Y e $1 - Y^2$ su $\tilde{\mathcal{C}}$;
- (2) determinare una base su $\mathbb{C}$ dello spazio $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$ dei differenziali olomorfi;
- (3) esplicitare la mappa canonica di $\tilde{\mathcal{C}}$; si tratta di una immersione?
- (4) determinare, per ogni $n \geq 0$, la dimensione su $\mathbb{C}$ di $\mathcal{L}(nP)$ dove P è il punto di $\tilde{\mathcal{C}}$ corrispondente al punto singolare di $\mathcal{C}$. Per quali n questi divisori danno immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ in spazi proiettivi (e di che dimensione)?

Risultati.

- (1) Chiamiamo P il punto corrispondente al punto singolare, $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ l'unico punto di intersezione con la retta impropria: si tratta di un posto di flesso $\begin{pmatrix} T^5 + \dots \\ T \end{pmatrix}$, e $Q_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$. Allora $\text{div}(x) = 3P + Q_+ + Q_- - 5P_\infty$, $\text{div}(y) = 4P - 4P_\infty$, $\text{div}(1 - y^2) = 4Q_+ + 4Q_- - 8P_\infty$.
- (2) Si vede per sostituzione dei posti che il differenziale dy/x^3 ha divisore $-6P + 10P_\infty$, quindi dy/x è olomorfo con divisore $2Q_+ + 2Q_-$, e la funzione y/x avendo divisore $P - Q_+ - Q_- + P_\infty$ abbiamo che i differenziali $(y/x)dy/x$ e $(y/x)^2 dy/x$ sono olomorfi con divisori $P + Q_+ + Q_- + P_\infty$ e $2P + 2P_\infty$ rispettivamente. Essendo 3 differenziali indipendenti, sono una base di $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$.
- (3) Il sistema canonico dà quindi la mappa determinata dalle funzioni meromorfe $1, y/x, (y/x)^2$, che chiaramente ha immagine contenuta in una conica irriducibile del piano, quindi non può essere una immersione (sarebbe un isomorfismo con una curva di genere nullo). Concludiamo che $\tilde{\mathcal{C}}$ è superficie di Riemann iperellittica, come già si poteva capire osservando che $\mathcal{C}$ era di grado 5 con un punto triplo: proiettando dal punto singolare si ottiene un rivestimento con due fogli di una retta proiettiva, che corrisponde proprio alla mappa canonica.
- (4) Per $n \geq 2g - 1 = 5$ la formula di Riemann-Roch dà $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nP) = n - g + 1 = n - 2$. Per $n = 0, 1$ abbiamo certamente $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P) = 1$ (solo le funzioni costanti). Per $n = 2$, se esistessero funzioni con esattamente 2 poli in P , allora $2P$ dovrebbe comparire tra i divisori della mappa canonica, ovvero tra le fibre della proiezione dal punto singolare (e ciò non succede), quindi $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(2P) = 1$. Per $n = 4$ abbiamo la funzione $1/y$ che ha esattamente 4 poli in P (olomorfa altrove), e si trovano facilmente funzioni che hanno esattamente 5 poli (per esempio x/y^2 , oppure $y(1 - y^2)/x^3$) e 6 poli (per esempio x^2/y^3) in P . Quindi concludiamo che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(4P) = 2$ e $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(3P) = 1$ (e anche $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(2P) = 1$ se non si fosse visto prima). Quindi la sequenza di dimensioni $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nP)$ è data da $1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

Certamente per $n \geq 2g + 1 = 7$ abbiamo immersioni in spazi proiettivi di dimensione $n - 3$ (quindi in $\mathbb{P}^4(\mathbb{C})$ per $n = 7$). Per $n = 5$ abbiamo una mappa verso $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, che non può essere una immersione: le curve piane lisce di genere 3 sono delle quartiche, e non sono iperellittiche. Per $n = 6$ abbiamo una mappa verso $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ definita dalle funzioni meromorfe $1, 1/y, x/y^2, x^2/y^3$ che è iniettiva ma non è una immersione: per esempio si può controllare che l'immagine del punto P_∞ ha un posto non lineare.

2.3. PRIMO APPELLO (23 GIUGNO 2015).

Esercizio 1. Si ricordi la definizione degli spazi $\mathcal{L}(D)$ associati ai divisori di X (superficie di Riemann compatta).

