§2. PSEUDOMETRICHE E UNIFORMITÀ. CONTINUITÀ UNIFORME. COMPLETEZZA E COMPLETAMENTI.

1. SPAZI PSEUDOMETRICI E SPAZI METRICI.

Sia X un insieme. Una pseudometrica su X è un'applicazione $d: X\times X \to \mathbb{R}^+ = \{r\in\mathbb{R} : r\geq 0\}$ tale che

$$(1.1)\quad \begin{cases} d(x,x)=0 & \forall x\in X \\ d(x,y)=d(y,x) & \forall x,y\in X \\ d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z) & \forall x,y,z\in X \end{cases}$$

(disuguaglianza triangolare).

Se inoltre

$$d(x,y)=0 \implies x=y\,,$$

allora d dicesi una metrica su X. Il numero $d(x,y)$ dicesi la d-distanza di x da y.

Un insieme X su cui è assegnata una pseudometrica (risp. una metrica) d dicesi uno spazio pseudometrico (risp. uno spazio metrico) e sarà indicato con (X,d).

Siano (X,d_X), (Y,d_Y) due spazi pseudometrici. Un'applicazione $f: X\to Y$ dicesi una isometria di (X,d_X) in (Y,d_Y) se essa conserva le distanze, cioè se $d_Y(f(x),f(y)) = d_X(x,y)$ $\forall x,y\in X$.

Se d_X è una metrica, allora l'isometria f è iniettiva, perché $f(x_1)=f(x_2) \implies d_Y(f(x_1),f(x_2))=0 \implies d_X(x_1,x_2)=0 \implies x_1=x_2$. Evidentemente, gli isomorfismi di uno spazio metrico (X,d_X) in uno spazio metrico (Y,d_Y) [V. §1, n.12] sono proprio le isometrie di (X,d_X) in (Y,d_Y). Due spazi metrici diconsi isometrici se c'è una isometria dell'uno sull'altro.

Ad ogni spazio pseudometrico è canonicamente associato uno spazio metrico nel modo seguente. Se (X,d) è uno spazio pseudometrico, si pone $\bar{X} = X/\varrho_d$, ove ϱ_d è la relazione di equivalenza definita da $x\,\varrho_d\,y \iff d(x,y)=0$. Si verifica subito che $x_1\varrho_d x_2,\ y_1\varrho_d y_2 \implies d(x_1,y_1)=d(x_2,y_2)$; pertanto, detta π la proiezione canonica di X su $\bar{X}$ (che a $x\in X$ associa la classe di equivalenza individuata da x), ha senso porre $\bar{d}(\pi(x),\pi(y)) = d(x,y)$ $\forall x,y\in X$ e $\bar{d}$ è una metrica su $\bar{X}$. Lo spazio metrico $(\bar{X},\bar{d})$ è canonicamente associato allo spazio pseudometrico (X,d) e π è una isometria di (X,d) su $(\bar{X},\bar{d})$.

Sia (X,d) uno spazio pseudometrico. Un sottoinsieme non vuoto A di X dicesi limitato (per la pseudometrica d) se il suo diametro $d\{A\}$ è finito, essendo

$$d\{A\} = \sup\{d(x,y) : x,y\in A\}.$$

Se $x\in X$, dicesi distanza di x da A il numero reale

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) : a\in A\};$$

più in generale, se A e B sono sottoinsiemi non vuoti di X, la distanza di A da B è il numero reale

$$d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a\in A,\ b\in B\}.$$

Dalla disuguaglianza triangolare segue immediatamente

$$(1.2)\quad |d(x,a)-d(y,a)| \leq d(x,y) \qquad \forall x,y,a\in X,$$

donde

$$(1.3)\quad |d(x,A)-d(y,A)| \leq d(x,y).$$

Un'altra conseguenza immediata della disuguaglianza triangolare è la seguente:

$$(1.4)\quad |d(x,y)-d(x_0,y_0)| \leq d(x,x_0)+d(y,y_0) \qquad \forall x,y,x_0,y_0\in X.$$

ESEMPI. Sia X un insieme non vuoto. La pseudometrica $(x,y)\mapsto 0$ dicesi banale e la metrica $(x,y)\mapsto 1$ se $x\neq y$, $(x,x)\mapsto 0$ dicesi discreta. La metrica euclidea su $\mathbb{R}^n$ è così definita:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}\,, \quad \text{ove } x=(x_i)_{i=1,\dots,n} \text{ e } y=(y_i)_{i=1,\dots,n}.$$

2. TOPOLOGIA E UNIFORMITÀ DEFINITE DA UNA PSEUDOMETRICA. SPAZI PSEUDOMETRIZZABILI.

Sia d una pseudometrica sull'insieme X.

Dato $x \in X$ e il numero reale positivo r, diremo d-sfera aperta di centro x e raggio r l'insieme

(2.1) $\quad S_d(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$.

L'insieme delle d-sfere aperte, che si ottengono al variare di x in X e di r in $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, è una base per una topologia, $\mathcal{T}(d)$, su X, che diremo definita dalla pseudometrica d.

Poiché, com'è facile verificare, per ogni $y \in S_d(x,r)$ si ha $S_d(y, r-d(x,y)) \subseteq S_d(x,r)$, dalla Proposizione 2.1 del § 1 segue che una base di intorni di $x \in X$ per la topologia $\mathcal{T}(d)$ è l'insieme delle d-sfere aperte di centro x, oppure l'insieme delle d-sfere chiuse $\{y \in X : d(x,y) \le r\}$ di centro x.

Ne discende, ricordando che $d(x,y) \ge r \iff S(x, r/2) \cap S(y, r/2) = \emptyset$, che la topologia $\mathcal{T}(d)$ è di Hausdorff se e solo se d è una metrica.

Due pseudometriche su X diconsi topologicamente equivalenti se esse definiscono la stessa topologia.

ESEMPI. La metrica euclidea su $\mathbb{R}^n$ è topologicamente equivalente alle metriche seguenti:

$(x,y) \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$, $\quad (x,y) \mapsto \max\{|x_i - y_i| : i=1,\dots,n\}$;

la topologia su $\mathbb{R}^n$ definita da queste metriche è quella usuale.

La metrica euclidea su $\mathbb{R}$ è topologicamente equivalente alla metrica $(x,y) \mapsto |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$.

La topologia banale e quella discreta su un insieme sono definite dalla pseudometrica banale e dalla metrica discreta rispettivamente.

Se d è una pseudometrica sull'insieme X, allora $\dfrac{d}{1+d}$ e $\inf(d,1) : (x,y) \mapsto \inf(d(x,y),1)$ sono due pseudometriche su X topologicamente equivalenti a d.

Una topologia su un insieme X dicesi pseudometrizzabile (risp. metrizzabile) se è definibile da una pseudometrica (risp. metrica) su X. Uno spazio topologico dicesi pseudometrizzabile o metrizzabile se tale è la sua topologia.

Sia d una pseudometrica sull'insieme X.

Per ogni numero reale positivo r poniamo

(2.2) $\quad U_{d,r} = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) \le r\}$, cioè $U_{d,r} = d^{-1}([0,r])$.

L'insieme $\mathcal{B} = \{U_{d,r} : r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}$ è una base per un filtro, $\mathcal{U}(d)$, su $X \times X$, che diremo uniformità su X definita dalla pseudometrica d.

Posto, per ogni $U \in \mathcal{U}(d)$ e per ogni $x \in X$,

(2.3) $\quad U(x) = \{y \in X : (x,y) \in U\}$,

si riconosce immediatamente che l'insieme $\mathcal{I}(x) = \{U(x) : U \in \mathcal{U}(d)\}$ è il filtro degli intorni di x per la topologia $\mathcal{T}(d)$ definita da d.

Due pseudometriche su X diconsi uniformemente equivalenti se esse definiscono la stessa uniformità.

Da quanto s'è appena detto segue che due pseudometriche uniformemente equivalenti sono anche topologicamente equivalenti; non è vero il viceversa, come constateremo negli esempi seguenti.

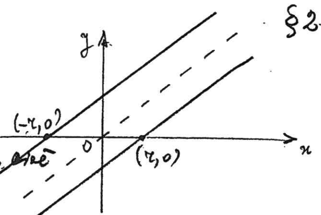
Se d è una pseudometrica su X, le pseudometriche $\frac{d}{1+d}$ e $\inf(d,1)$ sono uniformemente equivalenti a d.

ESEMPI. L'uniformità su $\mathbb{R}$ definita dalla metrica euclidea dicesi l'uniformità usuale su $\mathbb{R}$.

Una base dell'uniformità usuale su $\mathbb{R}$ è dunque l'insieme delle parti di $\mathbb{R}^2$ del tipo

$U_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| \le r\}$, con $r > 0$.

Si osservi che gli elementi di questa base sono "strisce" di $\mathbb{R}^2$ "parallele" alla diagonale, $\Delta(\mathbb{R}^2)$, di $\mathbb{R}^2$, [Vedi figura], e quindi si trasformano in sé (in quanto sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$) per ogni traslazione parallela alla diagonale, cioè
$(x,y)\in U_r \Rightarrow (x+z,\, y+z)\in U_r \quad \forall\, z\in\mathbb{R}$.



Si osservi che ogni elemento dell'uniformità usuale su $\mathbb{R}$ è, ovviamente, un intorno di $\Delta(\mathbb{R}^2)$ per la topologia usuale di $\mathbb{R}^2$, mentre non è vero il viceversa: ad esempio $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x-y| < \frac{1}{1+|y|}\}$ è un intorno di $\Delta(\mathbb{R}^2)$ per la topologia usuale di $\mathbb{R}^2$ ma non è un elemento dell'uniformità usuale su $\mathbb{R}$.

Si riconosce facilmente che l'uniformità usuale su $\mathbb{R}$ contiene strettamente l'uniformità su $\mathbb{R}$ definita dalla metrica $(x,y)\mapsto|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, mentre la topologia definita da questa metrica coincide con quella usuale. Pertanto le metriche su $\mathbb{R}$
$$(x,y)\mapsto|x-y| \quad \text{e} \quad (x,y)\mapsto|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$$
sono topologicamente equivalenti senza essere uniformemente equivalenti.

3. TOPOLOGIA E UNIFORMITÀ DEFINITE DA UNA FAMIGLIA DI PSEUDOMETRICHE. SPAZI UNIFORMI E SPAZI UNIFORMIZZABILI.

Sia $\mathcal{P}$ una famiglia di pseudometriche sull'insieme non vuoto X.

Indicheremo con $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ la topologia su X di cui una prebase è $\{S_d(x,r) : d\in\mathcal{P},\ x\in X,\ r\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}\}$, ove $S_d(x,r)$ è definita da (2.1), e diremo che $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ è la <u>topologia su X definita dalla famiglia $\mathcal{P}$ di pseudometriche</u>.

Si riconosce subito che una prebase di intorni di $x\in X$ per la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ è l'insieme delle d-sfere aperte (oppure l'insieme delle d-sfere chiuse) di centro x con d che descrive $\mathcal{P}$.

Ne segue che <u>la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ è di Hausdorff se e solo se $x\neq y \Rightarrow d(x,y)\neq 0$ per qualche $d\in\mathcal{P}$.</u>

Due <u>famiglie di pseudometriche</u> su X diconsi <u>topologicamente equivalenti</u> se esse definiscono la stessa topologia su X.

Si osservi che se la famiglia $\mathcal{P}$ di pseudometriche su X è filtrante (rispetto alla relazione d'ordine: $d_1\le d_2 \Leftrightarrow d_1(x,y)\le d_2(x,y)\ \forall\, x,y\in X$), allora $\{S_d(x,r) : d\in\mathcal{P},\ x\in X,\ r\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}\}$ è una base di $\mathcal{T}(\mathcal{P})$.

Se $\mathcal{P}$ è una famiglia di pseudometriche su X, allora la famiglia $\mathcal{P}^*$ delle pseudometriche su X ottenuta prendendo l'estremo superiore (rispetto all'ordine suddetto) di tutte le parti finite di $\mathcal{P}$ è filtrante e topologicamente equivalente a $\mathcal{P}$.

Se $\mathcal{P}$ è una famiglia (risp. famiglia filtrante) di pseudometriche sull'insieme X, l'insieme $\{U_{d,r} : d\in\mathcal{P},\ r\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}\}$, ove $U_{d,r}=\{(x,y)\in X\times X : d(x,y)\le r\}$, è una prebase (risp. una base) per un filtro, $\mathcal{U}(\mathcal{P})$, su $X\times X$, che diremo <u>uniformità su X definita dalla famiglia $\mathcal{P}$ di pseudometriche.</u>

Si riconosce subito che $\mathcal{F}(x)=\{U(x) : U\in\mathcal{U}(\mathcal{P})\}$, ove $U(x)=\{y\in X : (x,y)\in U\}$, è il filtro degli intorni di x per la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{P})$ definita da $\mathcal{P}$.

Due <u>famiglie di pseudometriche</u> su X diconsi <u>uniformemente equivalenti</u> se esse definiscono la stessa uniformità su X.

Da quanto s'è appena detto segue che due famiglie di pseudometriche uniformemente equivalenti sono anche topologicamente equivalenti e che, per ogni famiglia $\mathcal{P}$ di pseudometriche su X la famiglia filtrante $\mathcal{P}^*$ di pseudometriche su X, definita sopra, è uniformemente equivalente a $\mathcal{P}$.

