§ 1. TOPOLOGIE. CONTINUITÀ. COMPATTEZZA.

1. FILTRI SU UN INSIEME. BASI. PREBASI. ULTRAFILTRI.

Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X.
Un filtro su X è un sottoinsieme non vuoto $\mathcal{F}$ di $\mathcal{P}(X)$ tale che

$$(1.1)\quad \begin{cases} \text{(i) la parte vuota di } X \text{ non appartiene a } \mathcal{F} \\ \text{(ii) } A\in\mathcal{F},\ B\in\mathcal{F} \Rightarrow A\cap B\in\mathcal{F} \\ \text{(iii) } A\in\mathcal{F},\ B\in\mathcal{P}(X),\ A\subseteq B \Rightarrow B\in\mathcal{F} \end{cases}$$

Evidentemente, se X è l'insieme vuoto, non esiste alcun filtro su X.

Esempio. Se X non è vuoto, l'insieme delle parti di X contenenti una parte non vuota prefissata di X è un filtro su X.

Se $\mathcal{F}$ è un filtro su X, ogni sottoinsieme $\mathcal{B}$ di $\mathcal{F}$ tale che per ogni $A\in\mathcal{F}$ esiste $B\in\mathcal{B}$ con $B\subseteq A$ dicesi una base del filtro $\mathcal{F}$. Da (iii) segue che, se $\mathcal{B}$ è una base del filtro $\mathcal{F}$, allora $\mathcal{F}=\{A\in\mathcal{P}(X) : \exists B\in\mathcal{B} \text{ con } B\subseteq A\}$.
Un sottoinsieme $\mathcal{B}$ di $\mathcal{P}(X)$ dicesi una base per un filtro su X se esiste un filtro su X (necessariamente unico) di cui $\mathcal{B}$ è una base; ciò accade se e solo se l'insieme $\{A\in\mathcal{P}(X) : \exists B\in\mathcal{B} \text{ con } B\subseteq A\}$ è un filtro su X.

PROPOSIZIONE 1.1. Un sottoinsieme $\mathcal{B}$ di $\mathcal{P}(X)$ è una base per un filtro su X se e solo se $\mathcal{B}$ non è vuoto, la parte vuota di X non appartiene a $\mathcal{B}$ e l'intersezione di due elementi di $\mathcal{B}$ contiene un elemento di $\mathcal{B}$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(X)$ con le proprietà indicate. Mostriamo che, posto $\mathcal{F}=\{A\in\mathcal{P}(X) : \exists B\in\mathcal{B} \text{ con } B\subseteq A\}$, $\mathcal{F}$ è un filtro su X. E' sufficiente verificare (ii), essendo (i) e (iii) ovvie; se $A_1, A_2\in\mathcal{F}$, esistono $B_1, B_2\in\mathcal{B}$ con $B_1\subseteq A_1$ e $B_2\subseteq A_2$, quindi $A_1\cap A_2\supseteq B_1\cap B_2$, donde $A_1\cap A_2\in\mathcal{F}$ perchè esiste $C\in\mathcal{B}$ tale che $B_1\cap B_2\supseteq C$. La necessità della condizione è immediata. #

Consideriamo l'insieme dei filtri su X ordinato per inclusione. E' evidente che l'intersezione di una arbitraria famiglia non vuota di filtri su X è un filtro su X.
Un sottoinsieme $\mathcal{S}$ di $\mathcal{P}(X)$ dicesi una prebase per un filtro su X se esiste un filtro su X che contiene $\mathcal{S}$; in tale caso l'intersezione della famiglia dei filtri su X contenenti $\mathcal{S}$, cioè il minimo filtro su X tra quelli contenenti $\mathcal{S}$, dicesi il filtro generato da $\mathcal{S}$.

PROPOSIZIONE 1.2. Un sottoinsieme $\mathcal{S}$ di $\mathcal{P}(X)$ è una prebase per un filtro su X se e solo se ogni intersezione finita di elementi di $\mathcal{S}$ è non vuota. In tale caso una base del filtro su X generato da $\mathcal{S}$ è l'insieme delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$.

Dimostrazione. La necessità segue immediatamente da (i) e (ii). Per quanto riguarda la sufficienza si osservi che, se ogni intersezione finita di elementi di $\mathcal{S}$ è non vuota, l'insieme di tali intersezioni finite è – in virtù della Proposizione 1.1 – una base per un filtro su X il quale, ovviamente, contiene $\mathcal{S}$. #

Ogni sottoinsieme di un filtro $\mathcal{F}$ su X che genera $\mathcal{F}$ dicesi una prebase del filtro $\mathcal{F}$.
Ovviamente ogni base di un filtro è una prebase del filtro stesso.

Un filtro su X dicesi un ultrafiltro se esso è un elemento massimale dell'insieme, ordinato per inclusione, dei filtri su X (cioè se esso è tale che nessun filtro su X lo contiene strettamente).

PROPOSIZIONE 1.3. Per ogni filtro su X esiste un ultrafiltro su X che lo contiene.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ un filtro su X. Nell'insieme Φ, ordinato per inclusione, dei filtri su X contenenti $\mathcal{F}$ ogni parte totalmente ordinata ha un estremo superiore; infatti si constata senza difficoltà, sulla base della Proposizione 1.2, che l'unione di una parte totalmente ordinata di Φ è una prebase per un filtro su X (il quale è l'estremo superiore della parte stessa).
Ne segue, per il Lemma di Zorn, che Φ ha (almeno) un elemento massimale; ogni elemento massimale di Φ è un ultrafiltro su X contenente $\mathcal{F}$. #

PROPOSIZIONE 1.4. Se $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro su X e $A \in \mathcal{P}(X)$, allora $A \in \mathcal{F}$ oppure $\complement A \in \mathcal{F}$

Dimostrazione. Se $A \notin \mathcal{F}$, $\complement A \notin \mathcal{F}$, allora $\{B \in \mathcal{P}(X) : A \cup B \in \mathcal{F}\}$ è un filtro su X che contiene $\mathcal{F}$ strettamente (si osservi che $A \cup \complement A \in \mathcal{F}$), contro l'ipotesi che $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro su X. #

Siano X, Y due insiemi e f una funzione di X in Y.
Se $\mathcal{F}$ è un filtro su X il sottoinsieme $f(\mathcal{F})$ di $\mathcal{P}(Y)$ definito da $f(\mathcal{F}) = \{f(A) : A \in \mathcal{F}\}$ è una base per un filtro su Y che diremo il filtro immagine del filtro $\mathcal{F}$ tramite f.
Per convincersene si ricordi la Proposizione 1.1 e si osservi che $f(A_1) \cap f(A_2) \supseteq f(A_1 \cap A_2)$.
Si noti che, se $f: X \to Y$ è suriettiva e $\mathcal{F}$ è un filtro su X, allora $f(\mathcal{F})$ è un filtro su Y.
Per convincersene si osservi che, se $f: X \to Y$ è suriettiva e $B \in \mathcal{P}(Y)$, risulta $B = f(f^{-1}(B))$ e che, se $\mathcal{F}$ è un filtro su X, da $A \in \mathcal{F}$, $B \supseteq f(A)$ segue $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, perché $f^{-1}(B) \supseteq f^{-1}(f(A)) \supseteq A$.

PROPOSIZIONE 1.5. Siano X, Y due insiemi e $f: X \to Y$ una funzione. Se $\mathcal{F}$ è un ultrafiltro su X allora il filtro immagine di $\mathcal{F}$ tramite f è un ultrafiltro su Y.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro su X e sia $\mathcal{G}$ un filtro su Y contenente $f(\mathcal{F})$. Proviamo che $\mathcal{G}$ coincide con il filtro su Y generato da $f(\mathcal{F})$, cioè che ogni elemento di $\mathcal{G}$ contiene qualche elemento di $f(\mathcal{F})$. Sia $B \in \mathcal{G}$. Allora $\complement B \notin \mathcal{G}$ [perché $\mathcal{G}$ è un filtro], che implica $f^{-1}(\complement B) \notin \mathcal{F}$, perché, se fosse $f^{-1}(\complement B) \in \mathcal{F}$, sarebbe $\complement B \in \mathcal{G}$ [in quanto $\complement B \supseteq f(f^{-1}(\complement B)) \in f(\mathcal{F})$].
Ne segue che $f^{-1}(B) = \complement(f^{-1}(\complement B)) \in \mathcal{F}$ in virtù della Proposizione 1.4, donde $B \supseteq f(f^{-1}(B)) \in f(\mathcal{F})$. #

2. TOPOLOGIE SU UN INSIEME. BASI. PREBASI.

Sia X un insieme e sia $\mathcal{P}(X)$ l'insieme delle parti di X.
Diremo una <u>struttura topologica</u> su X ogni applicazione $x \mapsto \mathcal{F}(x)$, di X nell'insieme dei filtri su X, avente le seguenti due proprietà:

$$(2.1) \qquad \begin{cases} U \in \mathcal{F}(x) \Rightarrow x \in U. \\ \text{Per ogni } U \in \mathcal{F}(x) \text{ esiste } V \in \mathcal{F}(x) \text{ tale che } U \in \mathcal{F}(y) \quad \forall y \in V. \end{cases}$$

$\mathcal{F}(x)$ verrà chiamato il <u>filtro degli intorni</u> di x (per la struttura topologica $x \mapsto \mathcal{F}(x)$).
Una base (risp. una prebase) del filtro $\mathcal{F}(x)$ sarà chiamata una base (risp. una prebase) di intorni di x.

Si osservi che l'insieme delle due proprietà (2.1) equivale alla proprietà seguente:

(2.2) Per ogni $U \in \mathcal{F}(x)$ esiste $A \in \mathcal{P}(X)$ tale che $x \in A \subseteq U$ e che $A \in \mathcal{F}(y)$ $\forall y \in A$.

Evidentemente (2.2) $\Rightarrow$ (2.1); inoltre (2.1) $\Rightarrow$ (2.2) perché, sussistendo (2.1), l'insieme A definito da $A = \{y \in X : U \in \mathcal{F}(y)\}$ ha le proprietà richieste in (2.2), come immediatamente si constata.
Posto

$$(2.3) \qquad \mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(X) : \ A \in \mathcal{F}(x) \quad \forall x \in A\},$$

gli elementi dell'insieme $\mathcal{T}$ sono chiamati i sottoinsiemi <u>aperti</u> (o, brevemente, gli aperti) di X e i complementari degli elementi di $\mathcal{T}$ sono chiamati i sottoinsiemi <u>chiusi</u> (o, brevemente, i chiusi) di X (per la struttura topologica $x \mapsto \mathcal{F}(x)$).

E' immediato riconoscere che $\mathcal{T}$ ha le seguenti proprietà (a_1) e (a_2).

(a_1) L'unione di ogni sottoinsieme di $\mathcal{T}$ è un elemento di $\mathcal{T}$.
(a_2) L'intersezione di ogni sottoinsieme finito di $\mathcal{T}$ è un elemento di $\mathcal{T}$.

Si noti che (a_1) afferma, in particolare, che la parte vuota di X (in quanto unione della parte vuota di $\mathcal{T}$) è un elemento di $\mathcal{T}$ e che (a_2) afferma, in particolare che X (in quanto intersezione della parte vuota di $\mathcal{T}$) è un elemento di $\mathcal{T}$.