- Mostrare che $D_1 \leq D_2$ implica $\mathcal{L}(D_1) \leq \mathcal{L}(D_2)$. Quando vale l'uguaglianza?
- Mostrare che $\mathcal{L}(\min(D_1, D_2)) = \mathcal{L}(D_1) \cap \mathcal{L}(D_2)$.
- Mostrare che $\mathcal{L}(\max(D_1, D_2)) \geq \mathcal{L}(D_1) + \mathcal{L}(D_2)$, mostrando qualche controesempio per l'altra inclusione anche nel caso di divisori effettivi.

Esercizio 2. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione $Y^3 - Y^5 - X^5 = 0$;

- determinare i punti singolari di $\mathcal{C}$ e il genere della Superficie di Riemann $\tilde{\mathcal{C}}$ che desingularizza $\mathcal{C}$;
- determinare grado e ramificazione della mappa di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ data dalla proiezione sull'asse delle ascisse; esistono rivestimenti ramificati con due fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (eventualmente, indicarne uno e studiare il luogo di ramificazione)?
- determinare il divisore $\text{div}(dY)$ del differenziale dY , e i divisori $\text{div}(X)$, $\text{div}(Y)$ delle funzioni X , Y su $\tilde{\mathcal{C}}$;
- determinare una base su $\mathbb{C}$ dello spazio $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$ dei differenziali olomorfi; esplicitare la mappa canonica di $\tilde{\mathcal{C}}$; si tratta di una immersione?
- determinare per ogni $n \geq 0$ dimensione su $\mathbb{C}$ di $\mathcal{L}(nP)$ dove P è il punto di $\tilde{\mathcal{C}}$ corrispondente al punto singolare di $\mathcal{C}$. Per quali n questi divisori danno immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ in spazi proiettivi (e di che dimensione)? fino al secondo di tali n , si descrivano generatori per $\mathcal{L}(nP)$ ed equazioni cartesiane per l'immagine di $\tilde{\mathcal{C}}$ tramite $\varphi_{|nP|}$.

2.4. SECONDO APPELLO (14 LUGLIO 2015).

Esercizio 1. Si ricordi la definizione degli spazi di funzioni meromorfe $\mathcal{L}(D)$ associati ai divisori di X (superficie di Riemann compatta).

- Mostrare che $D_1 \leq D_2$ implica $\mathcal{L}(D_1) \leq \mathcal{L}(D_2)$. Vale il viceversa?
- Supponiamo che $D_1 \leq D_2$ e $\mathcal{L}(D_1) = \mathcal{L}(D_2)$. Possiamo concludere che $D_1 = D_2$? E se gli spazi sono non nulli?
- Cosa si può dire della dimensione degli spazi $\mathcal{L}(nP)$ e $\mathcal{K}(nP)$ ove $n \in \mathbb{Z}$ e $P \in X$?

Esercizio 2. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione $Y^2 - Y^5 - X^5 = 0$;

- determinare i punti singolari di $\mathcal{C}$ e il genere della Superficie di Riemann $\tilde{\mathcal{C}}$ che desingularizza $\mathcal{C}$;
- determinare grado e ramificazione della mappa di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ data dalla proiezione sull'asse delle ascisse; esistono rivestimenti ramificati con tre fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (eventualmente, indicarne uno e studiare il luogo di ramificazione)?
- determinare il divisore $\text{div}(dY)$ del differenziale dY , e i divisori $\text{div}(X)$, $\text{div}(Y)$ delle funzioni X , Y su $\tilde{\mathcal{C}}$;
- determinare una base su $\mathbb{C}$ dello spazio $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$ dei differenziali olomorfi; esplicitare la mappa canonica di $\tilde{\mathcal{C}}$; si tratta di una immersione?
- determinare per ogni $n \geq 0$ dimensione su $\mathbb{C}$ di $\mathcal{L}(nP)$ dove P è il punto di $\tilde{\mathcal{C}}$ corrispondente al punto singolare di $\mathcal{C}$. Per quali n questi divisori danno immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ in spazi proiettivi (e di che dimensione)?

2.5. TERZO APPELLO (25 AGOSTO 2015).

Esercizio 1. Una Superficie di Riemann si dice iperellittica se ammette un rivestimento con due fogli sulla retta proiettiva, e si dice trigonale se ammette un rivestimento con tre fogli sulla retta proiettiva.