Diremo una <u>uniformità</u> (*) (o <u>struttura uniforme</u>) su un insieme X ogni filtro $\mathcal{U}$ su $X \times X$ tale che $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{P})$ per qualche famiglia $\mathcal{P}$ di pseudometriche su X. La coppia $(X, \mathcal{U})$ sarà chiamata uno <u>spazio uniforme</u>.

Per quanto s'è visto in precedenza, <u>all'uniformità $\mathcal{U}$ su X resta associata una topologia, $\mathcal{T}(\mathcal{U})$, per la quale il filtro degli intorni di $x \in X$ è l'insieme $\{U(x) : U \in \mathcal{U}\}$ ove $U(x) = \{y \in X : (x,y) \in U\}$</u>; diremo che <u>$\mathcal{T}(\mathcal{U})$ è la topologia definita dall'uniformità $\mathcal{U}$</u>. Quando servirà, intenderemo implicitamente lo spazio uniforme $(X, \mathcal{U})$ dotato, oltre che dalla struttura uniforme, anche della topologia $\mathcal{T}(\mathcal{U})$.

<u>Una topologia $\mathcal{T}$</u> sull'insieme X dicesi <u>uniformizzabile</u> se essa è definita da qualche uniformità su X, cioè da qualche famiglia di pseudometriche su X; ogni <u>uniformità</u> su X definente $\mathcal{T}$ dicesi <u>compatibile con la topologia $\mathcal{T}$</u>. Uno <u>spazio topologico</u> dicesi <u>uniformizzabile</u> se la sua topologia è uniformizzabile.

PROPOSIZIONE 3.1. <u>Se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio uniformizzabile e $\mathcal{U}$ è una uniformità su X compatibile con $\mathcal{T}$, il filtro $\mathcal{U}$ è contenuto nel filtro degli intorni della diagonale $\Delta(X \times X)$ di $X \times X$.</u>

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}$ è una famiglia di pseudometriche su X definente $\mathcal{U}$. Basta mostrare che, per ogni $d \in \mathcal{P}$ e per ogni $r > 0$, l'insieme $U_{d,r} = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) \leq r\}$ è un intorno di $\Delta(X \times X)$, cioè è un intorno di (x_0, x_0) $\forall x_0 \in X$. A tale scopo basta osservare che l'insieme $S_d(x_0, r/2) = \{x \in X : d(x_0, x) < r/2\}$ è un intorno di x_0 e che $S_d(x_0, r/2) \times S_d(x_0, r/2) \subseteq U_{d,r}$. #

PROPOSIZIONE 3.2. <u>Se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio uniformizzabile compatto e $\mathcal{U}$ è una uniformità su X compatibile con $\mathcal{T}$, il filtro $\mathcal{U}$ coincide con il filtro degli intorni della diagonale $\Delta(X \times X)$ di $X \times X$.</u>
Di conseguenza <u>se una topologia uniformizzabile è compatta c'è una sola uniformità compatibile con essa.</u>

Dimostrazione. Sussistendo la Proposizione 3.1, basta provare che ogni intorno (che possiamo supporre aperto) di $\Delta(X \times X)$ appartiene a $\mathcal{U}$. Sia allora A un intorno aperto di $\Delta(X \times X)$. Posto

$$N = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U ,$$

risulta $N \subseteq A$ perché $(x,y) \in U \Rightarrow y \in U(x)$, donde $(x,y) \in N \Rightarrow y \in U(x)$ $\forall U \in \mathcal{U} \Rightarrow (x,y) \in U(x) \times U(x)$ $\forall U \in \mathcal{U} \Rightarrow (x,y)$ appartiene a ogni intorno di $\Delta(X \times X) \Rightarrow (x,y) \in A$.

Poiché l'insieme $\mathcal{B}$ degli elementi di $\mathcal{U}$ che sono chiusi di $X \times X$ per la topologia prodotto sono (come si constata facilmente) una base di $\mathcal{U}$, si ha $N = \bigcap_{V \in \mathcal{B}} V$.
Dalla compattezza di X e quindi di $X \times X$ e dal fatto che $\bigcap_{V \in \mathcal{B}} V \subseteq A$, segue l'esistenza di una sottofamiglia finita $(V_1, \ldots, V_m)$ di $\mathcal{B}$ tale che $\bigcap_{i=1,\ldots,m} V_i \subseteq A$, perché $\mathcal{B} \cup \{\complement A\}$ è un insieme di chiusi del compatto $X \times X$ con intersezione vuota.
Dunque A, contenendo l'elemento $\bigcap_{i=1,\ldots,m} V_i$ di $\mathcal{U}$, appartiene a $\mathcal{U}$. #

(*) Si può dimostrare che <u>un filtro $\mathcal{U}$ su $X \times X$ è una uniformità su X se e solo se</u>

$$\begin{cases} (U_1) & \text{ogni } U \in \mathcal{U} \text{ contiene la diagonale } \Delta(X \times X) = \{(x,x) : x \in X\} \text{ di } X \times X ; \\ (U_2) & U \in \mathcal{U} \Rightarrow U^{-1} \in \mathcal{U}, \text{ ove } U^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in U\} \text{ (simmetrico di } U) ; \\ (U_3) & \forall U \in \mathcal{U} \ \exists V \in \mathcal{U} \text{ tale che } V \circ V \subseteq U, \text{ ove } V \circ V = \{(x,z) \in X \times X : (x,y) \in V, (y,z) \in V \text{ per qualche } y \in X\} \end{cases}$$

Questa caratterizzazione delle uniformità su X è normalmente assunta come definizione di una uniformità su X. Noi non faremo uso di tale caratterizzazione.

<u>Osservazione</u>. Quando si pensi che definire una relazione binaria in un insieme X equivale ad assegnarne il grafico, cioè un sottoinsieme di $X \times X$, si può interpretare l'assegnazione di una uniformità $\mathcal{U}$ su X come l'assegnazione di un insieme di relazioni binarie in X (che corrispondono agli elementi di $\mathcal{U}$) soddisfacenti alle proprietà tradotte graficamente in (U_1), (U_2), (U_3) e nel fatto che $\mathcal{U}$ è un filtro.
Poiché queste proprietà sono quelle della relazione intuitiva di "vicinanza", potremo dire, con linguaggio figurato, che <u>ogni elemento $U \in \mathcal{U}$ è una relazione di vicinanza</u> in X ed esprimere il fatto <u>$(x,y) \in U$</u> dicendo che "<u>x e y sono vicini di ordine U</u>".
Nel caso dell'uniformità definita da una metrica, e in particolare nel caso dell'uniformità usuale su $\mathbb{R}$ questo linguaggio appare particolarmente appropriato.

4. CARATTERIZZAZIONI DELLE TOPOLOGIE UNIFORMIZZABILI E DI QUELLE PSEUDOMETRIZZABILI.

Il seguente Teorema caratterizza le topologie uniformizzabili su un insieme X come quelle per le quali l'insieme $C^0(X,\mathbb{R})$ delle funzioni reali continue definite in X è abbastanza grande per individuare la topologia.

TEOREMA 4.1. <u>La topologia $\mathcal{T}$ su X è uniformizzabile se e solo se $\mathcal{T}$ coincide con la topologia debole su X rispetto a $C^0(X,\mathbb{R})$.</u>

Dimostrazione. Sia $\mathcal{T}$ uniformizzabile e sia $\mathcal{P}$ una famiglia di pseudometriche su X definente $\mathcal{T}$. Da (1.2) segue che, per ogni $d\in\mathcal{P}$ e per ogni $x\in X$ la funzione $d_x : X\to\mathbb{R}$ definita da

$$d_x(y) = d(x,y)$$

è continua. Poiché, inoltre, ogni topologia su X per la quale d_x è continua contiene necessariamente ogni d-sfera con centro x, si può affermare che $\mathcal{T}$ è la più piccola topologia su X per la quale d_x è continua $\forall x\in X$ e $\forall d\in\mathcal{P}$. Pertanto, a maggior ragione, $\mathcal{T}$ è la più piccola topologia su X tra quelle per le quali $C^0(X,\mathbb{R})$ è l'insieme delle funzioni continue di X in $\mathbb{R}$.

Viceversa, $\mathcal{T}$ coincida con la topologia debole rispetto a $C^0(X,\mathbb{R})$. Allora la topologia $\mathcal{T}$ è definita dalla famiglia $\mathcal{P}=\{d_f : f\in C^0(X,\mathbb{R})\}$ delle pseudometriche d_f su X così definite:

$$d_f(x,y) = |f(x)-f(y)| .$$

Per convincersene basta osservare che

$$S_{d_f}(x,\varepsilon) = \{y\in X : |f(x)-f(y)|<\varepsilon\} = f^{-1}(]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[)$$

e ricordare che $\{S_{d_f}(x,\varepsilon) : f\in C^0(X,\mathbb{R}),\ x\in X,\ \varepsilon\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}\}$ è una prebase della topologia su X definita da $\mathcal{P}$ e che $\{f^{-1}(]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[) : f\in C^0(X,\mathbb{R}),\ x\in X,\ \varepsilon\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}\}$ è una prebase della topologia debole su X rispetto a $C^0(X,\mathbb{R})$. #

TEOREMA 4.2. <u>Uno spazio topologico è uniformizzabile se e solo se è completamente regolare.</u>

Dimostrazione. Lo spazio topologico $(X,\mathcal{T})$ sia uniformizzabile e sia $\mathcal{P}$ una famiglia di pseudometriche su X definente $\mathcal{T}$.

Se B è un chiuso di X e x_0 è un punto di X che non appartiene a B, allora $\complement B$ è un intorno aperto di x_0 e quindi esiste un sottoinsieme finito $\{d_1,\dots,d_m\}$ di $\mathcal{P}$ e un numero reale positivo ε tali che

$$\bigcap_{i=1,\dots,m} S_{d_i}(x_0,\varepsilon) \subseteq \complement B .$$

La funzione $f : X\to\mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = \sup_{i=1,\dots,m} d_i(x_0,x)$ è continua per (1.2) e risulta $f(x_0)=0$ e $f(x)\geq\varepsilon$ $\forall y\in B$. Di conseguenza, posto $g(x) = \frac{1}{\varepsilon}\inf\{f(x),\varepsilon\}$, la funzione $g : X\to[0,1]$ è continua e risulta $g(x_0)=0$ e $g(B)=\{1\}$. Dunque $(X,\mathcal{T})$ è completamente regolare.

Viceversa sia $(X,\mathcal{T})$ uno spazio topologico completamente regolare. Mostriamo che $\mathcal{T}$ è uniformizzabile cioè che $\mathcal{T}$ coincide con la topologia debole su X rispetto a $C^0(X,\mathbb{R})$.

Sia $x_0\in X$ e U un intorno aperto di x_0 per la topologia $\mathcal{T}$. Poiché $(X,\mathcal{T})$ è completamente regolare e $\complement U$ è un chiuso che non contiene x_0, esiste $f : X\to[0,1]$ continua e tale che $f(x_0)=0$ e $f(\complement U)=\{1\}$. Allora $\{x\in X : |f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2}\} = \{x\in X : f(x)<\frac{1}{2}\}\subseteq U$; dunque U è un intorno di x_0 anche per la topologia debole su X rispetto a $C^0(X,\mathbb{R})$, perché $\{x\in X : |f(x)-f(x_0)|<\frac{1}{2}\}$ è un intorno di x_0 per tale topologia. #

COROLLARIO. <u>Ogni spazio localmente compatto, e quindi ogni spazio di Hausdorff compatto, è uniformizzabile.</u>
Infatti, per la Proposizione 11.1 del § 1, ogni spazio localmente compatto è completamente regolare.

OSSERVAZIONE 1. <u>Se $(X,\mathcal{T})$ è uno spazio uniformizzabile e $\mathcal{P}$ è una famiglia di pseudometriche su X definente $\mathcal{T}$, ogni $d\in\mathcal{P}$ è continua.</u>
Infatti, da (1.4) segue $\quad (x,y)\in S_d(x_0,\varepsilon/2)\times S_d(y_0,\varepsilon/2) \Rightarrow |d(x,y)-d(x_0,y_0)|<\varepsilon$.

OSSERVAZIONE 2. Dal Teorema 4.2 segue che <u>ogni spazio topologico omeomorfo a uno spazio topologico uniformizzabile è uniformizzabile</u>. Si noti anche che <u>ogni spazio topologico omeomorfo a uno spazio topologico pseudometrizzabile (risp. metrizzabile) è pseudometrizzabile (risp. metrizzabile)</u>; infatti se $(X,\mathcal{T}_X)$, $(Y,\mathcal{T}_Y)$ sono spazi topologici, f un omeomorfismo di Y su X e $\mathcal{T}_X=\mathcal{T}(d_X)$ con d_X pseudometrica (risp. metrica) su X, allora, posto
$$d_Y(x,y)=d_X(f(x),f(y)) \qquad \forall x,y\in Y,$$
d_Y è una pseudometrica su Y e si ha $\mathcal{T}_Y=\mathcal{T}(d_Y)$, come facilmente si verifica.
Dunque l'essere uno spazio topologico uniformizzabile, oppure pseudometrizzabile, oppure metrizzabile sono proprietà topologiche.