Ricordando che, se $(A_\iota)_{\iota \in I}$ è una famiglia di parti di X, si ha $\complement\left(\bigcup_{\iota \in I} A_\iota\right) = \bigcap_{\iota \in I} \complement A_\iota$ e $\complement\left(\bigcap_{\iota \in I} A_\iota\right) = \bigcup_{\iota \in I} \complement A_\iota$, da (a_1) e (a_2) segue subito che ogni intersezione di chiusi è un chiuso e ogni unione finita di chiusi è un chiuso.

OSSERVAZIONE 2.1. <u>Se $\mathcal{T}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(X)$ verificante le condizioni (a_1) e (a_2), esiste una e una sola struttura topologica, $x \mapsto \mathcal{F}(x)$, su X tale che valga l'uguaglianza (2.3)</u> <u>[cioè tale che $\mathcal{T}$ coincida con l'insieme degli aperti di X per tale struttura topologica] e risulta</u>

$$(2.4) \qquad \mathcal{F}(x) = \{U \in \mathcal{P}(X) : \ \text{esiste } A \in \mathcal{T} \text{ tale che } x \in A \subseteq U\}.$$

Dimostrazione. Si osservi che se $x \mapsto \mathcal{F}(x)$ è una struttura topologica su X, l'uguaglianza (2.3) sussiste se e solo se, per ogni $x \in X$, una base del filtro $\mathcal{F}(x)$ è $\{A \in \mathcal{T} : x \in A\}$.
Di conseguenza, se esiste una struttura topologica $x \mapsto \mathcal{F}(x)$ su X tale che l'uguaglianza (2.3) sussista, allora $\mathcal{F}(x)$ è necessariamente definito da (2.4). D'altra parte, se $\mathcal{T}$ ha le proprietà (a_1) e (a_2) e se $\mathcal{F}(x)$ è l'insieme definito da (2.4), è immediato constatare che $\mathcal{F}(x)$ è un filtro su X e che la (2.2) è soddisfatta; ne segue che $x \mapsto \mathcal{F}(x)$ è una struttura topologica su X.

Inoltre per tale struttura topologica sussiste l'uguaglianza (2.3). Infatti da (2.4) segue subito che $\mathcal{T} \subseteq \{A \in \mathcal{P}(X) : A \in \mathcal{F}(x)\ \forall x \in A\}$ e dal fatto che $\mathcal{T}$ ha la proprietà (a_1) segue che, se $A \in \mathcal{P}(X)$ e $A \in \mathcal{F}(x)$ $\forall x \in A$, allora per ogni $x \in A$ esiste $A_x \in \mathcal{T}$ tale che $x \in A_x \subseteq A$, donde $A = \bigcup_{x \in A} A_x \in \mathcal{T}$. #

Ogni sottoinsieme $\mathcal{T}$ di $\mathcal{P}(X)$ avente le proprietà (a_1) e (a_2) sarà detto una *topologia* su X. Con questa terminologia possiamo riassumere le considerazioni fatte sopra dicendo che *definire una struttura topologica su X equivale a fissare una topologia su X*: ad ogni struttura topologica $x \mapsto \mathcal{F}(x)$ su X resta associata la topologia $\mathcal{T}$ su X definita da (2.3) e ad ogni topologia $\mathcal{T}$ su X resta associata la struttura topologica $x \mapsto \mathcal{F}(x)$ su X definita da (2.4).

Se $\mathcal{T}$ è una topologia su X, si dirà che la coppia $(X, \mathcal{T})$ è uno *spazio topologico*. Quando non sarà necessario indicare esplicitamente la topologia definita su un insieme X, si parlerà semplicemente dello spazio topologico X.

L'insieme delle topologie su X si penserà ordinato per inclusione; evidentemente tale insieme ha un minimo e un massimo elemento: il minimo è la topologia $\{\emptyset, X\}$, detta *banale*, e il massimo è la topologia $\mathcal{P}(X)$, detta *discreta*.

Se $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ sono due topologie su X e $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$ si usa dire che $\mathcal{T}_1$ è più piccola (o più debole, o meno fine) di $\mathcal{T}_2$ e che $\mathcal{T}_2$ è più grande (o più forte, o più fine) di $\mathcal{T}_1$.

Se $\mathcal{T}$ è una topologia su X, ogni sottoinsieme $\mathcal{B}$ di $\mathcal{T}$ tale che ogni elemento di $\mathcal{T}$ sia unione di elementi di $\mathcal{B}$ dicesi una *base della topologia* $\mathcal{T}$. Evidentemente, se $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{T}$, allora $\mathcal{T}$ coincide con l'insieme delle unioni dei sottoinsiemi di $\mathcal{B}$.

PROPOSIZIONE 2.1. *Siano $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico, $\mathcal{B}$ un sottoinsieme di $\mathcal{T}$, $x \in X$, $\mathcal{F}(x)$ il filtro degli intorni di x per la topologia $\mathcal{T}$* (cioè il filtro definito da (2.4)) *e $\mathcal{B}(x)$ il sottoinsieme di $\mathcal{F}(x)$ definito da $\mathcal{B}(x) = \{B \in \mathcal{B} : x \in B\}$. $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{T}$ se e solo se, per ogni $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ è una base di $\mathcal{F}(x)$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base di $\mathcal{T}$ e sia $U \in \mathcal{F}(x)$. Per (2.2) esiste $A \in \mathcal{T}$ tale che $x \in A \subseteq U$. Essendo A unione di elementi di $\mathcal{B}$ esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $B \subseteq A$ e quindi tale che $B \subseteq U$. Dunque $\mathcal{B}(x)$ è una base del filtro $\mathcal{F}(x)$. Supponiamo ora che, per ogni $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ sia una base di $\mathcal{F}(x)$. Se $A \in \mathcal{T}$ si ha $A \in \mathcal{F}(x)$ $\forall x \in A$ e quindi per ogni $x \in A$ esiste $B_x \in \mathcal{B}(x)$ tale che $B_x \subseteq A$, donde $A = \bigcup_{x \in A} B_x$. Dunque $\mathcal{B}$ è una base di $\mathcal{T}$. #

Un sottoinsieme $\mathcal{B}$ di $\mathcal{P}(X)$ dicesi una *base per una topologia* su X se esiste una topologia su X (necessariamente unica) di cui $\mathcal{B}$ è una base; ciò accade, evidentemente, se e solo se l'insieme delle unioni dei sottoinsiemi di $\mathcal{B}$ è una topologia su X.

PROPOSIZIONE 2.2. *Un sottoinsieme $\mathcal{B}$ di $\mathcal{P}(X)$ è una base per una topologia su X se e solo se ogni intersezione finita di elementi di $\mathcal{B}$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$.*

Dimostrazione. Si tratta di provare che l'insieme delle unioni dei sottoinsiemi di $\mathcal{B}$ è una topologia su X se e solo se ogni intersezione finita di elementi di $\mathcal{B}$ è unione di elementi di $\mathcal{B}$. Ciò è di immediata constatazione. #

Dalla Proposizione 2.2 discende immediatamente che, *se $\mathcal{S}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(X)$, l'insieme delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$ è una base per una topologia su X*. Questa topologia è la minima topologia su X tra quelle contenenti $\mathcal{S}$ e dicesi la *topologia generata da $\mathcal{S}$*.

Se $\mathcal{T}$ è una topologia su X, ogni sottoinsieme di $\mathcal{T}$ che genera $\mathcal{T}$ dicesi una *prebase della topologia* $\mathcal{T}$. Dalla Proposizione 2.1 segue subito la

PROPOSIZIONE 2.3. *Con le notazioni della Proposizione 2.1, $\mathcal{B}$ è una prebase di $\mathcal{T}$ se e solo se, per ogni $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ è una prebase di $\mathcal{F}(x)$.*

Siano $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico; A un sottoinsieme di X e x un punto di X.
Ogni sottoinsieme di X che contiene un aperto contenente A dicesi un <u>intorno di A</u>.
x dicesi <u>interno ad A</u> se esiste un intorno di x contenuto in A;
x dicesi <u>esterno ad A</u> se x è interno al complementare $\complement A$ di A;
x dicesi <u>di chiusura per A</u> (o <u>aderente ad A</u>) se ogni intorno di x contiene qualche punto di A;
x dicesi <u>di accumulazione per A</u> se ogni intorno di x contiene qualche punto di A diverso da x;
x dicesi <u>di frontiera per A</u> se x è aderente sia ad A che a $\complement A$ (cioè se ogni intorno di x contiene qualche punto di A e qualche punto di $\complement A$, cioè se x non è né interno né esterno ad A);
x dicesi <u>isolato</u> se esiste un intorno di x la cui intersezione con A coincide con $\{x\}$.

L'<u>interno</u> di A è l'insieme dei punti interni ad A; sarà indicato con $\mathring{A}$.
La <u>chiusura</u> di A è l'insieme dei punti di chiusura per A; sarà indicata con $\overline{A}$.
La <u>frontiera</u> di A è l'insieme dei punti di frontiera di A; sarà indicata con ∂A.

A dicesi <u>denso</u> in X se $\overline{A} = X$.
X dicesi <u>separabile</u> se esiste un sottoinsieme di X finito o numerabile denso in X.

PROPOSIZIONE 2.6. Siano X uno spazio topologico e A un sottoinsieme di X. <u>La chiusura di A è unione disgiunta dell'interno di A e della frontiera di A</u>, cioè $\overline{A} = \mathring{A} \cup \partial A$, $\mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$.
<u>La chiusura di A è unione disgiunta dell'insieme dei punti isolati di A e dell'insieme dei punti di accumulazione per A.</u>

Dimostrazione: ovvia.

PROPOSIZIONE 2.7. Sia X uno spazio topologico e A un sottoinsieme di X. <u>La chiusura di A è l'intersezione di tutti i chiusi di X contenenti A, cioè è il più piccolo chiuso di X contenente A.</u>

Dimostrazione. Se x è un punto di X che non appartiene all'intersezione dei chiusi contenenti A esiste un chiuso B che contiene A e non contiene x; allora $\complement B$ è un aperto che contiene x e non contiene alcun punto di A; di conseguenza x non è aderente ad A.
Viceversa, se x non è aderente ad A esiste un intorno U di x, che possiamo supporre aperto, il quale non contiene alcun punto di A; allora $\complement U$ è un chiuso di X che contiene A senza contenere x; dunque x non appartiene all'intersezione di tutti i chiusi contenenti A. #

Dalle Proposizioni 2.6 e 2.7 segue immediatamente il seguente
COROLLARIO. <u>$\overline{A}$ è chiuso in X; ∂A è chiuso in X; A è chiuso in X se e solo se $A = \overline{A}$; A è chiuso in X se e solo se $\partial A \subseteq A$.</u>

PROPOSIZIONE 2.8. Sia X è uno spazio topologico e A un sottoinsieme di X. <u>L'interno di A è l'unione di tutti gli aperti contenuti in A, cioè è il più grande aperto contenuto in A.</u>

Dimostrazione: analoga a quella della Proposizione precedente.
Dalla Proposizione 2.8 segue subito che
COROLLARIO. <u>$\mathring{A}$ è aperto; A è aperto se e solo se $A = \mathring{A}$; A è aperto se e solo se $A \cap \partial A = \emptyset$.</u>

Indicheremo con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali e con $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali.
E' ovvio che l'insieme degli intervalli $]a,b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, è una base per una topologia su $\mathbb{R}$. La topologia che ha questa base dicesi la <u>topologia usuale su $\mathbb{R}$</u>.
Quando parleremo dello spazio topologico $\mathbb{R}$, intenderemo parlare di $\mathbb{R}$ con la topologia usuale.
Dalla densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ segue che lo spazio topologico $\mathbb{R}$ è separabile e a base numerabile: una base della topologia usuale su $\mathbb{R}$ è infatti l'insieme degli intervalli $]p,q[$ con $p, q \in \mathbb{Q}$ e $p < q$.