- Mostrare che tutte le Superficie di Riemann di genere minore o uguale a 2 sono sia iperellittiche sia trigonali.
- Mostrare le Superficie di Riemann di genere 3 sono o iperellittiche o trigonali (non entrambi).
- Cosa si può dire per le Superficie di Riemann di genere maggiore? (*sugg.: se è iperellittica allora non è trigonale?*)

Esercizio 2. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione $Y^2 - Y^5 - X^4 = 0$;

- (1) determinare i punti singolari di $\mathcal{C}$ e il genere della Superficie di Riemann $\tilde{\mathcal{C}}$ che desingularizza $\mathcal{C}$;
- (2) determinare grado e ramificazione della mappa di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ data dalla proiezione sull'asse delle ascisse; esistono rivestimenti ramificati con tre fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (eventualmente, indicarne uno e studiare il luogo di ramificazione)?
- (3) determinare il divisore $\text{div}(dY)$ del differenziale dY , e i divisori $\text{div}(X)$, $\text{div}(Y)$ delle funzioni X , Y su $\tilde{\mathcal{C}}$;
- (4) determinare una base su $\mathbb{C}$ dello spazio $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$ dei differenziali olomorfi; esplicitare la mappa canonica di $\tilde{\mathcal{C}}$; si tratta di una immersione?
- (5) determinare per ogni $n \geq 0$ dimensione su $\mathbb{C}$ di $\mathcal{L}(nP)$ dove P è un posto di $\tilde{\mathcal{C}}$ centrato sul punto singolare di $\mathcal{C}$. Per quali n questi divisori danno immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ in spazi proiettivi (e di che dimensione)?

2.6. QUARTO APPELLO (8 SETTEMBRE 2015).

Esercizio 1. Una Superficie di Riemann si dice k -gonale se ammette un rivestimento con k fogli sulla retta proiettiva.

- (a) Mostrare che per ogni genere g esiste un intero k tale che tutte le SdR di genere g sono k -gonali.
- (b) Fissato un genere g , qual è il minimo k tale che tutte le curve di genere g sono k -gonali?
- (c) È vero che per ogni genere g esistono curve 2-gonali e 3-gonali?

Esercizio 2. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione $Y^2 - Y^4 - X^5 = 0$;

- (1) determinare i punti singolari di $\mathcal{C}$ e il genere della Superficie di Riemann $\tilde{\mathcal{C}}$ che desingularizza $\mathcal{C}$;
- (2) determinare grado e ramificazione della mappa di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ data dalla proiezione sull'asse delle ascisse; esistono rivestimenti ramificati con tre fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ (eventualmente, indicarne uno e studiare il luogo di ramificazione)?
- (3) determinare il divisore $\text{div}(dY)$ del differenziale dY , e i divisori $\text{div}(X)$, $\text{div}(Y)$ delle funzioni X , Y su $\tilde{\mathcal{C}}$;
- (4) determinare una base su $\mathbb{C}$ dello spazio $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$ dei differenziali olomorfi; esplicitare la mappa canonica di $\tilde{\mathcal{C}}$; si tratta di una immersione?
- (5) determinare per ogni $n \geq 0$ dimensione su $\mathbb{C}$ di $\mathcal{L}(nP)$ dove P è un posto di $\tilde{\mathcal{C}}$ centrato sul punto singolare di $\mathcal{C}$. Per quali n questi divisori danno immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ in spazi proiettivi (e di che dimensione)?

3. Problemi (a.a. 2015/16)

3.1. PRIMA PROVA PARZIALE (29 MARZO 2016).

Esercizio 1. Sia $\varphi(z) = \frac{1}{z^3(1+z^2)}$ mappa di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in sè.

- (a) Determinare il numero di fogli e verificare la formula di Riemann-Hurwitz per φ , determinando per ogni punto molteplicità e ramificazione.
- (b) Si consideri ora la mappa $\varphi \circ \varphi$. Possibilmente senza fare conti, si determinino punti di ramificazione e le loro ramificazioni, verificando la formula di Riemann-Hurwitz per $\varphi \circ \varphi$.

Risultati.

- (a) si tratta di un rivestimento con 5 fogli, quindi ramificazione totale 8. Dalla derivata si trovano con $z = \pm i\sqrt{3/5}$ semplici (ramificazione 1 ciascuno); chiaramente 0 viene mandato a ∞ con molteplicità 3 (ramificazione 2), mentre ∞ viene mandato a 0 con molteplicità 5 (ramificazione 4).
- (b) La composizione è rivestimento con 25 fogli, quindi ramificazione totale 48. I punti di ramificazione della mappa composta vanno cercati tra quelli di ramificazione di φ , e quelli che hanno immagine in punti di ramificazione: 0 e ∞ vanno in sè stessi con molteplicità 15 ciascuno (ramificazione 14 ciascuno), $\pm i$ vanno in 0 (passando per ∞) con molteplicità 5 ciascuno (ramificazione 4 ciascuno), i punti $\pm i\sqrt{3/5}$ hanno molteplicità 2 ciascuno (ramificazione 1 ciascuno), e infine vi

sono 10 punti con immagine tramite φ in $\pm i\sqrt{3/5}$, e per ciascuno molteplicità 2 (ramificazione 1 per ciascuno); il totale è giustamente 48.