OSSERVAZIONE 3. <u>Ogni spazio uniformizzabile è omeomorfo a un sottospazio del prodotto di una famiglia di spazi pseudometrizzabili</u>. Precisamente, se $\mathcal{P}$ è una famiglia di pseudometriche definente la topologia $\mathcal{T}$ di uno spazio uniformizzabile X, allora X è omeomorfo alla diagonale dello spazio prodotto $\prod_{d\in\mathcal{P}} X_d$, ove X_d è lo spazio pseudometrizzabile $(X,\mathcal{T}(d))$.
Infatti l'"applicazione diagonale" $j: X\to\prod_{d\in\mathcal{P}}X_d$, definita da

(4.1) $\quad j(x)=(j_d(x))_{d\in\mathcal{P}}$, ove j_d è la funzione identica di X su X_d,

è un omeomorfismo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j_d"'] & \prod_{d\in\mathcal{P}} X_d \arrow[d, "p_d"] \\ & X_d \end{tikzcd}$$

Per convincersene si osservi che
a) j è chiaramente iniettiva;
b) j è continua, perché si ha $j_d=p_d\circ j$, ove p_d è la proiezione di $\prod_{d\in\mathcal{P}}X_d$ su X_d, e, $\forall d\in\mathcal{P}$, j_d è ovviamente continua [V. Corollario della Proposizione 4.4 del § 1];
c) $j: X\to j(X)\subseteq\prod_{d\in\mathcal{P}}X_d$ è aperta, perché $j(S_d(x,r))=j(X)\cap p_d^{-1}(S_d(x,r))$ e p_d è continua.

TEOREMA 4.3. <u>Ogni famiglia numerabile di pseudometriche su un insieme X è uniformemente (e quindi anche topologicamente) equivalente ad un'unica pseudometrica.</u>

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}=(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia di pseudometriche su X; non è restrittivo supporre $d_n\le 1$, perché d_n e $\inf(d_n,1)$ sono pseudometriche tra loro uniformemente equivalenti. Per ogni $x,y\in X$ poniamo

(4.2) $$d(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^n}d_n(x,y).$$

La serie che compare in (4.2) converge a un numero ≤ 1, perché $\frac{1}{2^n}d_n(x,y)\le\frac{1}{2^n}$ e $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^n}=1$.
Si verifica subito che d è una pseudometrica su X. Proviamo che l'uniformità $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ definita da $\mathcal{P}$ coincide con l'uniformità $\mathcal{U}(d)$ definita da d.
Una base di $\mathcal{U}(\mathcal{P})$ è $\{U_{m,r}: m\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}\}$, ove $U_{m,r}=\{(x,y)\in X\times X: d_i(x,y)\le r \quad \forall i=1,..,m\}$ e una base di $\mathcal{U}(d)$ è $\{U_{d,\varepsilon}: d\in\mathcal{P}, \varepsilon\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}\}$, ove $U_{d,\varepsilon}=\{(x,y)\in X\times X: d(x,y)\le\varepsilon\}$.
Dati m,r si ha $U_{d,\varepsilon}\subseteq U_{m,r}$ se $\varepsilon=r/2^m$, perché $d(x,y)\le\varepsilon=r/2^m \Rightarrow \frac{1}{2^n}d_n(x,y)\le r/2^m \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow d_n(x,y)\le r\,2^{n-m} \ \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow d_i(x,y)\le r \quad \forall i=1,..,m$ [essendo $2^{i-m}\le 1 \quad \forall i=1,..,m$].
Viceversa, dato $\varepsilon>0$, si ha $U_{m,r}\subseteq U_{d,\varepsilon}$ se m è tale che $\sum_{n\ge m}\frac{1}{2^n}\le\frac{\varepsilon}{2}$ e r è tale che $\sum_{n\ge m}\frac{r}{2^n}\le\frac{\varepsilon}{2}$, perché allora $y\in U_{m,r} \Leftrightarrow \sup_{i=1,..,m} d_i(x,y)\le r \Rightarrow d(x,y)\le\sum_{i\le m}\frac{r}{2^i}+\sum_{n\ge m}\frac{1}{2^n}$. #

Una uniformità su un insieme X dicesi pseudometrizzabile (risp. metrizzabile) se essa è definibile da una pseudometrica (risp. metrica). Uno spazio uniforme dicesi pseudometrizzabile o metrizzabile se tale è la sua uniformità.

Si osservi che una uniformità non metrizzabile può definire una topologia metrizzabile, come risulta dal seguente esempio. La topologia discreta su un insieme X è metrizzabile perchè è definita dalla metrica discreta su X [v. n. 1] e quindi dall'uniformità (detta discreta) definita da tale metrica. [L'uniformità discreta su X è l'insieme di tutte le parti di $X \times X$ che ne contengono la diagonale]. Tuttavia la topologia discreta su X è definita anche dall'uniformità (detta delle partizioni finite) di cui una base è l'insieme delle parti di $X \times X$ del tipo $\bigcup_{i \in I}(A_i \times A_i)$, ove $(A_i)_{i \in I}$ è una partizione finita di X [cioè I è finito, A_i è una parte di X e risulta $X = \bigcup_{i \in I} A_i$] in quanto, per ogni $x \in X$, gli insiemi $\{x\}$ e $\complement\{x\}$ formano una partizione finita di X; ebbene, se X è infinito, l'uniformità delle partizioni finite di X non è metrizzabile, come il lettore può constatare.

Dal Teorema 4.3 segue in maniera ovvia il seguente

COROLLARIO 1. L'uniformità e la topologia definite da una famiglia numerabile di pseudometriche sono pseudometrizzabili.

COROLLARIO 2. Uno spazio uniforme $(X, \mathcal{U})$ è pseudometrizzabile se e solo se $\mathcal{U}$ ha una base numerabile.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}$ una famiglia filtrante di pseudometriche su X definente $\mathcal{U}$. Una base di $\mathcal{U}$ è allora l'insieme delle parti di $X \times X$ del tipo $U_{d,m} = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) \leq 1/m\}$, ove $d \in \mathcal{P}$ e $m \in \mathbb{N}$.

Pertanto se $\mathcal{U}$ è pseudometrizzabile, allora $\mathcal{U}$ ha una base numerabile. Viceversa, se $\mathcal{U}$ ha una base numerabile, esiste una base numerabile di $\mathcal{U}$ i cui elementi sono del tipo $U_{d,m}$ e quindi, se $\mathcal{P}$ non è essa stessa numerabile, basta una sottofamiglia numerabile di $\mathcal{P}$ a definire $\mathcal{U}$, donde la pseudometrizzabilità di $\mathcal{U}$ in virtù del Corollario 1 del Teorema 4.3. #

TEOREMA 4.4. Siano X un insieme, $((Y_\iota, \mathcal{T}_\iota))_{\iota \in I}$ una famiglia di spazi uniformizzabili e, per ogni $\iota \in I$, sia assegnata un'applicazione $f_\iota : X \to Y_\iota$.

Se $\mathcal{P}_\iota$ è una famiglia di pseudometriche su Y_ι definente $\mathcal{T}_\iota$, la topologia debole su X rispetto a $(f_\iota)_{\iota \in I}$ (v. § 1, n. 4) è definita dalla famiglia $\mathcal{P} = \{d \circ f_\iota^{(2)} : d \in \mathcal{P}_\iota,\ \iota \in I\}$ di pseudometriche, essendo $f_\iota^{(2)} = f_\iota \times f_\iota : X \times X \to Y_\iota \times Y_\iota$ l'applicazione prodotto di f_ι per se stessa, definita da

$$f_\iota^{(2)}(x_1, x_2) = (f_\iota(x_1), f_\iota(x_2));$$

pertanto la topologia debole su X rispetto a $(f_\iota)_{\iota \in I}$ è uniformizzabile.

Dimostrazione. Una prebase di intorni di $x \in X$ per la topologia debole su X rispetto a $(f_\iota)_{\iota \in I}$ è l'insieme delle parti di X del tipo $f_\iota^{-1}(S_d(f_\iota(x), r))$, con $x \in X$, $d \in \mathcal{P}_\iota$, r reale positivo e $S_d(f_\iota(x), r) = \{y \in Y_\iota : d(f_\iota(x), y) < r\}$ e questa è anche una prebase di intorni di x per la topologia su X definita da $\mathcal{P}$, perchè, come si riconosce immediatamente,

$$f_\iota^{-1}(S_d(f_\iota(x), r)) = S_{d \circ f_\iota^{(2)}}(x, r). \quad \#$$

In particolare, ricordando anche il Corollario 1 del Teorema 4.3, sussiste il seguente

COROLLARIO. Il prodotto di una famiglia $((X_\iota, \mathcal{T}_\iota))_{\iota \in I}$ di spazi uniformizzabili è uniformizzabile; se $\mathcal{P}_\iota$ è una famiglia di pseudometriche su X_ι definente $\mathcal{T}_\iota$, la topologia prodotto su $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ è definita dalla famiglia $\{d \circ p_\iota^{(2)} : d \in \mathcal{P}_\iota,\ \iota \in I\}$ di pseudometriche, essendo p_ι la proiezione canonica di X su X_ι e $p_\iota^{(2)} = p_\iota \times p_\iota$.

Di conseguenza il prodotto di una famiglia numerabile di spazi topologici pseudometrizzabili è uno spazio topologico pseudometrizzabile.

PROPOSIZIONE 4.1 Uno spazio topologico pseudometrizzabile è a base numerabile se e solo se è separabile.

Dimostrazione. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio pseudometrizzabile e d una pseudometrica su X definente $\mathcal{T}$. Se $(X,\mathcal{T})$ è a base numerabile, esso è separabile: ciò è vero per uno spazio topologico qualsiasi [V. Proposizione 8.3 del § 1].

Viceversa, supponiamo $(X,\mathcal{T})$ separabile e proviamo che, se $\{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$ è denso in X, l'insieme numerabile $\{S_d(x_n, 1/m) : n, m \in \mathbb{N}\}$ è una base di $\mathcal{T}$.

Se $A \in \mathcal{T}$ e $x \in A$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $S_d(x,\varepsilon) \subseteq A$. Allora $S_d(x_n, \frac{1}{m}) \subseteq A$ se $d(x,x_n) < \varepsilon/2$ e $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{2}$, perchè, con tale scelta di n e m, si ha evidentemente $S_d(x_n, 1/m) \subseteq S(x,\varepsilon)$. #

PROPOSIZIONE 4.2. Ogni spazio compatto pseudometrizzabile è separabile (e quindi è a base numerabile).

Dimostrazione. Sia X uno spazio compatto pseudometrizzabile e sia d una pseudometrica che ne definisce la topologia. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste [v. n. 12] una parte finita A_n di X tale che $d(x, A_n) \leq 1/n$ $\forall x \in X$. Pertanto l'insieme numerabile $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ è denso in X. #

PROPOSIZIONE 4.3. Se X è uno spazio localmente compatto le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(a) X è a base numerabile;

(b) X è metrizzabile e separabile;

(c) X è metrizzabile e σ-compatto;

(d) X è metrizzabile ed esiste una successione $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di compatti di X tale che $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ e $K_n \subseteq \overset{\circ}{K}_{n+1}$.

(e) X è metrizzabile ed esiste una successione $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di aperti relativamente compatti di X tale che $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$, $\overline{\Omega}_n \subseteq \Omega_{n+1}$.

Dimostrazione. (a)$\Leftrightarrow$(b) per il Corollario precedente, dato che ogni spazio localmente compatto è uniformizzabile (v. Corollario del Teorema 4.2). (a)$\Rightarrow$(c) per la Prop. 11.5 del § 1. (c)$\Leftrightarrow$(d)$\Leftrightarrow$(e) per la Prop. 11.3 del § 1. Infine (e)$\Rightarrow$(a) come si riconosce senza difficoltà, tenendo presente che (per la Prop. 4.2) ogni $\overline{\Omega}_n$, e quindi ogni Ω_n, è a base numerabile. #

PROPOSIZIONE 4.4. Se $(X,\mathcal{T})$ è uno spazio pseudometrizzabile e A è un sottoinsieme di X, risulta
$$\overline{A} = \{x \in X : d(x,A) = 0\}$$
qualunque sia la pseudometrica d su X definente $\mathcal{T}$.

Dimostrazione. Lasciata al lettore.

COROLLARIO 1. Ogni chiuso di uno spazio pseudometrizzabile è luogo degli zeri di una funzione reale continua.

Questo corollario discende dalla Proposizione 4.4, ricordando che, per (1.3), l'applicazione $x \mapsto d(x,A)$ è continua.

COROLLARIO 2. In uno spazio pseudometrizzabile ogni chiuso è intersezione numerabile di aperti e ogni aperto è unione numerabile di chiusi.

Dimostrazione. Sia $(X,\mathcal{T})$ pseudometrizzabile e d una pseudometrica su X definente $\mathcal{T}$. Se B è un chiuso di X si ha $B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : d(x,B) < 1/n\}$. Passando ai complementari segue che, se A è un aperto di X, si ha $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X : d(x, \complement A) \geq \frac{1}{n}\}$. #

COROLLARIO 3. Se K è un compatto e B è un chiuso di uno spazio pseudometrizzabile $(X,\mathcal{T})$ e d è una (arbitraria) pseudometrica definente $\mathcal{T}$, si ha $d(K,B) = 0 \iff K \cap B \neq \emptyset$.