3. APPLICAZIONI CONTINUE.

Siano $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ spazi topologici, $\mathcal{B}_Y$ una base di $\mathcal{T}_Y$, $\mathcal{S}_Y$ una prebase di $\mathcal{T}_Y$, $f: X\to Y$ una applicazione di X in Y, $\mathcal{F}_X(x)$ il filtro degli intorni di $x\in X$ per $\mathcal{T}_X$, $\mathcal{F}_Y(f(x))$ il filtro degli intorni di $f(x)$ per $\mathcal{T}_Y$, $\mathcal{B}_Y(f(x))$ una base di $\mathcal{F}_Y(f(x))$, $\mathcal{S}_Y(f(x))$ una prebase di $\mathcal{F}_Y(f(x))$.

Si dice che $f: X\to Y$ è <u>continua in x</u> se l'immagine inversa di ogni intorno di $f(x)$ è un intorno di x, cioè se

(3.1) $\quad U\in \mathcal{F}_Y(f(x)) \Longrightarrow f^{-1}(U)\in \mathcal{F}_X(x)$, $\qquad$ ove $f^{-1}(U)=\{x\in X: f(x)\in U\}$.

Ciò equivale a dire che

(3.2) $\quad$ per ogni $U\in\mathcal{F}_Y(f(x))$ esiste $V\in\mathcal{F}_X(x)$ tale che $f(V)\subseteq U$ [ossia il filtro su Y generato da $f(\mathcal{F}_X(x))$ contiene $\mathcal{F}_Y(f(x))$].

L'equivalenza di (3.1) con (3.2) si riconosce immediatamente ricordando che $f(f^{-1}(U))=U\cap f(X)\subseteq U$ e che $f^{-1}(f(V))\supseteq V$.

Da (3.1) e (3.2) segue facilmente, ricordando che $A\supseteq B \Rightarrow f^{-1}(A)\supseteq f^{-1}(B)$ e che $f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(A_\lambda)$, $f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}f^{-1}(A_\lambda)$, la seguente

PROPOSIZIONE 3.1. <u>$f: X\to Y$ è continua in $x\in X$ se e solo se sussiste una delle seguenti proprietà</u>:

(3.3) $\quad U\in\mathcal{B}_Y(f(x)) \Longrightarrow f^{-1}(U)\in\mathcal{F}_X(x)$;

(3.4) $\quad U\in\mathcal{S}_Y(f(x)) \Longrightarrow f^{-1}(U)\in\mathcal{F}_X(x)$;

(3.5) $\quad$ per ogni $U\in\mathcal{B}_Y(f(x))$ esiste $V\in\mathcal{F}_X(x)$ tale che $f(V)\subseteq U$;

(3.6) $\quad$ per ogni $U\in\mathcal{S}_Y(f(x))$ esiste $V\in\mathcal{F}_X(x)$ tale che $f(V)\subseteq U$.

COROLLARIO. <u>Siano $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$, $(Z,\mathcal{T}_Z)$ spazi topologici, f un'applicazione di X in Y e g un'applicazione di Y in Z. Se f è continua in $x\in X$ e g è continua in $f(x)$, allora l'applicazione composta $h=g\circ f$ è continua in x.</u>

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che se U è un intorno di $h(x)=g(f(x))$ in Z, allora $h^{-1}(U)=f^{-1}(g^{-1}(U))$ è un intorno di x in X. Ciò è vero poiché la continuità di g in $f(x)$ implica che $g^{-1}(U)$ è un intorno di $f(x)$ in Y e la continuità di f in x implica che $f^{-1}(g^{-1}(U))$ è un intorno di x. #

Si dice che $f: X\to Y$ è <u>continua</u> se f è continua in ogni $x\in X$.

TEOREMA 3.1. <u>$f: X\to Y$ è continua se e solo se sussiste una delle seguenti proprietà</u>:

(3.7) $\quad A\in\mathcal{T}_Y \Rightarrow f^{-1}(A)\in\mathcal{T}_X$, cioè <u>l'immagine inversa di ogni aperto di Y è un aperto di X</u>;

(3.8) $\quad A\in\mathcal{B}_Y \Rightarrow f^{-1}(A)\in\mathcal{T}_X$;

(3.9) $\quad A\in\mathcal{S}_Y \Rightarrow f^{-1}(A)\in\mathcal{T}_X$;

(3.10 $\quad$ <u>l'immagine inversa di ogni chiuso di Y è un chiuso di X</u>;

(3.11) $\quad f(\bar{A})\subseteq\overline{f(A)}\quad \forall A\in\mathcal{P}(X)$.

Dimostrazione. f continua $\Rightarrow$ (3.7). Sia $x\in f^{-1}(A)$; $f(x)$ è interno ad A poiché A è aperto, perciò esiste un intorno U di $f(x)$ contenuto in A; per la continuità di f in x esiste un intorno V di x tale che $f(V)\subseteq U\subseteq A$, donde $V\subseteq f^{-1}(A)$. Dunque $f^{-1}(A)$ è aperto in X.

(3.7) $\Rightarrow$ f continua (in ogni $x\in X$). Sia $x \in X$ e U un intorno di $f(x)$; esiste un aperto A di Y contenente x e contenuto in U. Da (3.7) segue che $V=f^{-1}(A)$ è un aperto di X contenente x (quindi V è un intorno di x) tale che $f(V)\subseteq U$, donde la continuità di f in x.

(3.7) $\Rightarrow$ (3.8) $\Rightarrow$ (3.9) ovviamente.

(3.8) $\Rightarrow$ (3.7) perchè l'immagine inversa dell'unione di una famiglia di parti di Y coincide con l'unione delle immagini inverse degli elementi della famiglia.

(3.9) $\Rightarrow$ (3.8) perchè l'immagine inversa dell'intersezione di una famiglia di parti di Y coincide con l'intersezione delle immagini inverse degli elementi della famiglia.

(3.7) $\Leftrightarrow$ (3.10) perchè $f^{-1}(\complement A) = \complement f^{-1}(A)$.

(3.10) $\Rightarrow$ (3.11). Si ha $A\subseteq f^{-1}(f(A))\subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$; per (3.10) $f^{-1}(\overline{f(A)})$ è chiuso in X e quindi, contenendo A, esso contiene anche $\overline{A}$; pertanto $f(\overline{A})\subseteq f(f^{-1}(\overline{f(A)})) = \overline{f(A)}\cap f(X)\subseteq \overline{f(A)}$.

(3.11) $\Rightarrow$ (3.10). Sia B chiuso in Y e $C=f^{-1}(B)$. In virtù di (3.11) si ha $f(\overline{C}) = f(\overline{f^{-1}(B)})\subseteq$ $\subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} = \overline{B\cap f(X)}\subseteq \overline{B} = B$; dunque $f(\overline{C})\subseteq B$, donde $\overline{C}\subseteq f^{-1}(f(\overline{C}))\subseteq f^{-1}(B) = C$, da cui segue che $C=f^{-1}(B)$ è chiuso. #

COROLLARIO. Siano $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$, $(Z,\mathcal{T}_Z)$ spazi topologici, f un'applicazione di X in Y e g una applicazione di Y in Z. Se f e g sono continue anche l'applicazione composta $h=g\circ f$ è continua.

Dimostrazione. Sia $A\in\mathcal{T}_Z$. Allora $g^{-1}(A)\in\mathcal{T}_Y$ per la continuità di g e quindi $h^{-1}(A)=f^{-1}(g^{-1}(A))\in\mathcal{T}_X$ attesa la continuità di f. #

4. TOPOLOGIE DEBOLI E TOPOLOGIE INDUTTIVE. TOPOLOGIA INDOTTA. TOPOLOGIA PRODOTTO. TOPOLOGIA QUOZIENTE.

PROPOSIZIONE 4.1. Siano X, Y due insiemi e $f: X\to Y$ una funzione.
Se $\mathcal{T}_Y$ è una topologia su Y, allora il sottoinsieme $\mathcal{T}$ di $\mathcal{P}(X)$ definito da $\mathcal{T}=\{f^{-1}(A): A\in\mathcal{T}_Y\}$ è la più piccola topologia su X per cui f è continua.
Se $\mathcal{B}_Y$ è una base di $\mathcal{T}_Y$, allora $\{f^{-1}(B): B\in\mathcal{B}_Y\}$ è una base di $\mathcal{T}$.
Se $x\in X$ e $\mathcal{F}_Y(f(x))$ è il filtro degli intorni di $f(x)$ per $\mathcal{T}_Y$, allora $\{f^{-1}(U): U\in\mathcal{F}_Y(f(x))\}$ è una base di intorni di x per $\mathcal{T}$.
Se $\mathcal{B}_Y(f(x))$ è una base di $\mathcal{F}_Y(f(x))$, allora $\{f^{-1}(V): V\in\mathcal{B}_Y(f(x))\}$ è una base di intorni di x per $\mathcal{T}$.

Dimostrazione. Si verifica subito che $\mathcal{T}$ è una topologia su X. Se X è dotato della topologia $\mathcal{T}$ (e Y della topologia $\mathcal{T}_Y$) allora f è continua, in base al Teorema 3.1. Poichè (per il Teorema 3.1) ogni topologia su X per cui f è continua contiene necessariamente $\mathcal{T}$, si conclude che $\mathcal{T}$ è la più piccola tra queste. Le altre affermazioni della Proposizione 4.1 sono di facile verifica. #

DEFINIZIONE. Siano $(Y,\mathcal{T}_Y)$ uno spazio topologico e X un sottoinsieme di Y. La più piccola topologia su X per cui è continua l'iniezione canonica $i: x\mapsto x$ di X in Y dicesi la topologia su X indotta dalla topologia di Y e X munito di tale topologia dicesi un sottospazio dello spazio topologico $(Y,\mathcal{T}_Y)$. Poichè $i^{-1}(A) = A\cap X$ $\forall A\in\mathcal{P}(Y)$, dalla Proposizione 4.1 segue che la topologia su X indotta dalla topologia $\mathcal{T}_Y$ di Y è la seguente

$$\{A\cap X : A\in\mathcal{T}_Y\}$$

e che, per ogni $x\in X$, il filtro degli intorni di x per la topologia indotta è il seguente

$$\{U\cap X : U\in\mathcal{F}_Y(x)\},$$

ove $\mathcal{F}_Y(x)$ è il filtro degli intorni di x per la topologia $\mathcal{T}_Y$.

PROPOSIZIONE 4.2. Siano X, Y due insiemi e $f: X \to Y$ una funzione. Se $\mathcal{T}_X$ è una topologia su X allora il sottoinsieme $\mathcal{T}$ di $\mathcal{P}(Y)$ definito da $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(Y) : f^{-1}(A) \in \mathcal{T}_X\}$ è la più grande topologia su Y per cui f è continua.