Esercizio 2. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione $(Y - X^2)^2 - Y^5 = 0$;

- (1) determinare i punti singolari di $\mathcal{C}$ e il genere della Superficie di Riemann $\tilde{\mathcal{C}}$ che desingularizza $\mathcal{C}$;
- (2) si consideri ora la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{D}$ di equazione $(Y - X)^2 - Y^5 = 0$; determinarne il genere, e determinare grado e ramificazione della mappa φ di $\tilde{\mathcal{C}}$ su $\tilde{\mathcal{D}}$ indotta da $\varphi(X, Y) = (X^2, Y)$;
- (3) la superficie $\mathcal{C}$ ammette rivestimenti di ordine 3 sulla sfera di Riemann? Eventualmente determinarne uno e studiare i punti di ramificazione.
- (4) Determinare i divisori sulla curva $\mathcal{C}$ delle funzioni X , Y e $Y - X^2$.
- (5) Determinare i divisori sulla curva $\mathcal{C}$ dei differenziali dY , dX e tutti i differenziali olomorfi di $\mathcal{C}$.

Risultati.

- (1) L'unico punto singolare è $\left(\frac{1}{0}\right)$, doppio con tangente doppia, con due posti di parametrizzazione del tipo $P_{\pm} = \left(\frac{1}{T^2 \pm T^5} \dots\right)$. La molteplicità di intersezione con una polare generica è 5 (per ciascun posto), quindi il genere è $g = 6 - 5 = 1$, cioè $\tilde{\mathcal{C}}$ è un toro.
- (2) Il rivestimento è con due fogli, è ramificato almeno ai punti impropri delle curve (che sono uno solo, per entrambe), quindi $\mathcal{D}$ non può essere di genere 1 (tra tori i rivestimenti non ramificano), e ha perciò genere 0 (si può vedere anche studiando i punti singolari di $\mathcal{D}$, che sono due, e hanno invarianti di Plucker 2 e 4, o anche più semplicemente notando che dall'equazione si legge direttamente una parametrizzazione razionale $\begin{pmatrix} Y-X=T^5 \\ Y=T^2 \end{pmatrix}$, da cui si deduce subito il genere nullo). I punti di ramificazione (con ramificazione necessariamente 1) sono il punto improprio e i tre punti di intersezione con $X = 0$ diversi dai posti nel punto singolare.
- (3) Rispetto alla variabile X_0 l'equazione omogenea ha grado 3, quindi proiettando su un asse rispetto a X_0 otteniamo un rivestimento con tre fogli, che deve avere totale ramificazione 6. Vanno cercati tra i punti della curva e della sua polare rispetto a $\left(\frac{1}{0}\right)$.
- (4) Detti P_i i 6 punti affini lisci a tangente verticale, Q_j i 3 punti affini lisci a tangente orizzontale, e $P_{\infty} = \left(\frac{0}{1}\right)$,

$$\operatorname{div}(X) = P_+ + P_- + \sum_j Q_j - 5P_{\infty}$$

$$\operatorname{div}(Y) = 2P_+ + 2P_- - 4P_{\infty}$$

$$\operatorname{div}(Y - X^2) = 5P_+ + 5P_- - 10P_{\infty}$$

- (5) Abbiamo

$$\operatorname{div}(dX) = \sum_i P_i - 6P_{\infty}$$

$$\operatorname{div}(dY) = P_+ + P_- + \sum_j Q_j - 5P_{\infty}$$

e di conseguenza si vede che il differenziale $d(Y)/X$ è olomorfo; essendo il genere 1, tutti i differenziali olomorfi sono multipli scalari complessi di questo.

3.2. SECONDA PROVA PARZIALE (7 GIUGNO 2016).

Esercizio 1. Sia X una Superficie di Riemann compatta iperellittica di genere $g > 0$, e $D = P + Q$ un divisore (P, Q punti di X) con $\mathcal{L}(D) \neq \mathbb{C}$.