Questo Corollario segue facilmente dal Corollario 1, ricordando che la funzione reale $x \mapsto d(x,B)$ è continua in X e quindi (per il Corollario del Teorema 10.2 del § 1) ha minimo nel compatto K.

PROPOSIZIONE 4.5. Ogni spazio topologico metrizzabile è normale.

Dimostrazione. Sia $(X,\mathcal{T})$ uno spazio metrizzabile e sia d una pseudometrica su X definente $\mathcal{T}$. Siano B_1 e B_2 due chiusi disgiunti di X. Posto, $\forall x \in X$, $f_1(x) = d(x,B_1)$, $f_2(x) = d(x,B_2)$, allora f_1 e f_2 sono funzioni reali continue in X. Se $f = f_1 - f_2$ risulta $A_1 = f^{-1}(]-\infty, 0[) = \{x \in X : d(x,B_1) < d(x,B_2)\}$ e $A_2 = f^{-1}(]0,+\infty[) = \{x \in X : d(x,B_2) < d(x,B_1)\}$. A_1 e A_2 sono aperti disgiunti e, come si verifica facilmente, risulta $B_1 \subseteq A_1$ e $B_2 \subseteq A_2$. #

5. CONTINUITÀ UNIFORME.

Siano $(X, \mathcal{U}_X)$, $(Y, \mathcal{U}_Y)$ spazi uniformi.

L'applicazione $f: X \to Y$ dicesi uniformemente continua (rispetto alle uniformità $\mathcal{U}_X$ e $\mathcal{U}_Y$) se per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ esiste $V \in \mathcal{U}_X$ tale che
$$(x_1, x_2) \in V \Rightarrow (f(x_1), f(x_2)) \in U,$$
cioè tale che
$$(x_1, x_2) \in V \Rightarrow \overset{(2)}{f}(x_1, x_2) \in U,$$
ove $\overset{(2)}{f} = f \times f : X \times X \to Y \times Y$ è definita da $\overset{(2)}{f}(x_1, x_2) = (f(x_1), f(x_2))$.

Poichè $\overset{(2)}{f}{}^{-1}(U) = \{(x_1, x_2) \in X \times X : (f(x_1), f(x_2)) \in U\}$, $f: X \to Y$ è uniformemente continua se e solo se
$$U \in \mathcal{U}_Y \Rightarrow \overset{(2)}{f}{}^{-1}(U) \in \mathcal{U}_X .$$

Siano $\mathcal{P}_X$ e $\mathcal{P}_Y$ due famiglie di pseudometriche definenti rispettivamente $\mathcal{U}_X$ e $\mathcal{U}_Y$.
E' immediato riconoscere che $f: X \to Y$ è uniformemente continua se e solo se
$$d \in \mathcal{P}_Y, \ \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \Rightarrow (d \circ \overset{(2)}{f})^{-1}([0, \varepsilon]) \in \mathcal{U}_X,$$
o, equivalentemente, se e solo se per ogni $d \in \mathcal{P}_Y$ e ogni $\varepsilon > 0$ esistono una sottofamiglia finita $(d_1, \dots, d_m)$ di $\mathcal{P}_X$ e una m-pla $(r_1, \dots, r_m)$ di numeri reali positivi tali che
$$x_1, x_2 \in X, \ d_i(x_1, x_2) \le r_i \quad \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) \le \varepsilon .$$
Si osservi che, se $\mathcal{P}_X$ è filtrante, allora $f: X \to Y$ è uniformemente continua se e solo se per ogni $d \in \mathcal{P}_Y$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\delta \in \mathcal{P}_X$ e $r > 0$ tali che $x_1, x_2 \in X$, $\delta(x_1, x_2) \le r \Rightarrow d(f(x_1), f(x_2)) \le \varepsilon$.

Si riconosce immediatamente che

PROPOSIZIONE 5.1. Se $(X, \mathcal{U}_X)$, $(Y, \mathcal{U}_Y)$, $(Z, \mathcal{U}_Z)$ sono spazi uniformi e $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ sono uniformemente continue, allora anche $g \circ f: X \to Z$ è uniformemente continua.

PROPOSIZIONE 5.2. Se $(X, \mathcal{U}_X)$, $(Y, \mathcal{U}_Y)$ sono spazi uniformi e $f: X \to Y$ è uniformemente continua, allora f è continua per le topologie su X e Y definite rispettivamente da $\mathcal{U}_X$ e $\mathcal{U}_Y$.

Dimostrazione. Basta osservare che dall'implicazione $(x_1, x_2) \in V \Rightarrow (f(x_1), f(x_2)) \in U$ segue, per ogni $x \in X$, l'implicazione $x_2 \in V(x_1) \Rightarrow f(x_2) \in U(f(x_1))$. #

TEOREMA 5.1. Siano $(X, \mathcal{T}_X)$, $(Y, \mathcal{T}_Y)$ spazi uniformizzabili. Se X è compatto e $f: X \to Y$ continua, allora f è uniformemente continua rispetto all'uniformità su X definente $\mathcal{T}_X$ e a ogni uniformità su Y definente $\mathcal{T}_Y$.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{U}_X$ l'uniformità su X compatibile con $\mathcal{T}_X$ e $\mathcal{U}_Y$ una (arbitraria) uniformità su Y compatibile con $\mathcal{T}_Y$. E' facile riconoscere che dalla continuità di f segue la continuità di $\overset{(2)}{f}$.
Pertanto, in virtù delle Proposizioni 3.1 e 3.2, si ha
$$U \in \mathcal{U}_Y \Rightarrow U \text{ è un intorno di } \Delta(Y \times Y) \Rightarrow \overset{(2)}{f}{}^{-1}(U) \text{ è un intorno di } \Delta(X \times X) \Rightarrow \overset{(2)}{f}{}^{-1}(U) \in \mathcal{U}_X . \quad \#$$

CONVENZIONE. Siano (X, d_X), (Y, d_Y) spazi pseudometrici o metrici. Dicendo che $f: X \to Y$ è uniformemente continua si intende dire che f è uniformemente continua rispetto alle uniformità su X e su Y definite rispettivamente da d_X e da d_Y.

6. UNIFORMITÀ DEBOLI. UNIFORMITÀ INDOTTA. UNIFORMITÀ PRODOTTO.

Siano X un insieme, $(Y, \mathcal{U}_Y)$ uno spazio uniforme e $f: X \to Y$ un'applicazione (di X in Y).
Se $\mathcal{P}_Y$ è una famiglia di pseudometriche su X definente $\mathcal{U}_Y$, sappiamo che una prebase di $\mathcal{U}_Y$ è $\{d^{-1}([0,\varepsilon]) : d \in \mathcal{P}_Y, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}$ e che ogni uniformità su X per la quale f è uniformemente continua contiene necessariamente $\{(d \circ f^{(2)})^{-1}([0,\varepsilon]) : d \in \mathcal{P}_Y, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}$. Questo insieme, come si riconosce facilmente, è una prebase per un filtro su $X \times X$. Allora, essendo $d \circ f^{(2)}$ una pseudometrica su X per ogni $d \in \mathcal{P}_Y$, tale filtro su $X \times X$ è la più piccola uniformità su X per la quale f è uniformemente continua e questa uniformità è definita dalla famiglia $\{d \circ f^{(2)} : d \in \mathcal{P}_Y\}$ di pseudometriche su X.

ESEMPIO. Se X è un sottoinsieme dell'insieme Y e Y è dotato dell'uniformità $\mathcal{U}_Y$, la più piccola uniformità su X per la quale l'applicazione identica $i: X \to Y$ è uniformemente continua dicesi la <u>uniformità indotta</u> da $\mathcal{U}_Y$ su X e X dotato di tale uniformità dicesi un <u>sottospazio (uniforme)</u> di $(Y, \mathcal{U}_Y)$.

Da quanto detto sopra segue che, se $\mathcal{P}_Y$ è una famiglia di pseudometriche su Y definente $\mathcal{U}_Y$, allora l'insieme delle restrizioni a $X \times X$ degli elementi di $\mathcal{P}_Y$ definisce l'uniformità indotta su X da $\mathcal{U}_Y$.

Più in generale, siano X un insieme, $((Y_\iota, \mathcal{U}_\iota))_{\iota \in I}$ una famiglia di spazi uniformi e, per ogni $\iota \in I$, sia assegnata $f_\iota : X \to Y_\iota$.
Se $\mathcal{P}_\iota$ è una famiglia di pseudometriche su Y_ι definenti $\mathcal{U}_\iota$, ogni uniformità su X per la quale ogni f_ι è uniformemente continua contiene necessariamente

$$(6.1) \qquad (d \circ f_\iota^{(2)})^{-1}([0,\varepsilon]) = \{(x_1, x_2) \in X \times X : d(f_\iota(x_1), f_\iota(x_2)) \leq \varepsilon\}$$

per ogni $d \in \mathcal{P}_\iota$, per ogni $\iota \in I$ e per ogni $\varepsilon > 0$.

L'insieme delle parti (6.1) di $X \times X$ che si ottengono al variare di ι in I di d in $\mathcal{P}_\iota$ e di ε in $\mathbb{R}^+ - \{0\}$ è, come si verifica facilmente, una prebase per un filtro su $X \times X$.
Allora, essendo $d \circ f_\iota^{(2)}$ una pseudometrica su X per ogni $d \in \mathcal{P}_\iota$ e per ogni $\iota \in I$, tale filtro su $X \times X$ è la più piccola uniformità su X per la quale ogni f_ι è uniformemente continua e questa uniformità è definita dalla famiglia $\{d \circ f_\iota^{(2)} : d \in \mathcal{P}_\iota, \iota \in I\}$ di pseudometriche su X; diremo che essa è l'<u>uniformità debole</u> su X rispetto alla famiglia $(f_\iota)_{\iota \in I}$.

ESEMPIO. Se $((X_\iota, \mathcal{U}_\iota))_{\iota \in I}$ è una famiglia di spazi uniformi, dicesi <u>uniformità prodotto delle uniformità</u> $\mathcal{U}_\iota$, $\iota \in I$, l'uniformità debole su $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ rispetto alla famiglia $(p_\iota)_{\iota \in I}$ delle proiezioni canoniche $p_\iota : X \to X_\iota$.
L'insieme prodotto $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$, dotato dell'uniformità prodotto delle uniformità $\mathcal{U}_\iota$ dicesi lo <u>spazio (uniforme) prodotto</u> degli spazi uniformi $(X_\iota, \mathcal{U}_\iota)$.

Da quanto detto sopra segue che, <u>se $\mathcal{P}_\iota$ è una famiglia di pseudometriche su X_ι definente $\mathcal{U}_\iota$, allora $\{d \circ p_\iota^{(2)} : d \in \mathcal{P}_\iota, \iota \in I\}$ è una famiglia di pseudometriche su $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ definente la uniformità prodotto delle uniformità $\mathcal{U}_\iota$, $\iota \in I$.</u>

Pertanto dal Teorema 4.3 discende la seguente

PROPOSIZIONE 6.1. <u>Lo spazio (uniforme) prodotto di una famiglia numerabile di spazi uniformi pseudometrizzabili è pseudometrizzabile.</u>

PROPOSIZIONE 6.2. Siano X un insieme, $((Y_\iota, \mathcal{U}_\iota))_{\iota\in I}$ una famiglia di spazi uniformi e, $\forall \iota \in I$, sia assegnata $f_\iota : X \to Y_\iota$.

Se Y_ι ha la topologia definita dall'uniformità $\mathcal{U}_\iota$, la topologia debole su X rispetto a $(f_\iota)_{\iota\in I}$ coincide con la topologia definita dall' uniformità debole su X rispetto a $(f_\iota)_{\iota\in I}$.

Se X ha l'uniformità debole rispetto a $(f_\iota)_{\iota\in I}$ e $(Z, \mathcal{U}_Z)$ è un altro spazio uniforme, una applicazione $g : Z \to X$ è uniformemente continua se e solo se, per ogni $\iota \in I$, $f_\iota \circ g$ è uniformemente continua.

Dimostrazione. Se $\mathcal{P}_\iota$ è una famiglia di pseudometriche su Y_ι definente $\mathcal{U}_\iota$ (e quindi anche la topologia di Y_ι), la uniformità debole su X rispetto a $(f_\iota)_{\iota\in I}$ è definita – come s'è visto – dalla famiglia

$$(6.1) \qquad \{ d\circ f_\iota^{(2)} : d \in \mathcal{P}_\iota,\ \iota \in I \}$$

di pseudometriche su X.

La stessa famiglia di pseudometriche su X definisce anche la topologia debole su X rispetto a $(f_\iota)_{\iota\in I}$ in base al Teorema 4.4, donde la prima parte della Proposizione.

Veniamo ora alla seconda parte della Proposizione.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_\iota\circ g"'] & X \arrow[d, "f_\iota"] \\ & Y_\iota \end{tikzcd}$$

Se g è uniformemente continua, tale è $f_\iota \circ g$ per la Proposizione 5.1.