Dimostrazione. Si verifica subito che $\mathcal{T}$ è una topologia su Y. Se Y è dotato della topologia $\mathcal{T}$ (e X della topologia $\mathcal{T}_X$) allora f è continua, in base al Teorema 3.1. Inoltre (per il Teorema 3.1) ogni topologia su Y per cui f è continua è contenuta in $\mathcal{T}$; dunque $\mathcal{T}$ è la più grande tra queste. #

DEFINIZIONE. Siano $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico, ρ una relazione di equivalenza in X, X/ρ l'insieme quoziente di X rispetto a ρ (cioè l'insieme delle classi di equivalenza definite da ρ) e $\pi: X \to X/\rho$ la proiezione canonica (che mappa l'elemento $x \in X$ nella classe di equivalenza $\pi(x)$ individuata da x).
La più grande topologia sull'insieme quoziente X/ρ per cui la proiezione canonica $\pi: X \to X/\rho$ è continua dicesi la topologia quoziente di $\mathcal{T}$ rispetto a ρ. L'insieme quoziente X/ρ, dotato della topologia quoziente, dicesi lo spazio (topologico) quoziente di $(X, \mathcal{T})$ rispetto a ρ.

— · —

Siano, ora, X un insieme, $(Y_\iota, \mathcal{T}_\iota)_{\iota \in I}$ una (arbitraria) famiglia di spazi topologici e, per ogni $\iota \in I$, sia $f_\iota: X \to Y_\iota$ una funzione.
Se $\mathcal{S}_\iota$ è una prebase di $\mathcal{T}_\iota$, dal Teorema 3.1 segue che la topologia su X generata dall'insieme

$$\{f_\iota^{-1}(A) : A \in \mathcal{S}_\iota, \ \iota \in I\}$$

è la più piccola topologia su X per cui ogni $f_\iota: X \to Y_\iota$ è continua; essa dicesi la topologia debole (o proiettiva) rispetto alla famiglia $(f_\iota)_{\iota \in I}$.
Una base della topologia debole su X rispetto alla famiglia $(f_\iota)_{\iota \in I}$ è allora (v. n.2) l'insieme delle intersezioni finite di parti di X del tipo $f_\iota^{-1}(A)$, con $A \in \mathcal{S}_\iota$ e $\iota \in I$.
E' facile constatare (ricordando la Proposizione 2.3) che, se $x \in X$ e $\mathcal{S}_\iota(f_\iota(x))$ è una prebase di intorni di $f_\iota(x)$ per la topologia $\mathcal{T}_\iota$, allora una prebase di intorni di x per la topologia debole su X rispetto alla famiglia $(f_\iota)_{\iota \in I}$ è la seguente:

$$\{f_\iota^{-1}(U) : U \in \mathcal{S}_\iota(f_\iota(x)), \ \iota \in I\}.$$

Di conseguenza (v. Proposizione 1.2) una base di intorni di x per la topologia debole su X rispetto alla famiglia $(f_\iota)_{\iota \in I}$ è l'insieme delle intersezioni finite di parti di X del tipo $f_\iota^{-1}(U)$, con $U \in \mathcal{S}_\iota(f_\iota(x))$ e $\iota \in I$.

OSSERVAZIONE. Ogni famiglia $(\mathcal{T}_\iota)_{\iota \in I}$ di topologie su un insieme X ammette un estremo superiore nell'insieme, ordinato per inclusione, delle topologie su X: l'estremo superiore è, evidentemente, la topologia su X generata dall'unione della famiglia $(\mathcal{T}_\iota)_{\iota \in I}$. Si osservi che tale estremo superiore è la topologia debole su X rispetto alla famiglia $(i_\iota)_{\iota \in I}$, ove i_ι è la funzione identica di X su X_ι, essendo X_ι l'insieme X munito della topologia $\mathcal{T}_\iota$.

DEFINIZIONE. Sia $(X_\iota, \mathcal{T}_\iota)_{\iota \in I}$ una famiglia di spazi topologici.
Dicesi la topologia prodotto delle topologie $\mathcal{T}_\iota$ la topologia debole sull'insieme prodotto $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota = \{(x_\iota)_{\iota \in I} : x_\iota \in X_\iota\}$ rispetto alla famiglia $(p_\iota)_{\iota \in I}$ delle proiezioni $p_\iota : X \to X_\iota$ [definite da $p_\iota(x) = x_\iota \quad \forall x = (x_\iota)_{\iota \in I} \in X$].

L'insieme prodotto $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$, munito della topologia prodotto delle topologie $\mathcal{T}_\iota$, dicesi lo spazio (topologico) prodotto degli spazi topologici $(X_\iota, \mathcal{T}_\iota)$.

Se $\mathcal{S}_\iota$ è una prebase di $\mathcal{T}_\iota$ [in particolare $\mathcal{S}_\iota$ può essere una base di $\mathcal{T}_\iota$ o addirittura essere $\mathcal{T}_\iota$ stesso], una base della topologia prodotto delle topologie $\mathcal{T}_\iota$ è l'insieme delle intersezioni finite di parti di X del tipo $p_\iota^{-1}(A)$, con $A \in \mathcal{S}_\iota$, cioè l'insieme delle parti di X del tipo $\prod_{\iota \in I} A_\iota$, ove $A_\iota \in \mathcal{S}_\iota$ e $A_\iota = X_\iota$ tranne per un numero finito di indici $\iota \in I$.

Se $\mathcal{S}_\iota(x_\iota)$ è una prebase del filtro degli intorni di $x_\iota \in X_\iota$ in X_ι [$\mathcal{S}_\iota(x_\iota)$ può essere, in particolare, una base di tale filtro o il filtro stesso], una base del filtro degli intorni di $x = (x_\iota)_{\iota \in I}$ nello spazio prodotto X è l'insieme delle intersezioni finite di parti di X del tipo $p_\iota^{-1}(U_\iota)$, con $U_\iota \in \mathcal{S}_\iota(x_\iota)$, cioè l'insieme delle parti di X del tipo $\prod_{\iota \in I} U_\iota$, ove $U_\iota \in \mathcal{S}_\iota$ e $U_\iota = X_\iota$ tranne per un numero finito di indici $\iota \in I$.

Nel caso particolare di due spazi topologici $(X_1, \mathcal{T}_1)$ e $(X_2, \mathcal{T}_2)$, una base della topologia prodotto di $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ è l'insieme delle parti di $X_1 \times X_2$ del tipo $A_1 \times A_2$, ove A_1 descrive una prebase di $\mathcal{T}_1$ e A_2 descrive una prebase di $\mathcal{T}_2$; se $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, una base di intorni di x per la topologia prodotto è l'insieme delle parti di $X_1 \times X_2$ del tipo $U_1 \times U_2$, ove U_1 descrive una prebase di intorni di x_1 per $\mathcal{T}_1$ e U_2 descrive una prebase di intorni di x_2 per $\mathcal{T}_2$.

PROPOSIZIONE 4.4. Siano $(X, \mathcal{T}_X)$ e $(Y, \mathcal{T}_Y)$ spazi topologici e $g : X \to Y$ un'applicazione. Se $\mathcal{T}_Y$ è la topologia debole su Y rispetto alla famiglia $(f_\iota)_{\iota \in I}$ con $f_\iota : Y \to Y_\iota$, allora g è continua se e solo se tali sono tutte le applicazioni $f_\iota \circ g$.

Dimostrazione. Se g è continua tali sono le applicazioni $f_\iota \circ g$, perché f_ι è continua $\forall \iota \in I$ [V. Corollario del Teorema 3.1].
Viceversa, se $f_\iota \circ g$ è continua $\forall \iota \in I$, detta $\mathcal{T}_\iota$ è la topologia di Y_ι, risulta $(f_\iota \circ g)^{-1}(A_\iota) = g^{-1}(f_\iota^{-1}(A_\iota)) \in \mathcal{T}_X$ $\forall A_\iota \in \mathcal{T}_\iota$, donde la continuità di g per il fatto che l'insieme $\{f_\iota^{-1}(A_\iota) : A_\iota \in \mathcal{T}_\iota, \iota \in I\}$ è una prebase di $\mathcal{T}_Y$. #

COROLLARIO. Siano X uno spazio topologico e Y lo spazio prodotto della famiglia $(Y_\iota)_{\iota \in I}$ di spazi topologici. L'applicazione $g : X \to Y$ è continua se e solo se sono continue tutte le sue componenti $p_\iota \circ g : X \to Y_\iota$.

Siano $(X_\iota, \mathcal{T}_\iota)_{\iota\in I}$ una famiglia di spazi topologici, Y un insieme e, per ogni $\iota\in I$, sia $f_\iota : X_\iota \to Y$ un'applicazione di X_ι in Y.

È immediato constatare che l'insieme

$$\{A\in\mathcal{P}(Y) : f_\iota^{-1}(A)\in\mathcal{T}_\iota \quad \forall \iota\in I\}$$

è una topologia su Y. Poichè, in base al Teorema 3.1, ogni topologia su Y per la quale tutte le f_ι sono continue è necessariamente contenuta nella topologia (4.3), la topologia (4.3) è la più grande topologia su Y per la quale f_ι è continua $\forall\iota\in I$: essa dicesi la <u>topologia induttiva</u> rispetto alla famiglia $(f_\iota)_{\iota\in I}$.

PROPOSIZIONE 4.5. <u>Siano $(X,\mathcal{T}_X)$ e $(Y,\mathcal{T}_Y)$ spazi topologici e $g: X\to Y$ un'applicazione. Se $\mathcal{T}_X$ è la topologia induttiva rispetto alla famiglia $(f_\iota)_{\iota\in I}$ con $f_\iota : X_\iota\to X$, allora g è continua se e solo se tali sono tutte le applicazioni $g\circ f_\iota$.</u>

Dimostrazione. Se g è continua tali sono le $f_\iota \circ g$, perchè f_ι è continua $\forall\iota\in I$ [V. Corollario del Teorema 3.1]. Viceversa, se $g\circ f_\iota : X_\iota \to Y$ è continua $\forall\iota\in I$, detta $\mathcal{T}_\iota$ la topologia di X_ι, risulta $(g\circ f_\iota)^{-1}(A) = f_\iota^{-1}(g^{-1}(A))\in\mathcal{T}_\iota$ $\forall A\in\mathcal{T}_Y$ e $\forall\iota\in I$, cioè $g^{-1}(A)\in\mathcal{T}_X$ [si ricordi che $\mathcal{T}_X=\{B\in\mathcal{P}(X): f_\iota^{-1}(B)\in\mathcal{T}_\iota \ \forall\iota\in I\}$] donde la continuità di g. #

5. FILTRI CONVERGENTI. PUNTI ADERENTI A UN FILTRO. SPAZI DI HAUSDORFF.

Sia $(X,\mathcal{T})$ uno spazio topologico e, per ogni $x\in X$, sia $\mathcal{F}(x)$ il filtro degli intorni di x per $\mathcal{T}$.

Un <u>filtro</u> $\mathcal{F}$ su X dicesi <u>convergente</u> a x se $\mathcal{F}\supseteq\mathcal{F}(x)$, cioè se ogni intorno di x è un elemento del filtro $\mathcal{F}$. In tale caso diremo che x è un (punto) limite di $\mathcal{F}$ e scriveremo

$$\mathcal{F}\to x.$$

Si noti che la definizione di convergenza di un filtro a un punto traduce l'idea intuitiva di un filtro che "si racchiude" attorno a x.

Naturalmente, $\mathcal{F}(x)$ converge a x $\quad\forall x\in X$.

Nella topologia discreta su X [V. n. 2] i soli filtri convergenti sono i filtri degli intorni dei punti di X; infatti $\mathcal{F}(x)$ è l'insieme di tutte le parti di X contenenti x.