- (a) Determinare la dimensione di $\mathcal{L}(kD)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.
- (b) Quali mappe proiettive definiscono i divisori kD per $k \in \mathbb{N}$? Quali sono immersioni?
- (c) Quali divisori positivi di grado due di X danno luogo a rivestimenti con due fogli sulla sfera di Riemann? Esistono, e quanti, punti R tali che $\mathcal{L}(2R) \neq \mathbb{C}$?

Risultati.

- (a) Chiaramente $\mathcal{L}(D)$ ha dimensione 2 (al massimo sarebbe 3, ma allora si tratta di una sfera), quindi è generato da 1 e una funzione f con poli semplici in P e Q . Per $2k \geq 2g - 1$, cioè $k \geq g$ possiamo usare Riemann-Roch e ottenere $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(kD) = 2k + 1 - g$, quindi $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(gD) =$

$g + 1$ (da lì in poi aumenta di 2 ad ogni passo). Per $k < g$ osserviamo che $1, f, f^2, \dots, f^k$ appartengono evidentemente a $\mathcal{L}(kD)$, quindi la sequenza delle dimensioni cresce di uno ad ogni passo: $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(kD) = k + 1$ per $k \leq g$.

- (b) Fino a $k = g - 1$, che è il sistema canonico, abbiamo che le mappe proiettive sono tutte rivestimenti di ordine due della sfera, seguite dalla immersione di Veronese in $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$. Per $k > g$ abbiamo immersioni perché $\deg(kD) = 2k > 2g$, e per $k = g$ abbiamo ancora un rivestimento con due fogli (perché $\mathcal{L}(gD) = \langle 1, f, f^2, \dots, f^g \rangle$).
- (c) I divisori positivi di grado due che hanno spazio $\mathcal{L}$ non banale sono quelli formati dai punti delle fibre del rivestimento definito da f ; in particolare i punti doppi sono quelli di ramificazione di quel rivestimento, che quindi sono $2(g + 1)$ per la formula di Riemann-Hurwitz.

Esercizio 2. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione $(Y - X^2)^2 - XY^4 = 0$; si osservi che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne è l'unico punto singolare (con un solo posto posto $\begin{pmatrix} T^2 \\ T^4 + T^9 + \dots \end{pmatrix}$). Sia $\tilde{\mathcal{C}}$ la Superficie di Riemann associata; verificare che il genere è 2.

- (1) calcolare i divisori $\text{div}(X)$, $\text{div}(Y)$ e $\text{div}(Y - X^2)$ delle funzioni X , Y e $Y - X^2$ su $\tilde{\mathcal{C}}$;
- (2) determinare una base su $\mathbb{C}$ dello spazio $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$ dei differenziali olomorfi;
- (3) esplicitare la mappa canonica di $\tilde{\mathcal{C}}$; si tratta di una immersione?
- (4) determinare, per ogni $n \geq 0$, la dimensione su $\mathbb{C}$ di $\mathcal{L}(nP)$ dove P è il punto di $\tilde{\mathcal{C}}$ corrispondente al punto singolare di $\mathcal{C}$. Per quali n questi divisori danno immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ in spazi proiettivi (e di che dimensione)?
- (5) Se possibile determinare rivestimenti con 2, 3, 4 fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ sulla sfera di Riemann. È vero che per ogni n esistono rivestimenti con n fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ sulla sfera di Riemann?

Risultati.