Viceversa sia $f_\iota\circ g$ uniformemente continua $\forall \iota\in I$. Allora, se $\mathcal{P}_Z$ è una famiglia filtrante di pseudometriche su Z definente $\mathcal{U}_Z$, per ogni $d\in\mathcal{P}_\iota$ e per ogni $\varepsilon>0$ esistono $\delta\in\mathcal{P}_Z$ e $r>0$ tali che

$$z_1, z_2 \in Z,\ \delta(z_1,z_2) \le r \implies d(f_\iota(g(z_1)), f_\iota(g(z_2))) = (d\circ f_\iota^{(2)})(g(z_1), g(z_2)) \le \varepsilon ,$$

donde l'uniforme continuità di g, atteso che $\mathcal{U}_X$ è definita dalla famiglia (6.1) di pseudometriche. #

COROLLARIO 1. Se $((X_\iota, \mathcal{U}_\iota))_{\iota\in I}$ è una famiglia di spazi uniformi, la topologia definita su $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ dalla uniformità prodotto delle uniformità $\mathcal{U}_\iota$ coincide con la topologia prodotto delle topologie definite dalle uniformità $\mathcal{U}_\iota$.

Se $(Z, \mathcal{U}_Z)$ è un altro spazio uniforme, l'applicazione $g : Z \to \prod_{\iota\in I} X_\iota$ è uniformemente continua se e solo se sono uniformemente continue tutte le sue componenti $p_\iota \circ g : Z \to X_\iota$.

COROLLARIO 2. Se $(X, \mathcal{U})$ è uno spazio uniforme e $\mathcal{P}$ è una famiglia di pseudometriche su X definente $\mathcal{U}$, ogni $d\in\mathcal{P}$ è uniformemente continua (pensando $\mathbb{R}$ dotato della uniformità usuale)

Per convincersene basta ricordare (1.4).

7. ISOMORFISMI UNIFORMI.

Gli isomorfismi [V. n.12, §1] di spazi uniformi sono chiamati <u>isomorfismi uniformi</u>.

Se $(X, \mathcal{U}_X)$, $(Y, \mathcal{U}_Y)$ sono spazi uniformi, <u>una iniezione f di X in (su) Y è un isomorfismo uniforme di $(X, \mathcal{U}_X)$ in (su) $(Y, \mathcal{U}_Y)$ se e solo se f è uniformemente continua assieme alla sua inversa</u>; infatti tale condizione è necessaria e sufficiente affinchè $\overset{(2)}{f}(\mathcal{U}_X) = \mathcal{U}_{f(X)}$, ove $\mathcal{U}_{f(X)}$ denota l'uniformità indotta da $\mathcal{U}_Y$ su $f(X)$, come si riconosce immediatamente ricordando la definizione di continuità uniforme e quella di uniformità indotta.

Due spazi uniformi diconsi <u>uniformemente isomorfi</u> se esiste un isomorfismo uniforme dell'uno sull'altro.

OSSERVAZIONE. <u>Ogni spazio uniforme è uniformemente isomorfo a un sottospazio del prodotto di una famiglia di spazi (uniformi) pseudometrizzabili</u>. Precisamente, se $\mathcal{P}$ è una famiglia di pseudometriche definente la uniformità $\mathcal{U}$ dello spazio uniforme $(X, \mathcal{U})$, allora $(X, \mathcal{U})$ è uniformemente isomorfo alla diagonale dello spazio (uniforme) della famiglia $((X, \mathcal{U}(d)))_{d \in \mathcal{P}}$.

Infatti, indicando con X_d lo spazio (uniforme) pseudometrizzabile $(X, \mathcal{U}(d))$, l'applicazione diagonale $j : X \to \prod_{d \in \mathcal{P}} X_d$, definita da (4.1), cioè da $j(x) = (j_d(x))_{d \in \mathcal{P}}$, ove j_d è l'applicazione identica di X su X_d, è un isomorfismo uniforme.

Per convincersene si osservi che l'applicazione (iniettiva) j è uniformemente continua, in virtù del Corollario 1 del Teorema 6.1, perchè si ha $j_d = p_d \circ j$ e j_d è ovviamente uniformemente continua e che $\overset{-1}{j} : j(X) \to X$ è pure uniformemente continua perchè p_d è uniformemente continua e si ha

$$\overset{(2)}{j}(U_{d,r}) = \overset{(2)}{j}(X) \cap \overset{(2)}{p_d}{}^{-1}(U_{d,r}) \quad , \text{ ove } \quad U_{d,r} = \{(x,y) \in X \times X : d(x,y) < r\}.$$

8. COMPLETEZZA.

Sia $(X,\mathcal{U})$ uno spazio uniforme.

Un filtro $\mathcal{F}$ su X dicesi di Cauchy (per l'uniformità $\mathcal{U}$ su X) se per ogni $U\in\mathcal{U}$ esiste $M\in\mathcal{F}$ tale che $M\times M\subseteq U$.

Si osservi che $\mathcal{F}$ è di Cauchy se e solo se per ogni $U\in\mathcal{U}$ esiste $x\in X$ tale che $U(x)\in\mathcal{F}$, ove al solito $U(x)=\{y\in X : (x,y)\in U\}$.

Infatti $M\times M\subseteq U \Rightarrow M\subseteq U(x)$ $\forall x\in M$ e quindi $M\in\mathcal{F}$, $M\times M\subseteq U \Rightarrow U(x)\in\mathcal{F}$ $\forall x\in M$; d'altra parte, se $U\in\mathcal{U}$ e $V\in\mathcal{U}$ è tale che $V\circ V\subseteq U$ (*), si ha $V(x)\times V(x)\subseteq U$ $\forall x\in X$.

Diremo che una rete (e, in particolare, una successione) in X è di Cauchy se tale è il filtro su X ad essa associato [V. § 1, n. 6]; ne segue facilmente che la rete $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in X è di Cauchy se e solo se per ogni $U\in\mathcal{U}$ esiste $\alpha_0\in A$ tale che $\alpha,\beta\in A$, $\alpha\geq\alpha_0$, $\beta\geq\alpha_0 \Rightarrow (x_\alpha,x_\beta)\in U$ e che la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X è di Cauchy se e solo se per ogni $U\in\mathcal{U}$ esiste $n_0\in\mathbb{N}$ tale che $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$, $m\geq n_0 \Rightarrow (x_n,x_m)\in U$.

Espressa in termini di pseudometriche, la proprietà di un filtro (di una rete e di una successione) di essere di Cauchy diventa più intuitiva.

Se, infatti, $\mathcal{P}$ è una (arbitraria) famiglia di pseudometriche definente l'uniformità $\mathcal{U}$ su X, allora il filtro $\mathcal{F}$ su X è di Cauchy se e solo se per ogni $d\in\mathcal{P}$ e ogni $\varepsilon>0$ esiste $M\in\mathcal{F}$ tale che $x,y\in M \Rightarrow d(x,y)\leq\varepsilon$, cioè tale che $d\{M\}\leq\varepsilon$ [ricordiamo che $d\{M\}$ denota il d-diametro di M]; la rete $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in X è di Cauchy se e solo se per ogni $d\in\mathcal{P}$ e ogni $\varepsilon>0$ esiste $\alpha_0\in A$ tale che $\alpha,\beta\in A$, $\alpha\geq\alpha_0$, $\beta\geq\alpha_0 \Rightarrow d(x_\alpha,x_\beta)\leq\varepsilon$; la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X è di Cauchy se e solo se per ogni $d\in\mathcal{P}$ e ogni $\varepsilon>0$ esiste $n_0\in\mathbb{N}$ tale che $n,m\in\mathbb{N}$, $n\geq n_0$, $m\geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x_m)\leq\varepsilon$.

PROPOSIZIONE 8.1. Se $(X,\mathcal{T})$ è uno spazio uniformizzabile, ogni filtro su X (e ogni rete in X) convergente è di Cauchy per ogni uniformità su X compatibile con $\mathcal{T}$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}$ una famiglia di pseudometriche su X definente $\mathcal{T}$. Se il filtro $\mathcal{F}$ su X converge a $x_0\in X$, allora, per ogni $d\in\mathcal{P}$ e ogni $\varepsilon>0$, $\mathcal{F}$ contiene $S_d(x_0,\varepsilon)$. Posto $M=S_d(x_0,\varepsilon/2)$, si ha $M\in\mathcal{F}$ e risulta $d(x,x_0)<\varepsilon/2$ $\forall x\in M$, donde $d(x,y)<\varepsilon$ $\forall x,y\in M$, perchè $d(x,y)\leq d(x,x_0)+d(y,x_0)$. #

Uno spazio uniforme $(X,\mathcal{U})$ dicesi completo (per l'uniformità $\mathcal{U}$ su X) se ogni filtro di Cauchy su X è convergente per la topologia su X definita da $\mathcal{U}$ (o, equivalentemente, se ogni rete di Cauchy in X è convergente).

Un sottoinsieme di uno spazio uniforme dicesi completo se, in quanto sottospazio uniforme, esso è completo (cioè se è completo per l'uniformità indotta).

CONVENZIONE. Sia (X,d) uno spazio pseudometrico. Dicendo che un filtro su X (una rete in X, una successione in X) è di Cauchy intenderemo dire che esso è di Cauchy per l'uniformità $\mathcal{U}(d)$ su X definita da d e dicendo che (X,d) è completo intenderemo dire che esso è completo per l'uniformità $\mathcal{U}(d)$ su X.

(*) Per ogni $U\in\mathcal{U}$ esiste $V\in\mathcal{U}$ tale che $V\circ V\subseteq U$ [V. la nota a piè di pagina al n. 3]. Infatti, dato $U\in\mathcal{U}$ esistono una pseudometrica d su X e un numero positivo r tali che $U_{d,r}=\{(x,y)\in X\times X : d(x,y)<r\}\subseteq U$; posto $V=U_{d,r/2}$ si verifica subito che $V\circ V\subseteq U_{d,r}\subseteq U$.

PROPOSIZIONE 8.2. Se $(X, \mathcal{U}_X)$, $(Y, \mathcal{U}_Y)$ sono spazi uniformi e $f: X \to Y$ è uniformemente continua, il filtro immagine tramite f di ogni filtro di Cauchy su X è un filtro di Cauchy su Y e l'immagine tramite f di ogni rete s di Cauchy in X (cioè la rete $f \circ s$) è una rete di Cauchy in Y.

Dimostrazione. Per l'uniforme continuità di f, dato $U \in \mathcal{U}_Y$, esiste $V \in \mathcal{U}_X$ tale che

$$(x, y) \in V \Rightarrow (f(x), f(y)) \in U;$$

d'altra parte, se il filtro $\mathcal{F}$ su X è di Cauchy, esiste $M \in \mathcal{F}$ tale che $M \times M \subseteq V$. Segue che $x, y \in M \Rightarrow (f(x), f(y)) \in U$, da cui $f(M) \times f(M) \subseteq U$. Dunque il filtro immagine di $\mathcal{F}$ tramite f, cioè il filtro su Y generato da $f(\mathcal{F})$ è di Cauchy.

La parte dell'enunciato riguardante le reti si prova in maniera analoga. #

TEOREMA 8.1. Se $((X_\iota, \mathcal{U}_\iota))_{\iota \in I}$ è una famiglia di spazi uniformi, lo spazio uniforme prodotto $X = \prod_{\iota \in I} X_\iota$ è completo se e solo se ogni $(X_\iota, \mathcal{U}_\iota)$ è completo.

Dimostrazione. Sia $(X_\iota, \mathcal{U}_\iota)$ completo $\forall \iota \in I$ e sia $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ una rete di Cauchy in X. Poiché la proiezione $p_\iota: X \to X_\iota$ è uniformemente continua, in virtù della Proposizione 8.2 la rete $(p_\iota(x_\alpha))_{\alpha \in A}$ è di Cauchy in X_ι e quindi è convergente; se $x_\iota \in X_\iota$ un suo limite la rete $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a $(x_\iota)_{\iota \in I}$ per il Corollario della Proposizione 6.3 del §1 e il Corollario 1 della Prop. 6.2 del §2. Dunque lo spazio uniforme prodotto è completo. Il viceversa è di immediata constatazione. #

PROPOSIZIONE 8.3. Ogni sottoinsieme completo di uno spazio uniforme di Hausdorff è chiuso in esso (per la topologia definita dall'uniformità).

Dimostrazione. Siano $(X, \mathcal{U})$ uno spazio uniforme tale che $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ è di Hausdorff, A un sottoinsieme completo di X e $x \in \overline{A}$. Per la Proposizione 6.4 del §1, esiste una rete $(x_\iota)_{\iota \in I}$ in A che (in quanto rete in X) converge a x. Tale rete, per la Proposizione 8.1, è di Cauchy in A e quindi, per la completezza di A converge a un punto $y \in A$. Poiché X è di Hausdorff, si ha $y = x$; dunque $x \in A$. #

PROPOSIZIONE 8.4. Ogni sottoinsieme chiuso di uno spazio uniforme completo è completo in esso.