Nella topologia banale su X [V. n. 2] ogni filtro su X converge a ogni punto $x\in X$; infatti $\mathcal{F}(x)=\{X\}$.

Uno spazio topologico X dicesi uno <u>spazio di Hausdorff</u> (o uno spazio <u>separato</u>) se per ogni coppia di punti distinti x, y di X esistono un intorno U di x e un intorno V di y disgiunti (cioè tali che $U\cap V=\emptyset$). La topologia di uno spazio di Hausdorff dicesi una <u>topologia di Hausdorff</u> (o <u>separata</u>).

Si constata facilmente che <u>un sottospazio di uno spazio di Hausdorff è uno spazio di Hausdorff</u> e che <u>lo spazio prodotto di una famiglia di spazi di Hausdorff è uno spazio di Hausdorff.</u>

In uno spazio di Hausdorff i sottoinsiemi costituiti di un solo elemento sono chiusi (perchè, evidentemente, i loro complementari sono aperti); di conseguenza ogni parte finita di uno spazio di Hausdorff è chiusa.

PROPOSIZIONE 5.1. <u>Uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se ogni filtro su X convergente ha un solo punto limite.</u>

Dimostrazione. Se X non è di Hausdorff esistono $x\in X$ e $y\in X$, con $x\neq y$, tali che il sottoinsieme $\mathcal{B}$ di X definito da $\mathcal{B}=\{U\cap V: U\in\mathcal{F}(x), V\in\mathcal{F}(y)\}$ è una base per un filtro su X, il quale, contenendo $\mathcal{F}(x)$ [in quanto $\mathcal{F}(x)=\{U\cap X: U\in\mathcal{F}(x)\}$] e $\mathcal{F}(y)$ [in quanto $\mathcal{F}(y)=\{X\cap V: V\in\mathcal{F}(y)\}$], converge sia al punto x che al punto y. Viceversa, se esiste un filtro $\mathcal{F}$ su X convergente a due punti x e y con $x\neq y$, allora $\mathcal{F}\supseteq\{U\cap V: U\in\mathcal{F}(x), V\in\mathcal{F}(y)\}$ e quindi [si ricordi che un filtro su X non contiene la parte vuota di X] si ha $U \cap V \neq \emptyset$ per ogni $U \in \mathcal{F}(x)$ e ogni $V \in \mathcal{F}(y)$, cioè X non è di Hausdorff. #

Un punto $x \in X$ dicesi aderente a un filtro $\mathcal{F}$ su X se $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \bar{A}$, cioè se ogni intorno di x contiene punti di ogni elemento A di $\mathcal{F}$.

PROPOSIZIONE 5.2. *Ogni punto limite di un filtro $\mathcal{F}$ su X è aderente a $\mathcal{F}$. Un punto $x \in X$ è aderente a un filtro $\mathcal{F}$ su X se e solo se x è un limite di qualche filtro su X contenente $\mathcal{F}$. Di conseguenza (per la Proposizione 1.3) un ultrafiltro $\mathcal{F}$ su X converge a $x \in X$ se e solo se x è aderente a $\mathcal{F}$.*

Dimostrazione. Ogni punto limite di un filtro $\mathcal{F}$ è aderente a $\mathcal{F}$, perché $\mathcal{F} \to x \Rightarrow \mathcal{F} \supseteq \mathcal{F}(x) \Rightarrow \mathcal{F} \supseteq \{U \cap A : U \in \mathcal{F}(x),\ A \in \mathcal{F}\} \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset \ \ \forall U \in \mathcal{F}(x)$ e $\forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in \bar{A} \ \ \forall A \in \mathcal{F} \Rightarrow x$ è aderente a $\mathcal{F}$. Di conseguenza se $\mathcal{F}'$ è un filtro contenente il filtro $\mathcal{F}$ e convergente a $x \in X$, allora x (è aderente a $\mathcal{F}'$ e quindi) è aderente a $\mathcal{F}$. Viceversa, se x è aderente a $\mathcal{F}$, esiste un filtro su X contenente $\mathcal{F}$ e convergente a x; infatti, se x è aderente a $\mathcal{F}$, allora $\{U \cap A : U \in \mathcal{F}(x),\ A \in \mathcal{F}\}$ è una base per un filtro su X che contiene $\mathcal{F}$ [perché $\mathcal{F} = \{X \cap A : A \in \mathcal{F}\}$] e contiene $\mathcal{F}(x)$ [perché $\mathcal{F}(x) = \{U \cap X : U \in \mathcal{F}(x)\}$]. #

PROPOSIZIONE 5.3. *Uno spazio topologico X è di Hausdorff se e solo se per ogni filtro $\mathcal{F}$ su X convergente esiste un solo punto aderente a $\mathcal{F}$.*

Dimostrazione. Se X è di Hausdorff e $\mathcal{F}$ è un filtro su X convergente a $x \in X$, allora x è l'unico punto aderente a $\mathcal{F}$, perché, se $y \in X$ è aderente a $\mathcal{F}$, esiste (per la Proposizione 5.2) un filtro su X contenente $\mathcal{F}$ che converge a y e quindi convergente anche a x, donde $y = x$ per l'unicità del limite in uno spazio di Hausdorff (v. Proposizione 5.1). Viceversa, se per ogni filtro su X convergente esiste un solo punto aderente ad esso, allora ogni filtro su X convergente ha un solo punto limite (perché i punti limite di un filtro sono aderenti al filtro stesso) e quindi X è di Hausdorff, in virtù della Proposizione 5.1. #

PROPOSIZIONE 5.4. *Siano X, Y due spazi topologici. Una funzione $f: X \to Y$ è continua in $x \in X$ se e solo se per ogni filtro $\mathcal{F}$ su X convergente a x il filtro immagine di $\mathcal{F}$ tramite f converge a $f(x)$.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{F}_X(x)$ il filtro degli intorni di x in X e $\mathcal{F}_Y(f(x))$ il filtro degli intorni di $f(x)$ in Y. La Proposizione 5.4 discende immediatamente dal fatto che (v. n. 3) f è continua in x se e solo se il filtro immagine di $\mathcal{F}_X(x)$ contiene $\mathcal{F}_Y(f(x))$ e dal fatto che $\mathcal{F}_X(x)$ converge a x. #

PROPOSIZIONE 5.5. *L'insieme X sia dotato della topologia debole rispetto a una famiglia $(f_\iota)_{\iota \in I}$ di funzioni $f_\iota : X \to Y_\iota$, ove Y_ι è uno spazio topologico. Un filtro $\mathcal{F}$ su X converge a $x \in X$ se e solo se, per ogni $\iota \in I$, il filtro immagine di $\mathcal{F}$ tramite f_ι converge a $f_\iota(x)$.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{F}$ converge a x, allora $\forall \iota \in I$ il filtro immagine di $\mathcal{F}$ tramite f_ι converge a $f_\iota(x)$ per la Proposizione 5.4, essendo f_ι continua. Se, viceversa, per ogni $\iota \in I$, il filtro immagine di $\mathcal{F}$ tramite f_ι converge a $f_\iota(x)$, allora per ogni $\iota \in I$ e ogni intorno U di $f_\iota(x)$ in Y_ι esiste $A \in \mathcal{F}$ tale che $U \supseteq f_\iota(A)$; poiché $f_\iota^{-1}(U) \supseteq f_\iota^{-1}(f_\iota(A)) \supseteq A$, se ne deduce che $\mathcal{F}$ converge a x, ricordando (v. Prop. 4.3) che il filtro degli intorni di x (per la topologia debole su X rispetto alla famiglia $(f_\iota)_{\iota \in I}$) è generato dall'insieme $\{f_\iota^{-1}(U) : U \in \mathcal{F}_\iota(f_\iota(x)),\ \iota \in I\}$, ove $\mathcal{F}_\iota(f_\iota(x))$ denota il filtro degli intorni di $f_\iota(x)$ in Y_ι. #

Dalla Proposizione 5.5 discende immediatamente il seguente

COROLLARIO. *Un filtro $\mathcal{F}$ su uno spazio prodotto $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ converge a $x \in X$ se e solo se, per ogni $\iota \in I$, il filtro immagine di $\mathcal{F}$ tramite la proiezione $p_\iota : X \to X_\iota$ converge a $p_\iota(x)$.*

6. RETI.

Un <u>insieme filtrante</u> (o diretto) è un insieme A su cui è assegnato un preordine (che indicheremo con il simbolo $\leq$) tale che per ogni $\alpha \in A$ e $\beta \in A$ esiste $\gamma \in A$ tale che $\alpha \leq \gamma$ e $\beta \leq \gamma$.

Una <u>rete</u> in un insieme X è una funzione a valori in X definita su un insieme filtrante. L'insieme ordinato $\mathbb{N}$ dei numeri naturali è, come si sa, un insieme filtrante. Le reti definite su $\mathbb{N}$ si chiamano <u>successioni</u>.

Per indicare la rete $s : A \to X$ conviene usare la "notazione indiciale": porre cioè

$$s = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$$

ove si deve intendere $x_\alpha = s(\alpha)$.

Ad ogni rete in un insieme X si associa un filtro su X nel modo seguente.
Sia $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una rete in X. Posto, per ogni $\alpha \in A$,

$$S_\alpha = \{ x_\beta : \beta \in A, \beta \geq \alpha \},$$

si verifica immediatamente (ricordando la Proposizione 1.1) che l'insieme $\{S_\alpha : \alpha \in A\}$ è una base per un filtro su X, che diremo il <u>filtro associato alla rete</u> $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Sia ora X uno spazio topologico e sia $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una rete in X.
Diremo che la <u>rete</u> $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ <u>converge</u> a $x \in X$ se il filtro ad essa associato converge a x; in tale caso diremo che x è un limite della rete $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ e scriveremo

$$\lim_{\alpha \in A} x_\alpha = x \quad , \text{ o più brevemente } \quad x_\alpha \to x .$$

Diremo inoltre che un <u>punto</u> $x \in X$ è <u>aderente alla rete</u> $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ se x è aderente al filtro ad essa associato.

Le seguenti due affermazioni sono di immediata constatazione.

<u>La rete $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a $x \in X$ se e solo se per ogni intorno U di x esiste $\alpha(U) \in A$ tale che</u>

$$\alpha \in A, \quad \alpha \geq \alpha(U) \implies x_\alpha \in U .$$

<u>Un punto $x \in X$ è aderente alla rete $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ se e solo se per ogni intorno U di x e per ogni $\alpha \in A$ esiste $\beta \in A$ con $\beta \geq \alpha$ tale che $x_\beta \in U$.</u>

Si osservi che per verificare che $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a x oppure che x è aderente a $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ è sufficiente limitarsi a considerare U in una prebase di intorni di x.

Nel caso di una successione in X le caratterizzazioni precedenti si particolarizzano nel modo seguente.

<u>Una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X converge a $x \in X$ se e solo se per ogni intorno U di x esiste $n(U) \in \mathbb{N}$ tale che $\mathbb{N} \ni n \geq n(U) \implies x_n \in U$.</u>

<u>Un punto $x \in X$ è aderente alla successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X se e solo se per ogni intorno U di x e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ tale che $x_m \in U$.</u>

OSSERVAZIONE. Ad ogni rete in uno spazio topologico X abbiamo associato un filtro su X che (per definizione) ha gli stessi punti limite e gli stessi punti aderenti.
E' interessante sapere che, viceversa, ad ogni filtro $\mathcal{F}$ su X si può associare una rete tale che il filtro ad essa associato coincide con $\mathcal{F}$ e, di conseguenza, ha gli stessi limiti e punti aderenti di $\mathcal{F}$.