- (1) Chiamiamo P il punto corrispondente al punto singolare. Le intersezioni con la retta impropria sono $P_{\infty} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con unico posto di flesso $\begin{pmatrix} T \\ T^3 + \dots \end{pmatrix}$, e $Q_{\infty} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ con unico posto di flesso $\begin{pmatrix} T^4 + \dots \\ T \end{pmatrix}$. Allora $\text{div}(x) = 2P + 2P_{\infty} - 4Q_{\infty}$, $\text{div}(y) = 4P - P_{\infty} - 3Q_{\infty}$, $\text{div}(y - x^2) = 9P - P_{\infty} - 8Q_{\infty}$.
- (2) Si vede per sostituzione dei posti che il differenziale $\omega = dx/\partial_y f$ ha divisore $-8P + 2P_{\infty} + 8Q_{\infty}$, quindi $y^2\omega$ è olomorfo con divisore $2Q_{\infty}$, e $(y - x^2)\omega$ è olomorfo con divisore $P + P_{\infty}$. Essendo 2 differenziali indipendenti, sono una base di $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$.
- (3) Il sistema canonico dà quindi la mappa determinata dalle funzioni meromorfe $y^2, y - x^2$. Essendo di genere 2, $\tilde{\mathcal{C}}$ è superficie di Riemann iperellittica.
- (4) Per $n \geq 2g - 1 = 3$ la formula di Riemann-Roch dà $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nP) = n - g + 1 = n - 1$. Per $n = 0, 1$ abbiamo certamente $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(0) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(P) = 1$ (solo le funzioni costanti). Siccome le funzioni $\frac{xy}{y-x^2}, \frac{1}{y}, \frac{y}{y-x^2}$ hanno poli solo in P di ordini rispettivamente 3, 4, 5, possiamo dedurre che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(2P) = 1$. Quindi la sequenza di dimensioni $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nP)$ è data da 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, ... Certamente per $n \geq 2g + 1 = 5$ abbiamo immersioni in spazi proiettivi di dimensione $n - 2$ (quindi in $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ per $n = 5$). Per $n = 4$ abbiamo una mappa verso $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, che non può essere una immersione.
- (5) Con due fogli abbiamo il rivestimento canonico, con tre fogli la proiezione dall'origine (punto doppio) sulla retta impropria, con quattro fogli le proiezioni sugli assi cartesiani. Per ogni n esistono rivestimenti con n fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ sulla sfera di Riemann, perché basta usare un sistema lineare di dimensione 1 negli spazi $\mathcal{L}(nP)$.

3.3. PRIMO APPELLO (21 GIUGNO 2016).

Esercizio 1. Sia $\varphi(z) = \frac{z^3(z+1)^2}{(z-1)^2}$ mappa di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in sè.

- (a) Determinare il numero di fogli e verificare la formula di Riemann-Hurwitz per φ , determinando per ogni punto molteplicità e ramificazione.
- (b) Si considerino ora due mappe olomorfe $\varphi : X \rightarrow Y$ e $\psi : Y \rightarrow Z$ di superficie di Riemann compatte. Determinare i punti di ramificazione (e la loro ramificazione) della composizione $\psi \circ \varphi$,

e una formula per la ramificazione totale della composta (in termini delle ramificazioni per φ e ψ). Quando il risultato è simmetrico nei due termini?

Risultati.

- (a) Derivando φ e con qualche considerazione sull'immagine inversa di ∞ otteniamo il divisore di ramificazione $2(0) + (-1) + (2 + i\sqrt{5}) + (2 - i\sqrt{5}) + 2(\infty) + (1)$, di grado 8 visto che è un rivestimento con 5 fogli tra superficie di Riemann compatte di genere nullo.
- (b) Se φ è di ordine m in P e ψ è di ordine n in $\varphi(P)$, allora $\psi \circ \varphi$ è di ordine mn in P (perché $\varphi(z) = z^m$ e $\psi(w) = w^n$ implica...), cioè $m_P(\psi \circ \varphi) = m_P(\varphi)m_{\varphi P}(\psi)$. Sommando sui punti, oppure usando la formula di Riemann-Hurwitz per $\varphi : X \rightarrow Y$, $\psi : Y \rightarrow Z$ e $\psi \circ \varphi : X \rightarrow Z$ ($\text{ram}(\varphi) = e_\varphi \chi_X - \chi_Y$ ecc.) troviamo $\text{ram}(\psi \circ \varphi) = e_\varphi \text{ram}(\psi) + \text{ram}(\varphi)$. Nel caso $X = Z$ hanno senso entrambe le composizioni, e il risultato è simmetrico (nel senso che $\text{ram}(\psi \circ \varphi) = \text{ram}(\varphi \circ \psi)$) sse $g_X = g_Y$.

Esercizio 2. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione affine $Y^2 - X^3 - X^5 - Y^4 = 0$; si osservi che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne è l'unico punto singolare e vi è un solo posto posto $\begin{pmatrix} T^2 \\ T^3 + T^7/2 + \dots \end{pmatrix}$.

Sia $\tilde{\mathcal{C}}$ la Superficie di Riemann associata; verificare che il genere è 5.

- (1) calcolare i divisori delle funzioni X , Y , $1 + X^2$ e $Y^2 - X^2 - 1$ su $\tilde{\mathcal{C}}$;
- (2) determinare, per ogni $n \geq 0$, la dimensione su $\mathbb{C}$ di $\mathcal{L}(nP)$ dove P è il punto di $\tilde{\mathcal{C}}$ corrispondente al punto singolare di $\mathcal{C}$. Per quali n questi divisori danno immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ in spazi proiettivi (e di che dimensione)?
- (3) determinare una base su $\mathbb{C}$ dello spazio $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$ dei differenziali olomorfi; Esistono differenziali olomorfi che abbiano zeri solo in P ?
- (4) esplicitare la mappa canonica di $\tilde{\mathcal{C}}$; si tratta di una immersione?
- (5) Se possibile determinare rivestimenti con 2, 3, 4, 5, 6 fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ sulla sfera di Riemann.