Dimostrazione. Siano $(X, \mathcal{U})$ uno spazio uniforme completo e B un sottoinsieme di X chiuso (per la topologia definita da $\mathcal{U}$). Se $(x_\iota)_{\iota \in I}$ è una rete di Cauchy in B (per l'uniformità indotta da $\mathcal{U}$ in B), essa è di Cauchy anche in $(X, \mathcal{U})$ e quindi, essendo $(X, \mathcal{U})$ completo, è convergente in X; se $x \in X$ è un suo limite risulta $x \in \overline{B}$, epperò $x \in B$ perché B è chiuso. #

TEOREMA 8.2. Siano $(X, \mathcal{U}_X)$, $(Y, \mathcal{U}_Y)$ spazi uniformi e A un sottoinsieme di X denso in X (per la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{U}_X)$). Se $(Y, \mathcal{U}_Y)$ è completo e $(\mathcal{T}(\mathcal{U}_Y)$ è$)$ di Hausdorff, allora per ogni applicazione $f: A \to Y$ uniformemente continua esiste una e una sola applicazione $\overline{f}: X \to Y$ uniformemente continua che prolunga f, cioè tale che $\overline{f}(x) = f(x)$ $\forall x \in A$.

Dimostrazione. Siano $\mathcal{P}_X$ e $\mathcal{P}_Y$ due famiglie filtranti di pseudometriche definenti rispettivamente $\mathcal{U}_X$ e $\mathcal{U}_Y$. Fissato $x \in X = \overline{A}$ esiste, per la Proposizione 6.4 del §1, una rete $(x_\iota)_{\iota \in I}$ in A convergente a x e quindi, per la Proposizione 8.1, di Cauchy rispetto a $\mathcal{U}_X$. Allora, in virtù della Proposizione 8.2, la rete $(f(x_\iota))_{\iota \in I}$ in Y è di Cauchy rispetto a $\mathcal{U}_Y$ e quindi, essendo $(Y, \mathcal{U}_Y)$ completo e $\mathcal{T}(\mathcal{U}_Y)$ di Hausdorff, converge a un unico elemento di Y, che indicheremo con $\overline{f}(x)$, dato che (come si verifica senza difficoltà) tale elemento di Y è indipendente dalla particolare scelta della rete $(x_\iota)_{\iota \in I}$ in A convergente a x. Resta così definita un'applicazione $\overline{f}: X \to Y$.

La restrizione di $\bar{f}$ ad A coincide con f perché, se $x \in A$ e $(x_\iota)_{\iota \in I}$ è una rete in A convergente a x per la continuità di f risulta $f(x_\iota) \to f(x)$; pertanto $f(x) = \bar{f}(x)$.
Proviamo che $\bar{f}$ è uniformemente continua, cioè che per ogni $d \in \mathcal{P}_Y$ e ogni $\varepsilon > 0$ esistono $\delta \in \mathcal{P}_X$ e $r > 0$ tali che $x, y \in X$, $\delta(x,y) < r \Rightarrow d(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \le \varepsilon$.
Fissati $d \in \mathcal{P}_Y$ e $\varepsilon > 0$, dall'uniforme continuità di f segue l'esistenza di $\delta \in \mathcal{P}_Y$ e di $r > 0$ tali che

(8.1) $\quad a, b \in A, \ \delta(a,b) \le r \Rightarrow d(f(a), f(b)) \le \varepsilon$.

Siano $x, y \in X$ tali che $\delta(x,y) < r$ e $(x_\iota)_{\iota \in I}$, $(y_d)_{d \in L}$ due reti in A tali che $x_\iota \to x$, $y_\iota \to y$.
Poiché l'insieme prodotto $I \times L$ è filtrante rispetto alla relazione $(\iota_1, d_1) \le (\iota_2, d_2) \Leftrightarrow \iota_1 \le \iota_2$ e $d_1 \le d_2$, l'applicazione $(\iota, d) \to (x_\iota, y_d)$ di $I \times L$ in $X \times X$ è una rete su $X \times X$ la quale converge, ovviamente, a (x,y) perché $x_\iota \to x$ e $y_d \to y$.
Allora, per la continuità di δ, la rete $(\iota, d) \to \delta(x_\iota, y_d)$ in $\mathbb{R}$ converge a $\delta(x,y)$.
Di conseguenza, essendo $\delta(x,y) < r$, esiste $(\iota_0, d_0) \in I \times L$ tale che

(8.2) $\quad \iota \ge \iota_0, \ d \ge d_0 \Rightarrow \delta(x_\iota, y_d) \le r$.

Da (8.1), (8.2), ricordando che $x_\iota, y_d \in A$, segue
$$\iota \ge \iota_0, \ d \ge d_0 \Rightarrow d(f(x_\iota), f(y_d)) \le \varepsilon,$$
donde $d(\bar{f}(x), \bar{f}(y)) \le \varepsilon$, perché d è continua e si ha $f(x_\iota) \to \bar{f}(x)$, $f(y_d) \to \bar{f}(y)$.
Resta solo da osservare che l'unicità di $\bar{f}: X \to Y$ (uniformemente) continua e tale che $\bar{f}(x) = f(x)$ $\forall x \in A$ segue dal corollario 1 della Proposizione 7.1 del § 1. #

PROPOSIZIONE 8.5. Uno spazio pseudometrico (X, d) è completo (per l'uniformità $\mathcal{U}(d)$) se (e solo se) ogni successione di Cauchy in esso è convergente.

Dimostrazione. La Proposizione è una conseguenza del fatto l'uniformità definita da una pseudometrica d ha una base numerabile: una base è $\{U_{d,1/n} : n \in \mathbb{N}\}$, ove $U_{d,1/n} = \{(x,y) : d(x,y) \le 1/n\}$.
Supponiamo, infatti, che ogni successione di Cauchy in (X,d) converga e dimostriamo che allora ogni filtro di Cauchy su X converge.
Se $\mathcal{F}$ è un filtro di Cauchy su X, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $M_n \in \mathcal{F}$ tale che $x, y \in M_n \Rightarrow (x,y) \in U_{d,1/n}$.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ scegliamo $x_n \in M_1 \cap \dots \cap M_n$. La successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in X, per costruzione, e quindi converge; detto x_0 un limite di tale successione, proviamo che $\mathcal{F} \to x_0$. A tale scopo basterà mostrare che, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $M_n \subseteq S_d(x_0, \varepsilon)$, cioè tale che $x \in M_n \Rightarrow d(x, x_0) \le \varepsilon$.
Da $x \in M_n \Rightarrow d(x, x_n) \le 1/n$ e da $d(x, x_0) \le d(x, x_n) + d(x_n, x_0)$ segue che se n è tale che $d(x_n, x_0) \le \varepsilon/2$ e che $1/n \le \varepsilon/2$, si ha $x \in M_n \Rightarrow d(x, x_0) \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. #

TEOREMA 8.3 (di Cauchy). L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, dotato dell'uniformità usuale [v. n.2], è completo.
La dimostrazione di questo fondamentale teorema si ritiene nota al lettore.

COROLLARIO. $\mathbb{R}^n$ (n intero positivo), dotato dell'uniformità definita dalla metrica euclidea, è completo.
Il Corollario segue dal Teorema 8.3, stanti il Teorema 8.1 e il corollario 1 della Proposizione 6.2.

Quando parleremo dello spazio uniforme $\mathbb{R}^n$, intenderemo parlare di $\mathbb{R}^n$ dotato della uniformità definita dalla metrica euclidea.

9. COMPLETAMENTI.

TEOREMA 9.1. (A) Se (X,d) è uno spazio pseudometrico esiste una isometria iniettiva i di (X,d) in uno spazio pseudometrico completo (X^*,d^*) tale che $i(X)$ è denso in X^* con la topologia $\mathcal{T}(d^*)$.

(B) Se $(\hat{X},\hat{d})$ è lo spazio metrico canonicamente associato a (X^*,d^*) e π è l'isometria canonica [V. n. 1] di (X^*,d^*) su $(\hat{X},\hat{d})$, allora $(\hat{X},\hat{d})$ è completo e $j=\pi\circ i$ è una isometria di (X,d) in $(\hat{X},\hat{d})$ tale che $j(X)$ è denso in $\hat{X}$ con la topologia $\mathcal{T}(\hat{d})$.

(C) Se (X,d) è uno spazio metrico, allora l'isometria j è iniettiva e la coppia $(j,(\hat{X},\hat{d}))$ con le proprietà suddette è unica a meno di una isometria (iniettiva), nel senso che, se j_1 è una isometria di (X,d) nello spazio metrico completo $(\hat{X}_1,\hat{d}_1)$ tale che $j_1(X)$ è denso in $\hat{X}_1$ con la topologia $\mathcal{T}(\hat{d}_1)$ e j_2 è una isometria di (X,d) nello spazio metrico completo $(\hat{X}_2,\hat{d}_2)$ tale che $j_2(X)$ è denso in $\hat{X}_2$ con la topologia $\mathcal{T}(\hat{d}_2)$, allora esiste una isometria g di $(\hat{X}_1,\hat{d}_1)$ su $(\hat{X}_2,\hat{d}_2)$ tale che $j_2=g\circ j_1$.

Dimostrazione. (A) Se (X,d) è uno spazio pseudometrico (o metrico), sia X^* l'insieme delle successioni di Cauchy in (X,d) e sia $d^*: X^*\times X^*\to\mathbb{R}$ definita da

$$(9.1)\qquad d^*(x^*,y^*)=\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)\quad,\quad \text{ove } x^*=(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ y^*=(y_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

La definizione (9.1) ha senso, cioè il limite che figura in (9.1) esiste finito, perchè $\mathbb{R}$ è completo e la successione $(d(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$ in quanto le successioni $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono di Cauchy in (X,d) e, per (1.2), risulta

$$|d(x_n,y_n)-d(x_m,y_m)|\le|d(x_n,y_n)-d(y_n,x_m)|+|d(y_n,x_m)-d(x_m,y_m)|\le d(x_n,x_m)+d(y_n,y_m).$$

E' facile verificare che d^* è una pseudometrica su X^*.

Sia $i:X\to X^*$ l'applicazione che ad ogni $x\in X$ associa la successione costante: $n\mapsto x$.

L'applicazione i è ovviamente una isometria iniettiva di (X,d) in (X^*,d^*) e $i(X)$ è denso in X^* con la topologia $\mathcal{T}(d^*)$ perchè, come si riconosce immediatamente, se $x^*=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X^*$, la successione $(i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x^* nella topologia $\mathcal{T}(d^*)$.

Verifichiamo che (X^*,d^*) è completo. Sia $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in (X^*,d^*). Poichè $i(X)$ è denso in X^* con la topologia $\mathcal{T}(d^*)$, per ogni $n\in\mathbb{N}$ esiste $x_n\in X$ tale che

$$(9.2)\qquad d^*(x_n^*,i(x_n))<1/n.$$

La successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in (X,d) e quindi $x^*=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in X^*$; per convincersene si osservi che

$$d(x_n,x_m)=d^*(i(x_n),i(x_m))\le d^*(i(x_n),x_n^*)+d^*(x_n^*,x_m^*)+d^*(x_m^*,i(x_m))$$

e si ricordi (9.2) e il fatto che $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in (X^*,d^*).

La successione di Cauchy $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ in (X^*,d^*) converge proprio a $x^*=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$; per convincersene basta osservare che

$$d^*(x_n^*,x^*)\le d^*(x_n^*,i(x_n))+d^*(i(x_n),x^*)$$

e ricordare che sussiste (9.2) e che, come s'è notato sopra, $i(x_n)\to x^*$. Dunque (X^*,d^*) è completo.

A partire dallo spazio pseudometrico (X,d) abbiamo così costruito lo spazio pseudometrico completo (X^*,d^*) e l'isometria iniettiva i di (X,d) in (X^*,d^*) tali che $i(X)$ è denso in X^* con la topologia $\mathcal{T}(d^*)$.

Si osservi che, tranne casi banali, lo spazio (X^*,d^*) non è metrico, neppure se (X,d) è metrico.

(B) Siano $(\hat{X}, \hat{d})$ lo spazio metrico canonicamente associato allo spazio pseudometrico (X^*, d^*) e π l'isometria canonica (non iniettiva, tranne in casi banali) di (X^*, d^*) su $(\hat{X}, \hat{d})$.
Ovviamente lo spazio metrico $(\hat{X}, \hat{d})$ è completo, $j = \pi \circ i$ è una isometria di (X, d) in $(\hat{X}, \hat{d})$ e $j(X)$ è denso in $\hat{X}$ con la topologia $\mathcal{T}(\hat{d})$.
L'isometria j è iniettiva se e solo se lo spazio (X, d) è metrico [v. n. 1].
In base alla definizione di spazio metrico canonicamente associato a uno spazio pseudometrico [v. n. 1] $\hat{X}$ è il quoziente di X^* rispetto alla relazione di equivalenza ρ_d definita da

$$x^* \rho_d\, y^* \iff \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = 0 \quad , \text{ ove } \quad x^* = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ e } y^* = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

e $\hat{d}$ è definita da

$$\hat{d}(\hat{x}, \hat{y}) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n), \qquad \text{ove } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{x} \text{ e } (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{y},$$

tale limite risultando indipendente dalla scelta di $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\hat{x}$ e di $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\hat{y}$.