Posto, infatti, $E=\{(\alpha,A) : A\in\mathcal{F},\ \alpha\in A\}$, E è un insieme filtrante rispetto al preordine $(\alpha,A)\leq(\beta,B) \Longleftrightarrow A\supseteq B$ e, posto $s_{\mathcal{F}}(\alpha,A)=\alpha \quad \forall(\alpha,A)\in E$, l'applicazione $s_{\mathcal{F}}: E\to X$ è una rete, il filtro associato alla quale coincide con $\mathcal{F}$ [come si constata senza difficoltà].

Potremo dire che $s_{\mathcal{F}}$ è la rete associata al filtro $\mathcal{F}$.

Pertanto i filtri e le reti sono equivalenti allo scopo di descrivere la convergenza in uno spazio topologico. Tuttavia le reti, anche se psicologicamente possono risultare preferibili essendo la spontanea generalizzazione delle successioni, sono spesso meno maneggevoli dei filtri, con i quali, del resto la nozione intuitiva di convergenza si traduce perfettamente.

Vale la pena di mettere in evidenza il fatto che anche per le reti sussiste una caratterizzazione dei punti aderenti, che è equivalente a quella espressa dalla Proposizione 5.2 per i filtri.

A tale scopo bisogna introdurre la nozione di sottorete.

Sia $s: A\to X$ una rete in X. Se B è un insieme filtrante e $\varphi: B\to A$ è un'applicazione conservante il preordine e tale che per ogni $\alpha\in A$ esiste $\beta\in B$ con $\alpha\leq\varphi(\beta)$, allora la rete $s\circ\varphi: B\to X$ dicesi una sottorete della rete s. Se X è uno spazio topologico e la rete s converge a $x\in X$, allora, evidentemente, anche la sottorete $s\circ\varphi$ converge a x. Se $s: \mathbb{N}\to X$ è una successione in X e $\varphi: \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ è una funzione crescente, allora la successione $s\circ\varphi: \mathbb{N}\to X$ dicesi una sottosuccessione della successione s. Evidentemente la successione $s\circ\varphi$ è una particolare sottorete della successione s.

PROPOSIZIONE 6.1. Sia X uno spazio topologico. Un punto $x\in X$ è aderente a una rete s in X se e solo se qualche sottorete di s converge a x. Inoltre, se x ha una base numerabile di intorni, x è aderente a una successione s in X se e solo se qualche sottosuccessione di s converge a x.

Dimostrazione. Sia $s: A\to X$ una rete in X e sia $\mathcal{B}(x)$ una base di intorni di x in X.

E' evidente che se una sottorete di s converge a x, allora x è aderente a s.

Viceversa, se x è aderente a s, l'insieme B definito ponendo $B=\{(\alpha,U)\in A\times\mathcal{B}(x) : s(\alpha)\in U\}$, con il preordine $(\alpha,U)\leq(\beta,V) \Longleftrightarrow \alpha\leq\beta$ e $V\subseteq U$, è filtrante e la sottorete $s\circ\varphi: B\to X$ di $s: A\to X$, ove $\varphi: B\to A$ è la funzione definita da $\varphi((\alpha,U))=\alpha$, converge a x in X.

Per concludere basta osservare che, se $\mathcal{B}(x)$ è numerabile e s è una successione in X, allora B è numerabile e quindi a $s\circ\varphi: B\to X$ resta associata una sottosuccessione di s convergente a x. #

Si osservi che le Proposizioni 5.3, 5.4 e il Corollario di quest'ultima possono esprimersi in termini di reti anzichè di filtri, nel senso che ora preciseremo.

PROPOSIZIONE 6.2. Siano X, Y spazi topologici. $f: X\to Y$ è continua in $x\in X$ se e solo se per ogni rete $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in X convergente a x, la rete $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ in Y converge a $f(x)$.

PROPOSIZIONE 6.3. L'insieme X sia dotato della topologia debole rispetto alla famiglia $(f_\iota)_{\iota\in I}$, con $f_\iota: X\to Y_\iota$. La rete $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in X converge a $x\in X$ se e solo se, per ogni $\iota\in I$, la rete $(f_\iota(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ in Y_ι converge a $f_\iota(x)$.

COROLLARIO. La rete $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ nello spazio prodotto $X=\prod_{\iota\in I} X_\iota$ converge a $x\in X$ se e solo se, per ogni $\iota\in I$, la rete $(p_\iota(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ in X_ι converge a $p_\iota(x)$, essendo p_ι la proiezione di X su X_ι.

Proviamo infine la seguente

PROPOSIZIONE 6.4. Siano X uno spazio topologico e A un sottoinsieme di X. Allora $x\in\overline{A}$ se e solo se esiste una rete in A che (in quanto rete in X) converge a x.

Dimostrazione. Sia, al solito, $\mathcal{F}(x)$ il filtro degli intorni di x.

Se $x\in\overline{A}$, allora $\forall U\in\mathcal{F}(x)$ si ha $U\cap A\neq\emptyset$. Per ogni $U\in\mathcal{F}(x)$ scegliamo $x_U\in U\cap A$. Poichè $\mathcal{F}(x)$ è filtrante rispetto alla relazione d'ordine $U\leq V \Longleftrightarrow U\supseteq V$, l'applicazione $U\to x_U$ è una rete in A che, ovviamente, converge a x.

Viceversa, se $(x_\lambda)_{\lambda\in L}$ è una rete in A convergente a $x\in X$, allora per ogni $U\in\mathcal{F}(x)$ esiste $\lambda_0\in L$ tale che $\lambda\geq\lambda_0 \Rightarrow x_\lambda\in U$ e quindi $x\in\overline{A}$. #

7. FUNZIONI CONTINUE A VALORI IN UNO SPAZIO ~~DI~~ HAUSDORFF.

PROPOSIZIONE 7.1. Se f, g sono due applicazioni continue di uno spazio topologico X in uno spazio di Hausdorff Y, allora l'insieme $H = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ è chiuso in X.

Dimostrazione. Dimostriamo che $\complement H$ è aperto in X, cioè che per ogni $x \in \complement H$ esiste un intorno di x contenuto in $\complement H$. Se $x_0 \in \complement H$, allora $f(x_0) \neq g(x_0)$; pertanto, essendo Y uno spazio di Hausdorff, esistono un intorno U di $f(x_0)$ e un intorno V di $g(x_0)$ tali che $U \cap V = \emptyset$. Per la continuità di f e di g in x_0, esiste un intorno W di x_0 tale che $f(W) \subseteq U$ e $g(W) \subseteq V$. Di conseguenza $f(W) \cap g(W) = \emptyset$, donde $W \subseteq \complement H$. #

COROLLARIO 1. (Principio di prolungamento delle identità). Siano f, g due applicazioni continue di uno spazio topologico X in uno spazio di Hausdorff Y e A un sottoinsieme di X denso in X. Allora $f(x) = g(x) \quad \forall x \in A \implies f = g$.

Dimostrazione. Si ha $A \subseteq H = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$. Poiché H è chiuso [per la Proposizione 7.1] e A è denso in X, dev'essere $H = X$. #

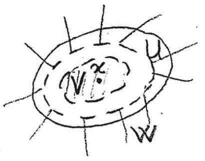
COROLLARIO 2. Se f è un'applicazione continua di uno spazio topologico X in uno spazio di Hausdorff Y, allora il grafico di f è chiuso nello spazio prodotto $X \times Y$.

Dimostrazione. Ricordiamo che il grafico di $f: X \to Y$ è il sottoinsieme di $X \times Y$ così definito: $\Gamma(f) = \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$. Posto $p_X(x,y) = x$, $p_Y(x,y) = y$ e $g(x,y) = f(x)$, si ha $\Gamma(f) = \{(x,y) \in X \times Y : p_Y(x,y) = g(x,y)\}$. Dalla Proposizione 7.1 segue allora che $\Gamma(f)$ è chiuso in $X \times Y$ perché p_Y e g sono due funzioni continue di $X \times Y$ nello spazio di Hausdorff Y. [p_X e p_Y sono continue per definizione di topologia prodotto ed g è continua perché $g = f \circ p_X$]. #

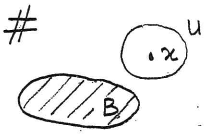
8. SPAZI REGOLARI. SPAZI COMPLETAMENTE REGOLARI. SPAZI NORMALI.

PROPOSIZIONE 8.1. Se X è uno spazio topologico le seguenti due affermazioni sono equivalenti:
(a) se B è un chiuso di X e $x \in X$, $x \notin B$, esistono un intorno di x e un intorno di B disgiunti;
(b) l'insieme degli intorni chiusi di ogni $x \in X$ è una base del filtro degli intorni di x (cioè ogni intorno di x contiene qualche intorno chiuso di x).

Dimostrazione. (a) $\Rightarrow$ (b). Sia U un intorno aperto di $x \in X$. Allora $\complement U$ è un chiuso di X che non contiene x. Per (a) esistono un intorno V di x e un intorno aperto W di $\complement U$ disgiunti; allora $V \subseteq \complement W \subseteq U$. Dunque $\complement W$ è un intorno chiuso di x contenuto in U.



(b) $\Rightarrow$ (a). Se B è un chiuso di X e $x \notin B$, $\complement B$ è un intorno aperto di x. Per (b) esiste un intorno chiuso U di x tale che $U \subseteq \complement B$. Allora $\complement U$ è un aperto contenente B - cioè un intorno aperto di B - e U è un intorno di x disgiunto da $\complement U$. #



Uno spazio topologico X dicesi regolare se per esso vale (a) oppure (b).

COROLLARIO. Uno spazio topologico regolare X è di Hausdorff se e solo se $\{x\}$ è chiuso in X $\forall x \in X$.

Uno spazio topologico X dicesi completamente regolare se per ogni chiuso B di X e per ogni punto $x\in X$ con $x\notin B$ esiste $f: X\to[0,1]$ continua tale che $f(x)=0$ e $f(B)=\{1\}$.

Se X è completamente regolare esso è anche regolare. Infatti se B è un chiuso di X, $x\notin B$ e $f: X\to[0,1]$ continua e tale che $f(x)=0$, $f(B)=\{1\}$, allora gli aperti $f^{-1}([0,\frac{1}{2}[)$ e $f^{-1}(]\frac{1}{2},1])$ sono intorni disgiunti di x e di B rispettivamente.

L'importanza degli spazi completamente regolari si renderà evidente nel seguito: sono questi gli spazi topologici che veramente utilizzeremo.

PROPOSIZIONE 8.2. Se X è uno spazio topologico le seguenti due affermazioni sono equivalenti:

(n_1) se B_1 e B_2 sono due chiusi disgiunti di X, esistono un intorno U_1 di B_1 e un intorno U_2 di B_2 disgiunti;

(n_2) l'insieme degli intorni chiusi di ogni chiuso B di X è una base del filtro degli intorni di B.

La dimostrazione è del tutto analoga a quella della Proposizione 8.1.

Uno spazio topologico dicesi normale se per esso vale (n_1) oppure (n_2).