Risultati. L'unico punto improprio della curva è $P_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ con parametrizzazione $\begin{pmatrix} -T^5 \\ T^1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (1) I divisori richiesti sono:

$$\begin{aligned} \text{div}(X) &= 2P + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} - 4P_\infty \\ \text{div}(Y) &= 3P + \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} - 5P_\infty \\ \text{div}(1 + X^2) &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ -1 \end{pmatrix} - 8P_\infty \\ \text{div}(Y^2 - X^2 - 1) &= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \pm\sqrt{2} \end{pmatrix} - 10P_\infty \end{aligned}$$

- (2) Combinando i divisori precedenti si trovano funzioni con soli poli in P di ordine 6 (per esempio $\frac{1+X^2}{Y^2}$), 7 (per esempio $\frac{Y^2-X^2-1}{X^2Y}$) e 8 (per esempio $\frac{Y^2-X^2-1}{XY^2}$; usando anche una cubica che intersechi $\mathcal{C}$ con molteplicità 3 nei punti $\begin{pmatrix} \pm i \\ 0 \end{pmatrix}$ (deve avere tangenti comuni, si trova $X^2 = Y^3 - 1$) e dividendo per Y^3 si trova una funzione con esattamente 9 poli in P . Sapendo che $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{L}(nP) = n + 1 - g = n - 4$ per $n \geq 2g - 1 = 9$, quindi 5 per $n = 9$, vediamo che la sequenza di dimensioni per nP ($n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$) è 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5.
- (3) Il differenziale $\omega = \frac{dX}{Y-2Y^3}$ ha divisore dato da $-2P + 10P_\infty$, quindi i differenziali $X\omega, Y\omega, X^2\omega, XY\omega, Y^2\omega$ sono olomorfi (e nei loro divisori P compare con molteplicità 0, 1, 2, 3, 4 rispettivamente). Per avere un differenziale con zeri solo in P , dovremmo trovare una funzione con zeri in P , e si può escludere con il punto precedente.
- (4) La mappa canonica è chiaramente iniettiva, quindi una immersione e la superficie non è iperellittica.

- (5) Non vi sono rivestimenti con 2 fogli (non è iperellittica), vi sono rivestimenti con 3 fogli (basta proiettare da P , che è punto doppio), con 4 fogli (basta proiettare da un punto liscio della curva), con 5 fogli (basta proiettare sull'asse delle X), e con 6 (basta usare una funzione non costante in $\mathcal{L}(6P)$).

3.4. SECONDO APPELLO (12 LUGLIO 2016).

Esercizio 1. Sia $\varphi(z) = \frac{z^2(z-1)^3}{(z+1)^2}$ mappa di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in sè.

- (a) Determinare il numero di fogli e verificare la formula di Riemann-Hurwitz per φ , determinando per ogni punto molteplicità e ramificazione.
- (b) Si considerino ora le mappe olomorfe (iterate) φ^n di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in sè. Determinare i punti di ramificazione (e la loro ramificazione), e una formula per la ramificazione totale delle composizioni. [se si preferisce, si può fare anche per una φ generica]

Esercizio 2. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione affine $Y^2 - X^3 - X^4 - Y^5 = 0$; si osservi che $\left(\frac{1}{0}\right)$ ne è l'unico punto singolare (con un solo posto posto $(\frac{T^2}{T^3+T^5/2+\dots})$).

Sia $\tilde{\mathcal{C}}$ la Superficie di Riemann associata; verificare che il genere è 5.

- (1) calcolare i divisori delle funzioni X , Y , $1 - Y^3$ e $X^2 + Y^3 - 1$ su $\tilde{\mathcal{C}}$;
- (2) determinare una base su $\mathbb{C}$ dello spazio $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$ dei differenziali olomorfi;
- (3) esplicitare la mappa canonica di $\tilde{\mathcal{C}}$; si tratta di una immersione?
- (4) determinare, per ogni $n \geq 0$, la dimensione su $\mathbb{C}$ di $\mathcal{L}(nP)$ dove P è il punto di $\tilde{\mathcal{C}}$ corrispondente al punto singolare di $\mathcal{C}$. Per quali n questi divisori danno immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ in spazi proiettivi (e di che dimensione)?
- (5) Se possibile determinare rivestimenti con 2, 3, 4 fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ sulla sfera di Riemann. Esistono differenziali olomorfi che abbiano zeri solo in P ?