(C). Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora, come s'è già osservato, l'isometria j è iniettiva.
Proviamo che, se j_1 è una isometria di (X, d) nello spazio metrico completo $(\hat{X}_1, \hat{d}_1)$ tale che $j_1(X)$ è denso in $(\hat{X}_1, \mathcal{T}(\hat{d}_1))$ e j_2 è una isometria di (X, d) nello spazio metrico completo $(\hat{X}_2, \hat{d}_2)$ tale che $j_2(X)$ è denso in $(\hat{X}_2, \mathcal{T}(\hat{d}_2))$, allora esiste una isometria (iniettiva) g di $(\hat{X}_1, \hat{d}_1)$ su $(\hat{X}_2, \hat{d}_2)$ tale che $j_2 = g \circ j_1$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"'] & \hat{X}_1 \arrow[d, "g"] \\ & \hat{X}_2 \end{tikzcd}$$

Per il Teorema 8.2 l'isometria (uniformemente continua) $j_2 \circ j_1^{-1} : j_1(X) \to \hat{X}_2$ si estende all'applicazione uniformemente continua $g : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ e $j_1 \circ j_2^{-1} : j_2(X) \to \hat{X}_1$ si estende all'applicazione uniformemente continua $h : \hat{X}_2 \to \hat{X}_1$.
g e h sono biiettive e l'una è l'inversa dell'altra, perché $h \circ g$, subordinando l'identità su $j_1(X)$ ed essendo (uniformemente) continua, è l'identità di $\hat{X}_1$ [per il Corollario 1 della Proposizione 7.1 del §1] e, analogamente, $g \circ h$ è identità su $\hat{X}_2$.
Ci resta da provare che $g : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ è una isometria.
Dati $\hat{x}, \hat{y} \in \hat{X}_1$, sia $\lim_{n \to \infty} j_1(x_n) = \hat{x}$, $\lim_{n \to \infty} j_1(y_n) = \hat{y}$, con $x_n, y_n \in X$, donde

$$\lim_{n \to \infty} g(j_1(x_n)) = \lim_{n \to \infty} j_2(x_n) = g(\hat{x}), \qquad \lim_{n \to \infty} g(j_1(y_n)) = \lim_{n \to \infty} j_2(y_n) = g(\hat{y}).$$

Ne segue, tenendo presente che $\hat{d}_1$, $\hat{d}_2$ sono continue e che j_1, j_2 sono isometrie,

$$\hat{d}_2(g(\hat{x}), g(\hat{y})) = \lim_{n \to \infty} \hat{d}_2(j_2(x_n), j_2(y_n)) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \hat{d}_1(j_1(x_n), j_1(y_n)) = \hat{d}_1(\hat{x}, \hat{y}). \qquad \#$$

Se (X, d) è uno spazio pseudometrico (o metrico), ogni coppia $(i, (X^*, d^*))$, con (X^*, d^*) spazio pseudometrico completo e i isometria iniettiva di (X, d) in (X^*, d^*) tale che $i(X)$ è denso in X^* con la topologia $\mathcal{T}(d^*)$, dicesi un <u>completamento di (X, d)</u>.
Dal Teorema 9.1 segue che <u>ogni spazio pseudometrico (X, d) ha completamenti</u> e che, <u>se (X, d) è uno spazio metrico, esiste, unico a meno di una isometria, un completamento $(j, (\hat{X}, \hat{d}))$ di (X, d) con $(\hat{X}, \hat{d})$ spazio metrico.</u>

TEOREMA 9.2. Se $(X,\mathcal{U})$ è uno spazio uniforme esiste un isomorfismo uniforme i di $(X,\mathcal{U})$ in uno spazio uniforme completo $(X^*,\mathcal{U}^*)$ tale che $i(X)$ è denso in X^* con la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{U}^*)$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}$ una famiglia di pseudometriche su X definente $\mathcal{U}$. Per ogni $d \in \mathcal{P}$ sia X_d lo spazio pseudometrico (X,d) e sia $(i_d,(X_d^*,d^*))$ un completamento di X_d.

Definiamo $i : X \longrightarrow \prod_{d\in\mathcal{P}} X_d^*$, ponendo $i(x) = (i_d(x))_{d\in\mathcal{P}}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i_d"'] & \prod_{d\in\mathcal{P}} X_d^* \arrow[d, "p_d"] \\ & X_d^* \end{tikzcd}$$

$\prod_{d\in\mathcal{P}} X_d^*$, con l'uniformità prodotto, è uno spazio uniforme completo, perchè prodotto di spazi uniformi completi.

L'applicazione i è iniettiva, perchè ogni i_d è iniettiva. Inoltre i è uniformemente continua in virtù del Corollario 1 del Teorema 6.1, perchè si ha $i_d = p_d \circ i$, ove p_d è proiezione di X^* su X_d^*, e i_d è chiaramente uniformemente continua.

$i^{-1} : i(X) \to X$ è uniformemente continua perchè, dati arbitrariamente $d \in \mathcal{P}$ e $\varepsilon > 0$ esiste, per l'uniforme continuità di p_d, un elemento V dell'uniformità di $\prod_{d\in\mathcal{P}} X_d^*$ tale che $i(x), i(y) \in V \Rightarrow d^*(p_d(i(x)), p_d(i(y))) = d(x,y) < \varepsilon$. Dunque i è un isomorfismo uniforme di $(X,\mathcal{U})$ nello spazio uniforme prodotto $\prod_{d\in\mathcal{P}} X_d^*$. Pertanto, dette X^* la chiusura di $i(X)$ in $\prod_{d\in\mathcal{P}} X_d^*$ e $\mathcal{U}^*$ l'uniformità indotta su X^* da quella di $\prod_{d\in\mathcal{P}} X_d^*$, in base alla Prop. 8.4 lo spazio uniforme $(X^*,\mathcal{U}^*)$ è completo e $i(X)$ è denso in esso. #

Se $(X,\mathcal{U})$ è uno spazio uniforme, ogni coppia $(i,(X^*,\mathcal{U}^*))$, ove $(X^*,\mathcal{U}^*)$ è uno spazio uniforme completo e i è un isomorfismo uniforme di $(X,\mathcal{U})$ in $(X^*,\mathcal{U}^*)$ tale che $i(X)$ è denso in X^* con la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{U}^*)$ dicesi un Completamento dello spazio uniforme $(X,\mathcal{U})$.

Un completamento $(i,(X^*,\mathcal{U}^*))$ dicesi di Hausdorff se la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{U}^*)$ definita da $\mathcal{U}^*$ su X^* è di Hausdorff.

Il Teorema 9.2 afferma che ogni spazio uniforme ammette completamenti.

TEOREMA 9.3. Uno spazio uniforme di Hausdorff $(X,\mathcal{U})$ ha un completamento di Hausdorff, che è unico a meno di un isomorfismo uniforme, nel senso che, se $(j_1,(\hat{X}_1,\hat{\mathcal{U}}_1))$, $(j_2,(\hat{X}_2,\hat{\mathcal{U}}_2))$ sono completamenti di Hausdorff di $(X,\mathcal{U})$, esiste un isomorfismo uniforme g di $(\hat{X}_1,\hat{\mathcal{U}}_1)$ su $(\hat{X}_2,\hat{\mathcal{U}}_2)$ tale che $j_2 = g \circ j_1$.

Dimostrazione. Esistenza. Consideriamo una famiglia $\mathcal{P}$ di pseudometriche su X definente $\mathcal{U}$. Sia $(i_d,(X_d^*,d^*))$ un completamento dello spazio pseudometrico $X_d = (X,d)$. Siano $(\hat{X}_d,\hat{d})$ lo spazio metrico canonicamente associato a (X_d^*,d^*), π_d l'isometria canonica di (X_d^*,d^*) su $(\hat{X}_d,\hat{d})$ e $j_d = \pi_d \circ i_d$.

Sia $j : X \to \prod_{d\in\mathcal{P}} \hat{X}_d$ la funzione definita da $j(x) = (j_d(x))_{d\in\mathcal{P}}$ e sia $\hat{X}$ la chiusura di $j(X)$ nello spazio prodotto $\prod_{d\in\mathcal{P}} \hat{X}_d$. La coppia $(j,\hat{X})$ è un completamento di Hausdorff dello spazio uniforme di Hausdorff $(X,\mathcal{U})$. Per convincersene basta ripercorrere la dimostrazione del Teorema 9.2 e osservare che lo spazio uniforme $\hat{X}$ è di Hausdorff e che j è iniettiva perchè $\mathcal{T}(\mathcal{U}) = \mathcal{T}(\mathcal{P})$ è di Hausdorff e quindi [V, n. 3] se $x,y \in X$ con $x \neq y$ esiste qualche $d \in \mathcal{P}$ tale che $d(x,y) \neq 0$, donde $j_d(x) \neq j_d(y)$ perchè j_d è una isometria, donde infine $j(x) \neq j(y)$.

Unicità. Siano $(j_1,(\hat{X}_1,\hat{d}_1))$, $(j_2,(\hat{X}_2,\hat{d}_2))$ due completamenti di Hausdorff di $(X,\mathcal{U})$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j_1"] \arrow[dr, "j_2"'] & \hat{X}_1 \arrow[d, "g"] \\ & \hat{X}_2 \end{tikzcd}$$

Per il Teorema 8.2 l'applicazione uniformemente continua $j_2 \circ j_1^{-1} : j_1(X) \to \hat{X}_2$ si estende a $g : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$ e l'applicazione uniformemente continua $j_1 \circ j_2^{-1} : j_2(X) \to \hat{X}_1$ si estende a $h : \hat{X}_2 \to \hat{X}_1$. Le applicazioni uniformemente continue g e h sono biiezioni (e l'una è l'inversa dell'altra) perchè $h \circ g$ è l'identità di $j_1(X)$ e quindi è l'identità di $\hat{X}_1$ e, analogamente, $g \circ h$ è l'identità di $\hat{X}_2$. #

ESEMPIO. Consideriamo sull'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali la metrica euclidea, che indicheremo con e, e la metrica d definita da $d(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$.
Sappiamo che e e d, pur essendo topologicamente equivalenti, non sono uniformemente equivalenti [V. n.2]. Una conferma di ciò si ha dalle considerazioni seguenti.
Mentre $(\mathbb{R}, e)$ è uno spazio metrico completo [V. Teorema 8.3], lo spazio metrico $(\mathbb{R}, d)$ non è completo perchè la funzione $\mathbb{R} \ni x \mapsto \operatorname{arctg} x$ è una isometria di $(\mathbb{R}, d)$ sullo spazio metrico $(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, e)$ e quest'ultimo non è completo, perchè la successione $(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in esso ma non converge in esso.
Poichè lo spazio metrico $([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], e)$ è completo [per la Proposizione 8.4] e $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ è denso in esso, la coppia $(\operatorname{arctg}, ([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], e))$ è un completamento di $(\mathbb{R}, d)$.

Sia $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
Se $g(x) = \operatorname{arctg} x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, $g(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$, $g(+\infty) = \frac{\pi}{2}$, allora $\bar{d}: \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^+$ definita da $\bar{d}(x,y) = |g(x) - g(y)|$ è una metrica su $\overline{\mathbb{R}}$ e g è una isometria di $(\overline{\mathbb{R}}, \bar{d})$ su $([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], e)$; pertanto, detta i l'identità di $\mathbb{R}$, la coppia $(i, (\overline{\mathbb{R}}, \bar{d}))$ è un altro completamento di $(\mathbb{R}, d)$.
La restrizione di $\bar{d}$ a $\mathbb{R}$ è ovviamente d.

10. CONTRAZIONI DI UNO SPAZIO METRICO.

Sia (X,d) uno spazio metrico. Un'applicazione $f: X \to X$ dicesi una contrazione se esiste $k \in \mathbb{R}$, $0 \le k < 1$, tale che

$$d(f(x), f(y)) \le k\, d(x,y) \qquad \forall x,y \in X.$$

TEOREMA 10.1 (del punto unito). Se (X,d) è uno spazio metrico completo e $f: X \to X$ una contrazione, esiste uno e un solo punto $x \in X$ tale che $f(x) = x$. Tale punto dicesi un punto unito di f.

Dimostrazione. Unicità. Se x, y sono punti uniti di f risulta $d(x,y) = d(f(x), f(y)) \le k\, d(x,y)$, donde (essendo $0 \le k < 1$) $d(x,y) = 0$, che implica $x = y$.
Esistenza. Scegliamo arbitrariamente $x_0 \in X$ e definiamo per induzione la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ponendo $x_1 = f(x_0)$, $x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Verifichiamo che tale successione è di Cauchy in (X,d).
Posto $d(x_1, x_0) = a$, si ha $d(x_{n+1}, x_n) \le a k^n \quad \forall n \ge 1$; per convincersene basta ragionare per induzione e osservare che $d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1})) \le k\, d(x_n, x_{n-1})$.
Di conseguenza, per ogni $n, p \in \mathbb{N}$, si ha

$$d(x_{n+p}, x_n) \le \sum_{i=0}^{p-1} d(x_{n+i}, x_{n+i+1}) \le \sum_{i=0}^{p-1} a k^{n+i} = a k^n \frac{1-k^p}{1-k} \le \frac{a k^n}{1-k}.$$

Dunque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in (X,d) perchè $\lim_{n\to\infty} \frac{ak^n}{1-k} = 0$. Se $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, si ha, tenendo presente che (a causa di (10.1)) f è continua, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x$. #

11. TEOREMA DI BAIRE.

TEOREMA 11.1 (di Baire) Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Se esso è localmente compatto, oppure se esso è pseudometrizzabile e completo rispetto a qualche uniformità pseudometrizzabile compatibile con $\mathcal{T}$, allora l'intersezione di ogni famiglia numerabile di aperti di X densi in X è densa in X.