Sussiste il seguente importante

TEOREMA 8.1 (di Urysohn). Se X è uno spazio topologico le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(n) X è normale;

(n_3) se B_1 e B_2 sono due chiusi disgiunti di X, esiste $f: X\to[0,1]$ continua tale che $f(B_1)=\{0\}$, $f(B_2)=\{1\}$

(n_4) se B è un chiuso di X e $f: B\to\mathbb{R}$ è continua, esiste $\bar{f}: X\to\mathbb{R}$ continua prolungante f, cioè tale che la restrizione di $\bar{f}$ a B coincide con f.

Dimostrazione. Le implicazioni $(n_4)\Rightarrow(n_3)\Rightarrow(n)$ sono di facile verifica, che lasciamo al lettore. Per la dimostrazione delle implicazioni $(n)\Rightarrow(n_3)\Rightarrow(n_4)$ rimandiamo il lettore a un qualunque buon testo di Topologia generale. #

Dal Teorema 8.1 segue immediatamente che gli spazi normali di Hausdorff sono completamente regolari.

Uno spazio topologico dicesi a base numerabile se la sua topologia ha una base numerabile.

PROPOSIZIONE 8.3. Ogni spazio topologico a base numerabile è separabile e ogni suo punto ha una base numerabile di intorni.

Dimostrazione. Sia X uno spazio topologico a base numerabile e sia $\mathcal{B}=(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base della topologia di X. Per ogni $n\in\mathbb{N}$ scegliamo un punto $x_n\in B_n$.

L'insieme $\{x_1,x_2,\dots\}$ è denso in X, perché ogni aperto non vuoto di X è unione di elementi di $\mathcal{B}$ e quindi contiene qualche x_n. Dunque X è separabile.

Il fatto che ogni punto di X ha una base numerabile di intorni se X è a base numerabile discende dalla Proposizione 2.1. #

Osservazione. Il fatto che ogni punto di uno spazio topologico X ha una base numerabile di intorni non implica, in generale, che X sia a base numerabile: si pensi, ad esempio, all'insieme $\mathbb{R}$ con la topologia discreta. Si noti anche che uno spazio topologico separabile non è, in generale, a base numerabile: si pensi all'insieme $\mathbb{R}$ con la topologia che ha per base l'insieme degli intervalli $[a,b[$, con $a<b$.

9. SPAZI COMPATTI.

Uno spazio topologico X dicesi **compatto** (o uno spazio compatto e la sua topologia dicesi compatta) se è soddisfatta una delle seguenti proprietà tra loro chiaramente equivalenti:

(a) ogni famiglia di aperti di X la cui unione sia X contiene una famiglia finita la cui unione è ancora X (in altre parole: ogni ricoprimento aperto di X contiene un ricoprimento finito di X);

(b) ogni famiglia di chiusi di X la cui intersezione sia vuota contiene una famiglia finita la cui intersezione è ancora vuota;

(c) ogni famiglia di chiusi di X, tale che ogni sua sottofamiglia finita ha l'intersezione non vuota, ha l'intersezione non vuota.

Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X si dice **compatto** in X (o un compatto di X) se, in quanto sottospazio di X, esso è compatto, cioè se, dotato della topologia indotta, esso è uno spazio compatto.

Un sottoinsieme A di uno spazio topologico X si dice **relativamente compatto** in X se la sua chiusura in X è un compatto di X.

PROPOSIZIONE 9.1. Se X è uno spazio topologico le seguenti proprietà sono tra loro equivalenti:

(i) X è compatto;
(ii) ogni filtro su X ha almeno un punto di aderenza;
(iii) ogni ultrafiltro su X converge;
(iv) ogni rete in X ha almeno un punto di aderenza.

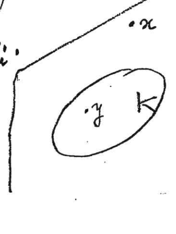
Dimostrazione. (ii) e (iv) sono equivalenti perché ad ogni rete in X resta associato un filtro su X che ha gli stessi limiti e punti di aderenza della rete e viceversa.
(ii) e (iii) sono equivalenti in virtù delle Proposizioni 1.3 e 5.2.
Proviamo che (i) $\Rightarrow$ (ii). Se $\mathcal{F}$ è un filtro su X, per la proprietà (c) si ha $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} \bar{A} \neq \emptyset$ perché ogni intersezione finita di elementi dell'insieme $\{\bar{A} : A \in \mathcal{F}\}$ appartiene a $\mathcal{F}$ e quindi non è vuota; dunque l'insieme dei punti aderenti a $\mathcal{F}$ non è vuoto.
Proviamo che (ii) $\Rightarrow$ (i). Se $\mathcal{C}$ è una famiglia di chiusi di X tale che ogni sua sottofamiglia finita abbia intersezione non vuota, allora l'insieme $\mathcal{B}$ delle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{C}$ è una base per un filtro, $\mathcal{F}$, su X. Per ogni punto x aderente a $\mathcal{F}$ risulta $x \in \bigcap_{B\in\mathcal{B}} B = \bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$, donde $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C \neq \emptyset$; dunque è vera (c), cioè X è compatto. #

PROPOSIZIONE 9.2. I sottoinsiemi chiusi di uno spazio compatto sono compatti in esso.

Dimostrazione. Sia B un sottoinsieme chiuso dello spazio compatto X e sia $\mathcal{F}$ un filtro su B. $\mathcal{F}$ è evidentemente una base per un filtro, $\mathcal{G}$ su X. Il filtro $\mathcal{G}$ ha punti aderenti in X perché X è compatto. Se $x \in X$ è aderente a $\mathcal{G}$, allora $x \in \bar{A}$ $\forall A \in \mathcal{G}$ e in particolare $x \in \bar{B} = B$, essendo $B \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.
Dunque ogni filtro su B ha punti aderenti (in B), cioè B è compatto in X. #

PROPOSIZIONE 9.3. Sia X uno spazio di Hausdorff. Se K è un compatto di X e $x \in X$ con $x \notin K$, esistono un intorno U di x e un intorno V di K tali che $U \cap V = \emptyset$.

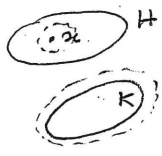
Dimostrazione. Per ogni $y \in K$ esistono un intorno V_y di x e un intorno aperto U_y di y disgiunti. Poiché K è compatto e $K \subseteq \bigcup_{y\in K} U_y$ esiste una parte finita $\{y_1, \dots, y_m\}$ di K tale che $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{y_i}$.
Di conseguenza, posto $U = \bigcup_{i=1}^{m} U_{y_i}$ e $V = \bigcap_{i=1}^{m} V_{y_i}$, U e V hanno le proprietà richieste. #



COROLLARIO. *I sottoinsiemi compatti di uno spazio di Hausdorff sono chiusi in esso.*

PROPOSIZIONE 9.4. *Sia X uno spazio di Hausdorff. Se H e K sono due compatti disgiunti di X esistono un intorno U di H e un intorno V di K tali che $U \cap V = \emptyset$.*

Dimostrazione. Per ogni $x \in H$ esistono - in virtù della Proposizione 9.3 - un intorno aperto U_x di x e un intorno V_x di K disgiunti.



Per la compattezza di H esistono $x_1, \dots, x_m \in H$ tali che $H \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$.
Di conseguenza, posto $U = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i}$, $V = \bigcap_{i=1}^{m} V_{x_i}$, U e V hanno le proprietà richieste. #

COROLLARIO. *Ogni spazio di Hausdorff compatto è normale e quindi completamente regolare.*
Dimostrazione. Il Corollario discende immediatamente dalle Proposizioni 9.2 e 9.4.

TEOREMA 9.1. *Siano X, Y spazi topologici e $f: X \to Y$ continua. Se X è compatto allora $f(X)$ è compatto in Y.*

Dimostrazione. Sia $(B_\iota)_{\iota \in I}$ un ricoprimento aperto del sottospazio $f(X)$ di Y. Poiché $f(X)$ ha la topologia indottavi da quella di Y, per ogni $\iota \in I$ esiste un aperto A_ι di Y tale che $B_\iota = A_\iota \cap f(X)$ [V. n. 4]
Per la continuità di f, la famiglia $(f^{-1}(A_\iota))_{\iota \in I}$ è un ricoprimento aperto di X.
Per la compattezza di X esiste una parte finita J di I tale che $X = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(A_j)$. Allora $f(X) = \bigcup_{j \in J} f(f^{-1}(A_j)) = \bigcup_{j \in J} (A_j \cap f(X)) = \bigcup_{j \in J} B_j$; dunque $(B_j)_{j \in J}$ è un sottoricoprimento finito di $(B_\iota)_{\iota \in I}$. #

COROLLARIO 1. *Se X è compatto e Y è uno spazio di Hausdorff, ogni applicazione $f: X \to Y$ continua è chiusa* (cioè mappa chiusi in chiusi). Di conseguenza *se $f: X \to Y$ è continua e biiettiva anche l'inversa di f è continua.*

Dimostrazione. Se B è chiuso in X, allora B è compatto in X [per la Proposizione 9.2]; di conseguenza $f(B)$ è compatto in Y [per il Teorema 9.1] e quindi è chiuso in Y [per il Corollario della Proposizione 9.3]. #

COROLLARIO 2. *Siano X un insieme, $\mathcal{T}_1$ una topologia compatta su X e $\mathcal{T}_2$ una topologia di Hausdorff su X. Allora $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1 \Rightarrow \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1$.* Di conseguenza le topologie di Hausdorff compatte su X sono minimali nell'insieme delle topologie di Hausdorff su X.

Dimostrazione. Indichiamo con X_1 lo spazio topologico $(X, \mathcal{T}_1)$ e con X_2 lo spazio topologico $(X, \mathcal{T}_2)$.
La condizione $\mathcal{T}_2 \subseteq \mathcal{T}_1$ equivale alla continuità dell'applicazione identica $i: X_1 \to X_2$. Poiché X_1 è compatto, dal Corollario precedente segue allora che anche i^{-1} è continua. Dunque $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$. #

TEOREMA 9.2 (di Tychonoff). *Sia $(X_\iota)_{\iota \in I}$ una famiglia di spazi topologici. Lo spazio prodotto è compatto se e solo se ogni X_ι è compatto.*

Dimostrazione. Se $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ è compatto, tale è ogni X_ι in virtù del Teorema 9.1, attesa la continuità della proiezione p_ι di X su X_ι.
Viceversa sia X_ι compatto $\forall \iota \in I$. Mostriamo che ogni ultrafiltro su X converge, cioè che $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ è compatto [V. Proposizione 9.1]. Sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro su X. Per la Proposizione 1.5 il filtro su X_ι generato da $p_\iota(\mathcal{F})$ è un ultrafiltro e quindi converge in X_ι, perché X_ι è compatto per ipotesi.
Poiché ciò accade per ogni $\iota \in I$, se ne deduce che $\mathcal{F}$ converge in X [V. Corollario della Proposizione 5.5]. #

10. I SOTTOINSIEMI COMPATTI DI $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 10.1 (di Bolzano-Weierstrass). <u>Gli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ sono compatti in $\mathbb{R}$.</u>