Risultati. Molto simile all'esame precedente; conviene studiare anche la funzione $1 + X$ per ottenere funzioni con soli poli in P .

3.5. TERZO APPELLO (30 AGOSTO 2016).

Esercizio 1. Sia $\varphi(z) = \frac{z^3(z^3-1)}{z^3+1}$ mappa di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in sè.

- (a) Determinare il numero di fogli e verificare la formula di Riemann-Hurwitz per φ , determinando per ogni punto molteplicità e ramificazione.
- (b) Determinare tutte le mappe di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in sè che hanno lo stesso divisore di ramificazione di φ .

Esercizio 2. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione affine $Y^3 - Y^4 - X^5 = 0$; si osservi che $\left(\frac{1}{0}\right)$ ne è l'unico punto singolare (con un solo posto posto $(\frac{T^3}{T^5+T^{10}/3+\dots})$). Sia $\tilde{\mathcal{C}}$ la Superficie di Riemann associata; verificare che il genere è 2.

- (1) calcolare i divisori $\text{div}(X)$, $\text{div}(Y)$ e $\text{div}(1 - Y)$ delle funzioni X , Y e $1 - Y$ su $\tilde{\mathcal{C}}$;
- (2) determinare una base su $\mathbb{C}$ dello spazio $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$ dei differenziali olomorfi;
- (3) esplicitare la mappa canonica di $\tilde{\mathcal{C}}$; si tratta di una immersione?
- (4) determinare, per ogni $n \geq 0$, la dimensione su $\mathbb{C}$ di $\mathcal{L}(nP)$ dove P è il punto di $\tilde{\mathcal{C}}$ corrispondente al punto singolare di $\mathcal{C}$. Per quali n questi divisori danno immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ in spazi proiettivi (e di che dimensione)? Per il primo di tali divisori, si descriva l'immagine della curva.
- (5) Se possibile determinare rivestimenti con 2, 3, 4 fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ sulla sfera di Riemann. Esistono differenziali olomorfi che abbiano zeri solo in P_∞ ?

3.6. QUARTO APPELLO (13 SETTEMBRE 2016).

Esercizio 1. Sia $\varphi(z) = \frac{z^3(z-1)^2}{(z+1)^3}$ mappa di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in sè.

- (a) Determinare il numero di fogli e verificare la formula di Riemann-Hurwitz per φ , determinando per ogni punto molteplicità e ramificazione.
- (b) Si considerino ora le mappe olomorfe φ_n di $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ in sè date da $\varphi_n(z) = \varphi(z^n)$. Determinare i punti di ramificazione (e la loro ramificazione), e una formula per il divisore di ramificazione.

Esercizio 2. Si consideri la curva proiettiva piana (complessa) $\mathcal{C}$ di equazione affine $(Y - X^2)^2 - X^3Y^2 - Y^5 = 0$; si osservi che $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne è l'unico punto singolare (con un solo posto posto $\begin{pmatrix} T^2 \\ T^4 + T^7 + \dots \end{pmatrix}$).

Sia $\tilde{\mathcal{C}}$ la Superficie di Riemann associata; verificare che il genere è 3.

- (1) calcolare i divisori delle funzioni X , Y , ??? e $Y - X^2$ su $\tilde{\mathcal{C}}$;
- (2) determinare una base su $\mathbb{C}$ dello spazio $\Omega^1(\tilde{\mathcal{C}})$ dei differenziali olomorfi;
- (3) esplicitare la mappa canonica di $\tilde{\mathcal{C}}$; si tratta di una immersione?
- (4) determinare, per ogni $n \geq 0$, la dimensione su $\mathbb{C}$ di $\mathcal{L}(nP)$ dove P è il punto di $\tilde{\mathcal{C}}$ corrispondente al punto singolare di $\mathcal{C}$. Per quali n questi divisori danno immersioni di $\tilde{\mathcal{C}}$ in spazi proiettivi (e di che dimensione)?
- (5) Se possibile determinare rivestimenti con 2, 3, 4 fogli di $\tilde{\mathcal{C}}$ sulla sfera di Riemann. Esistono differenziali olomorfi che abbiano zeri solo in P ?

