APPUNTI DI

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

T. Valent

Parte I - STRUTTURE FONDAMENTALI.

§ 1. Topologie. Continuità. Compattezza.

§ 2. Pseudometriche e uniformità. Continuità uniforme. Completezza e completamenti.

§ 3. Spazi vettoriali. Insiemi convessi e seminorme.

§ 4. Spazi vettoriali topologici.

§ 5. Spazi funzionali. Spazi di funzioni lineari e continue.

§ 6. La dualità negli spazi vettoriali topologici.

§ 7. Spazi di Hilbert. Proprietà generali.

PREFAZIONE.

In questa prima parte del corso ci si occupa, in maniera piuttosto sintetica ma sostanzialmente autosufficiente, dello studio delle strutture (in particolare di quella di spazio vettoriale topologico) su cui poggia l'analisi funzionale (e non solo essa).

[La seconda parte del corso sarà una introduzione alla teoria della misura e dell'integrazione: da essa scaturiranno gli esempi più importanti di spazi di Banach riflessivi (gli spazi L^p e gli spazi di Sobolev $W^{m,p}$, con $1<p<+\infty$)].

Il §1 è dedicato alle strutture topologiche in generale e il §2 a quelle uniformizzabili e alle strutture uniformi. Per quanto riguarda le strutture topologiche (pur accennando ai vari assiomi di separazione) si sottolinea soprattutto la distinzione tra le topologie non uniformizzabili e quelle uniformizzabili, per studiare in particolare queste ultime.

Per lo studio della convergenza si utilizzano sia i filtri che le reti (a seconda della convenienza) pur rilevando l'equivalenza delle due nozioni.

Le strutture uniformi vengono definite in maniera "operativa" (v. n. 3 del §2); con tale impostazione le nozioni di continuità uniforme e di completezza e le tecniche dimostrative risultano immediatamente accessibili a chi abbia una certa familiarità con gli spazi metrici.

Nel §3 vengono esposti rapidamente quegli elementi di algebra lineare che sono strettamente indispensabili per il seguito e si mostra il legame tra insieme convesso e seminorma.

Il §4 è dedicato alle topologie vettoriali. Si constata che ogni topologia vettoriale è definita da una famiglia di pseudo-seminorme (e quindi è uniformizzabile) e che esiste (una e) una sola uniformità (l'uniformità canonica), avente una base invariante per traslazioni, compatibile con una topologia vettoriale; è all'uniformità canonica che si fa tacitamente riferimento quando si dice che uno spazio vettoriale topologico è completo o che una funzione tra due spazi vettoriali topologici è uniformemente continua.

Nell'ambito delle topologie vettoriali, in pratica servono quelle definite da una famiglia di seminorme (cioè quelle localmente convesse) e, in particolare quelle di Fréchet e le topologie limite induttivo di topologie di Fréchet; perciò a queste ultime si dedica maggiore attenzione.

I teoremi fondamentali del §4 sono quello di Hahn-Banach (che, tra l'altro, è alla base della teoria della dualità, sviluppata nel §6) e quello del grafico chiuso (a cui è associato il teorema della mappa aperta).

Nel §5 si studiano vari tipi di uniformità (e topologie) su spazi funzionali e, in particolare, le $\mathfrak{S}$-topologie vettoriali sullo spazio delle funzioni lineari e continue tra due spazi vettoriali topologici. Fondamentale è la nozione di equicontinuità. I teoremi principali del §5 sono quello di Ascoli e quello di Banach-Steinhaus.

Il §6 è dedicato allo studio della dualità, che ha un ruolo centrale nella teoria degli spazi vettoriali topologici. Questo paragrafo costituisce, per molti aspetti, il punto di arrivo della teoria svolta nei paragrafi precedenti. I teoremi principali del §6 sono due teoremi di Mackey, il primo caratterizzante le topologie localmente convesse compatibili con una assegnata dualità e il secondo affermante che i sottoinsiemi limitati di uno spazio vettoriale X sono gli stessi per ogni topologia localmente convessa su X compatibile con una dualità assegnata tra X e un altro spazio vettoriale.

Importanti sono le nozioni di semiriflessività e di riflessività. Nell'ambito degli spazi localmente convessi non normabili, una classe molto interessante e utile di spazi riflessivi è costituita dagli spazi di Montel (studiati al n. 6). Il §6 termina con un teorema generale di esistenza in analisi lineare, contenente tra l'altro, come caso particolare, il teorema di suriezione tra spazi di Fréchet (importante nella teoria degli operatori differenziali lineari).

Il §7 è una introduzione allo studio degli spazi di Hilbert.