Dimostrazione. Sia $[a,b]$ un intervallo (chiuso e limitato) di $\mathbb{R}$. Se $(A_\iota)_{\iota\in I}$ è una famiglia di aperti di $\mathbb{R}$ tale che $[a,b]\subseteq \bigcup_{\iota\in I} A_\iota$, indichiamo con X l'insieme dei punti $x\in[a,b]$ tali che esista una sottofamiglia finita di $(A_\iota)_{\iota\in I}$ la cui unione contiene $[a,x]$ e dimostriamo che $X=[a,b]$.
Posto $x_0=\sup X$, sia A_{ι_0} un elemento della famiglia $(A_\iota)_{\iota\in I}$ che contiene x_0.
Poichè A_{ι_0} è aperto esiste $\varepsilon>0$ tale che $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]\subseteq A_{\iota_0}$ e $[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]\cap X\neq\emptyset$.
Se $x\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]\cap X$, esiste un sottoinsieme finito J di I tale che $\bigcup_{j\in J} A_j\supseteq[a,x]$ e, di conseguenza, $\left(\bigcup_{j\in J}A_j\right)\cup A_{\iota_0}\supseteq[a, x_0+\varepsilon]$, donde $x_0=b$. #

Dicesi <u>topologia usuale di $\mathbb{R}^n$</u> la topologia su $\mathbb{R}^n$ prodotto della topologia usuale di $\mathbb{R}$ [V. n. 2].
Dalla definizione di topologia prodotto segue che una base della topologia usuale di $\mathbb{R}^n$ è l'insieme degli "<u>intervalli aperti</u>" di $\mathbb{R}^n$, cioè dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ del tipo

$$I=\prod_{i=1}^{n}\,]a_i,b_i[\,,\quad \text{ove } a_i,b_i\in\mathbb{R} \text{ e } a_i<b_i.$$

E' facile constatare che una base della topologia usuale di $\mathbb{R}^n$ è anche l'insieme delle "<u>sfere aperte</u>" di $\mathbb{R}^n$ cioè dei sottoinsiemi $S(x,\varepsilon)$, ove $x\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon>0$, definiti da

$$S(x,\varepsilon)=\{y\in\mathbb{R}^n : d(x,y)<\varepsilon\},\ \text{essendo } d(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}\ \forall x=(x_i), y=(y_i)\in\mathbb{R}^n.$$

Si osservi anche, facendo variare a_i e b_i in $\mathbb{Q}$, nel primo caso, e facendo variare x in $\mathbb{Q}^n$ e ε in $\mathbb{Q}^+\setminus\{0\}$, nel secondo caso, si ottengono ancora due basi della topologia usuale di $\mathbb{R}^n$.
Pertanto <u>$\mathbb{R}^n$</u> (con la topologia usuale) <u>è a base numerabile</u> e quindi <u>separabile.</u>

Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. Il <u>diametro</u> di A è il numero reale $d\{A\}$ così definito,

$$d\{A\}=\sup\{d(x,y) : x,y\in A\}.$$

A dicesi <u>limitato</u> se $d\{A\}<+\infty$. Si riconosce facilmente che A è limitato se e solo se è contenuto in qualche intervallo aperto di $\mathbb{R}^n$ o in qualche sfera aperta di $\mathbb{R}^n$.

PROPOSIZIONE 10.1. <u>I sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$ sono limitati.</u>

Dimostrazione. Sia K un compatto di $\mathbb{R}^n$. Poichè $K\subseteq\bigcup_{x\in K}S(x,1)$, esistono $x_1,\dots,x_m\in K$ tali che $K\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}S(x_i,1)$. Segue che $d\{K\}\leq\max_{i,j=1,\dots,m} d(x_i,x_j)+2$. Il lettore lo verifichi ricordando che se $x,y,z\in\mathbb{R}^n$ si ha $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$. #

TEOREMA 10.2. <u>Un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è compatto in $\mathbb{R}^n$ se e solo se esso è chiuso e limitato.</u>

Dimostrazione. Un sottoinsieme compatto di $\mathbb{R}^n$ è chiuso per il Corollario della Proposizione 9.3 e limitato per la Proposizione 10.1!
Viceversa sia K un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ chiuso e limitato. In quanto limitato, K è contenuto in un sottoinsieme I di $\mathbb{R}^n$ del tipo $I=\prod_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$, con $a_i,b_i\in\mathbb{R}$, $a_i<b_i$. Gli intervalli $[a_i,b_i]$ sono compatti in $\mathbb{R}$ per il Teorema 10.1 e quindi I è compatto in $\mathbb{R}^n$ per il Teorema 9.2.
Allora K è un sottoinsieme chiuso del compatto I e quindi è compatto per la Proposizione 9.2. #

COROLLARIO. <u>Se K è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$ e $f: K\to\mathbb{R}$ è continua, allora $f(K)$ è chiuso in $\mathbb{R}$ e quindi f ha massimo e minimo.</u>

Dimostrazione. K chiuso e limitato $\Rightarrow$ K compatto $\Rightarrow$ $f(K)$ compatto $\Rightarrow$ $f(K)$ chiuso.
Inoltre se $f(K)$ è chiuso, esso contiene $\sup f(K)$ e $\inf f(K)$, perchè $\sup f(K), \inf f(K)\in\overline{f(K)}=f(K)$. #

11. SPAZI LOCALMENTE COMPATTI.

Diremo che lo <u>spazio topologico</u> X è <u>localmente compatto</u> (o che X è uno spazio localmente compatto) se X è di Hausdorff e ogni punto di X ha una base di intorni compatti.

Diremo che un <u>sottoinsieme</u> di uno spazio topologico è <u>localmente compatto</u> se esso, dotato della topologia indotta, è uno spazio localmente compatto.

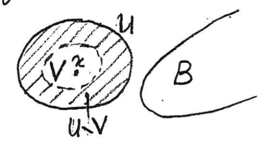
Dal Corollario della Proposizione 9.4 e dalla Proposizione 9.2 segue che <u>ogni spazio di Hausdorff compatto è localmente compatto</u>. Non è vero però il viceversa.

Esempi. Ogni aperto e ogni chiuso di $\mathbb{R}^n$, e quindi $\mathbb{R}^n$ stesso, è localmente compatto [per convincersene basta pensare che una base di intorni di $x_0 \in \mathbb{R}^n$ è l'insieme delle sfere chiuse con centro in x_0, cioè l'insieme dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ del tipo $\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) \leq r\}$, e ricordare il Teorema 10.2].
Il sottoinsieme $\mathbb{Q}$ di $\mathbb{R}$ non è localmente compatto.

Dalla Proposizione 8.1 e dal Corollario della Proposizione 9.3 segue che <u>ogni spazio localmente compatto è regolare</u>; proveremo ora che ogni spazio localmente compatto è addirittura completamente regolare.

PROPOSIZIONE 11.1. <u>Ogni spazio localmente compatto è completamente regolare.</u>

Dimostrazione. Siano X uno spazio localmente compatto, B un chiuso di X e $x \in X$, $x \notin B$.
Poiché $\complement B$ è un intorno aperto di x, esistono un intorno compatto U di x contenuto in $\complement B$ e un intorno aperto V di x contenuto in U.



$U \setminus V = U \cap \complement V$ è un chiuso di X contenuto in U (dunque un chiuso di U) che non contiene x.
Poiché U è compatto e di Hausdorff e quindi completamente regolare [V. Corollario della Proposizione 9.4], esiste $f: U \to [0,1]$ continua tale che $f(x) = 0$ e $f(U \setminus V) = \{1\}$.
Posto $g(x) = f(x)$ $\forall x \in U$ e $g(x) = 1$ $\forall x \in \complement U$, l'applicazione $g: X \to [0,1]$ è continua, vale 0 in x e vale 1 in B. #

PROPOSIZIONE 11.2. <u>Se X è uno spazio localmente compatto, ogni sottoinsieme compatto di X ha una base di intorni compatti.</u>

Dimostrazione. Siano K un compatto di X e U un intorno di K. Dobbiamo provare che U contiene un intorno compatto V di K.
Per ogni $x \in K$, sia V_x un intorno compatto di x contenuto in U. $(\mathring{V}_x)_{x \in K}$ è un ricoprimento aperto del compatto K; pertanto esistono $x_1, \dots, x_m \in K$ tali che $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathring{V}_{x_i}$. Posto $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i}$, si ha $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} \mathring{V}_{x_i} \subseteq V \subseteq U$; inoltre V è compatto perché unione finita di compatti. Dunque V è un intorno compatto di K. #

Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme A di X dicesi <u>σ-compatto</u> se A è unione numerabile di sottoinsiemi compatti di X.

PROPOSIZIONE 11.3. <u>Se X è uno spazio localmente compatto e σ-compatto, esiste una successione $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di compatti di X tale che $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$ e, di conseguenza esiste una successione $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di aperti relativamente compatti di X tale che $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$, $\overline{\Omega}_n \subseteq \Omega_{n+1}$.</u>

Dimostrazione. Sia $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$, ove H_n è un compatto di X.
Siano $K_1 = H_1$, K_2 un intorno compatto di H_1, K_3 un intorno compatto di $K_2 \cup H_3$, K_4 un intorno compatto di $K_3 \cup H_4$ e così via. La successione $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ così definita soddisfa alle condizioni richieste.
Posto $\Omega_n = \mathring{K}_n$, la successione $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soddisfa alle condizioni richieste. #

PROPOSIZIONE 11.4. Se X è uno spazio topologico e $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ con K_n compatto di X e $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$, allora ogni compatto K di X è contenuto in qualche K_n.

Dimostrazione. Basta osservare che $(\mathring{K}_n \cap K)_{n \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto del compatto K. #

PROPOSIZIONE 11.5. Ogni spazio localmente compatto a base numerabile è σ-compatto.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile dello spazio localmente compatto X.
Per ogni $x \in X$ esiste un intorno compatto K_x di x; K_x contiene un intorno di x appartenente a $\mathcal{B}$, il quale, essendo contenuto in K_x è relativamente compatto [per la Proposizione 9.2].
Dunque l'insieme degli elementi di $\mathcal{B}$ che sono relativamente compatti sono una base della topologia di X; ne segue che X è σ-compatto. #

Esempio. Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è uno spazio localmente compatto e a base numerabile e quindi è σ-compatto.

12. DIGRESSIONE SULLA NOZIONE DI ISOMORFISMO. OMEOMORFISMI.

Se due insiemi X, Y sono dotati di una "struttura" (algebrica, o topologica, o algebrico-topologica, o altre(*) che avremo modo di considerare più avanti) dicesi isomorfismo di X in (su) Y [oppure della struttura di X nella (sulla) struttura di Y] ogni iniezione f di X in (su) Y che trasporta la struttura di X sulla struttura indotta su $f(X)$ da quella di Y (sulla struttura di Y).
X e Y diconsi isomorfi se esiste un isomorfismo della struttura di X sulla struttura di Y.
Al § 1 abbiamo considerato isomorfismi di spazi vettoriali.
Nel caso che X e Y siano spazi topologici (cioè insiemi dotati di una struttura topologica), una iniezione f di X in (su) Y è un isomorfismo dello spazio topologico X nello (sullo) spazio topologico Y se e solo se f è continua assieme alla sua inversa; infatti tale condizione è necessaria e sufficiente affinché $f(\mathcal{T}_X) = \mathcal{T}_{f(X)}$, ove $\mathcal{T}_X$ denota la topologia di X e $\mathcal{T}_{f(X)}$ denota la topologia indotta su $f(X)$ da quella di Y.
Gli isomorfismi di spazi topologici vengono comunemente detti omeomorfismi o isomorfismi topologici.
Due spazi topologici si diranno allora omeomorfi, o topologicamente isomorfi, se esiste un omeomorfismo dell'uno sull'altro.

(*) quali, ad esempio, le strutture metriche e le strutture uniformi.