Dimostrazione. Sia $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di aperti di X densi in X e proviamo che $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n$ è denso in X, cioè che, qualunque sia l'aperto $A\neq\emptyset$ di X, si ha $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n)\cap A\neq\emptyset$.

Fissato arbitrariamente l'aperto non vuoto A di X, risulta $\Omega_1\cap A\neq\emptyset$, perchè Ω_1 è denso in X; poichè, inoltre, per le ipotesi fatte su X, ogni punto di X ha una base intorni chiusi, esiste un aperto non vuoto A_1 di X tale che $\bar{A}_1\subseteq\Omega_1\cap A$.

Per gli stessi motivi esiste un aperto non vuoto A_2 di X tale che $\bar{A}_2\subseteq\Omega_2\cap A_1$, e così via. Induttivamente si definisce, allora, una successione $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di aperti non vuoti di X tali che

(11.1) $\bar{A}_1\subseteq\Omega_1\cap A, \qquad \bar{A}_n\subseteq\Omega_n\cap A_{n-1}, \ (n>1).$

Se $(X,\mathcal{T})$ è localmente compatto possiamo scegliere A_1 tale che $\bar{A}_1$ sia compatto; allora $(\bar{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione (decrescente) di sottoinsiemi chiusi non vuoti del compatto $\bar{A}_1$ tale che ogni sua sottofamiglia finita ha intersezione non vuota e quindi

(11.2) $$B=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bar{A}_n\neq\emptyset$$

Se $(X,\mathcal{T})$ è pseudometrizzabile ed esiste una pseudometrica d su X definente $\mathcal{T}$ tale che (X,d) sia completo si arriva alla stessa conclusione pur di prendere (ciò è ovviamente possibile) come A_n una d-sfera di raggio $< 1/n$, perchè allora la successione dei centri di tali sfere è di Cauchy in (X,d) e quindi, per la completezza di (X,d), converge e ogni suo limite necessariamente appartiene a ogni $\bar{A}_n$ epperò a B.

Da (11.1) segue $\Omega_n\cap A\supseteq B \quad \forall n\in\mathbb{N}$ e, di conseguenza (11.2) implica $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n)\cap A\neq\emptyset$, perchè $(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\Omega_n)\cap A=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(\Omega_n\cap A)\supseteq B$. #

OSSERVAZIONE. Sia X uno spazio topologico. Le seguenti proprietà sono equivalenti:

(a) l'intersezione di ogni famiglia numerabile di aperti di X densi in X è densa in X;

(b) l'unione di ogni famiglia numerabile di chiusi di X con l'interno vuoto ha l'interno vuoto.

Per convincersene basta passare a complementari e tenere presente che (come si deduce immediatamente dal fatto che, se A è un sottoinsieme di X, si ha $\complement\mathring{A}=\overline{\complement A}$) un aperto di X è denso in X se e solo se il suo complementare è un chiuso di X con l'interno vuoto. #

Un sottoinsieme di uno spazio topologico X dicesi di prima categoria (o magro) in X se è unione numerabile di parti di X la cui chiusura ha l'interno vuoto; esso dicesi di seconda categoria in X se non è di prima categoria.

Ad esempio: $\mathbb{Q}$ è di prima categoria in $\mathbb{R}$, mentre il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito dai numeri irrazionali è di seconda categoria in $\mathbb{R}$.

Dal Teorema 11.1 e dall'osservazione seguente segue subito il seguente

COROLLARIO. Nelle ipotesi del Teorema di Baire, lo spazio topologico $(X,\mathcal{T})$ è di seconda categoria in sé.

12. LA COMPATTEZZA NEGLI SPAZI UNIFORMIZZABILI E IN QUELLI PSEUDOMETRIZZABILI.

Ricordiamo [V. Proposizione 3.2] che, se una topologia uniformizzabile $\mathcal{T}$ su X è compatta, c'è un'unica uniformità $\mathcal{U}$ su X compatibile con essa.

Poiché, per ogni $x \in X$ e ogni $U \in \mathcal{U}$, l'insieme $U(x)$ definito da $U(x)=\{y \in X : (x,y) \in U\}$ è un intorno di x per $\mathcal{T}$, se $\mathcal{T}$ è compatta per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste una parte finita $\{x_1,\dots,x_m\}$ di X tale che $X=\bigcup_{i=1}^m U(x_i)$, cioè X è unione finita di suoi sottoinsiemi "piccoli" quanto si vuole (cioè "piccoli di ordine U" qualunque sia $U \in \mathcal{U}$).

Queste considerazioni conducono alla definizione di spazio uniforme totalmente limitato.

Uno spazio uniforme $(X,\mathcal{U})$ dicesi <u>totalmente limitato</u> se per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste una parte finita $\{x_1,\dots,x_m\}$ di X tale che $X=\bigcup_{i=1}^m U(x_i)$, o, equivalentemente, se per ogni $U \in \mathcal{U}$ X è unione finita di insiemi B tali che $B \times B \subseteq U$.

In termini di pseudometriche la proprietà di uno spazio uniforme di essere totalmente limitato è ancora più intuitiva. Infatti si riconosce subito che, se $\mathcal{P}$ è una famiglia di pseudometriche su X definente $\mathcal{U}$, lo spazio uniforme $(X,\mathcal{U})$ è totalmente limitato se e solo se, per ogni $d \in \mathcal{P}$ e ogni $\varepsilon>0$, X è unione finita di d-sfere di raggio $\le \varepsilon$.

PROPOSIZIONE 12.1. <u>Uno spazio uniforme è totalmente limitato se e solo se ogni ultrafiltro su esso è di Cauchy</u> (cioè se e solo se ogni filtro su esso è contenuto in un filtro di Cauchy su esso, cioè se e solo se ogni rete in esso ha una sottorete di Cauchy in esso).

Dimostrazione. Sia $(X,\mathcal{U})$ totalmente limitato e sia $\mathcal{F}$ un ultrafiltro su X.
$\mathcal{F}$ è di Cauchy in $(X,\mathcal{U})$, perché per ogni $U \in \mathcal{U}$ esistono $x_1,\dots,x_m \in X$ tali che $X=\bigcup_{i=1}^m U(x_i)$ e quindi $\mathcal{F}$ contiene almeno uno degli $U(x_i)$; infatti, se nessuno degli $U(x_i)$ fosse un elemento di $\mathcal{F}$, sarebbe $\complement U(x_i) \in \mathcal{F}$ $\forall i$ [per la Proposizione 1.4 del §1] e quindi si avrebbe

$$\emptyset=\complement X=\complement\Big(\bigcup_{i=1}^m U(x_i)\Big)=\bigcap_{i=1}^m \Big(\complement U(x_i)\Big) \in \mathcal{F}$$

che è assurdo perché $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Viceversa, supponiamo che ogni ultrafiltro su X sia di Cauchy in $(X,\mathcal{U})$, cioè che ogni rete in X abbia una sottorete di Cauchy in $(X,\mathcal{U})$ e proviamo che $(X,\mathcal{U})$ è totalmente limitato.
Sia, per assurdo, $(X,\mathcal{U})$ non totalmente limitato; allora esiste $U \in \mathcal{U}$ tale che, qualunque sia la parte finita $\{x_i : i \in I\}$ di X, si ha $X \neq \bigcup_{i \in I} U(x_i)$.
Prefissato (arbitrariamente) $x_0 \in X$, sia $x_1 \in X$ tale che $x_1 \notin U(x_0)$; sia $x_2 \in X$ tale che $x_2 \notin U(x_1)$, ecc.; si definisce così una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X tale che $x_n \notin U(x_i)$ se $i<n$, cioè tale che $(x_n,x_i) \notin U$ se $i<n$. Evidentemente tale successione non ha alcuna sottorete di Cauchy in $(X,\mathcal{U})$, contro l'ipotesi. #

TEOREMA 12.1. <u>Uno spazio uniforme è compatto se e solo se è totalmente limitato e completo.</u>

Dimostrazione. Sia $(X,\mathcal{U})$ compatto. Esso è totalmente limitato come s'è osservato sopra; del resto che $(X,\mathcal{U})$ sia totalmente limitato si deduce anche dalla Proposizione 12.1, ricordando [V. Proposizione 9.1 del §1] che se $(X,\mathcal{U})$ è compatto ogni ultrafiltro su X converge (per $\mathcal{T}(\mathcal{U})$) e quindi è di Cauchy (per $\mathcal{U}$).
$(X,\mathcal{U})$ è completo perché, se $\mathcal{F}$ è un filtro di Cauchy in esso e x_0 è un punto aderente a $\mathcal{F}$ [esistente perché $(X,\mathcal{U})$ è compatto] allora $\mathcal{F} \to x_0$; proviamo infatti che $\mathcal{F}$ contiene $\{\overline{U}(x_0) : U \in \mathcal{U}\}$ che è una base di intorni di x_0 per $\mathcal{T}(\mathcal{U})$. Poiché $\mathcal{F}$ è di Cauchy in $(X,\mathcal{U})$, per ogni $U \in \mathcal{U}$ esiste $M \in \mathcal{F}$ tale che $M \times M \subseteq U$; ciò implica $\overline{M} \times \overline{M} \subseteq \overline{U}$, da cui segue $\overline{M} \subseteq \overline{U}(x)$ $\forall x \in \overline{M}$ e, in particolare, $\overline{M} \subseteq \overline{U}(x_0)$ dato che $x_0 \in \overline{M}$; dunque $\overline{U}(x_0)$, contenendo l'elemento $\overline{M}$ di $\mathcal{F}$, è un elemento di $\mathcal{F}$.

Viceversa, supponiamo $(X,\mathcal{U})$ totalmente limitato e completo e dimostriamo che $(X,\mathcal{T}(\mathcal{U}))$ è compatto, cioè che ogni ultrafiltro $\mathcal{F}$ su X converge per la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{U})$.

Per la Proposizione 12.1, $\mathcal{F}$ è un filtro di Cauchy in $(X,\mathcal{U})$ e quindi converge per la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{U})$ perchè $(X,\mathcal{U})$ è completo. #

TEOREMA 12.2. Uno spazio pseudometrizzabile è compatto se (e solo se) ogni successione in esso ha almeno un punto di aderenza, cioè [v. Prop. 6.1 del §1] se (e solo se) ogni successione in esso ha qualche sottosuccessione convergente.

Dimostrazione. Sia $(X,\mathcal{T})$ uno spazio pseudometrizzabile e sia d una pseudometrica su X che ne definisce la topologia $\mathcal{T}$. Supponiamo che ogni successione in $(X,\mathcal{T})$ abbia qualche punto aderente e dimostriamo che $(X,\mathcal{T})$ è compatto. Per il Teorema 12.1, dobbiamo dimostrare che $(X,\mathcal{U}(d))$ è totalmente limitato e completo.

$(X,\mathcal{U}(d))$ è completo perchè ogni successione di Cauchy in esso, avendo un punto aderente, è convergente [V. la dimostrazione del Teorema 12.1].

$(X,\mathcal{U}(d))$ è totalmente limitato. Se non lo fosse esisterebbero $r>0$ e una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X tali che $(x_n,x_m)\notin U_{d,r}$ se $m<n$, cioè tali che $d(x_n,x_m)>r$ $\forall m\geq n$ [V. la dimostrazione della Proposizione 12.1]; ma una tale successione non avrebbe alcun punto aderente, perchè nessuna sua sottosuccessione è di Cauchy e tanto meno convergente. #

13. CONSIDERAZIONI SUGLI SPAZI PSEDOMETRIZZABILI.

La convergenza in uno spazio topologico è descritta dai filtri o dalle reti.

Nel caso che lo spazio topologico sia pseudometrizzabile bastano le successioni a descrivere la convergenza: ciò perchè ogni punto ha una base numerabile di intorni.

Una conseguenza immediata di questo fatto è la seguente: se A è un sottoinsieme di uno spazio topologico X pseudometrizzabile, allora $x\in\bar{A}$ se e solo se esiste qualche successione in A convergente a x.

(Ricordiamo [Proposizione 6.4 del §1] che se X è uno spazio topologico (generale), allora $x\in\bar{A}$ se e solo se esiste qualche rete in A convergente a x).

Altre conseguenze sono la Proposizione 4.2, i Corollari 1 e 2 della Proposizione 4.4, il Teorema 12.2.

E' opportuno mettere in evidenza anche la seguente conseguenza del fatto che ogni punto di uno spazio topologico pseudometrizzabile ha una base di intorni numerabile.

PROPOSIZIONE 13.1. Siano X, Y spazi topologici e f un'applicazione di X in Y. Se X è pseudometrizzabile, allora f è continua in $x\in X$ se e solo se per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X convergente a x, la successione $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y converge a $f(x)$.

Dimostrazione. Se f è continua in x, sappiamo [V. Proposizione 6.2 del §1] che, per ogni rete $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in X convergente a x, la rete $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ in Y converge a $f(x)$. In particolare ciò accade se la rete $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ è una successione.

Viceversa, supponiamo che $x_n\to x \Longrightarrow f(x_n)\to f(x)$ e dimostriamo che, allora, f è continua in x.

Sia $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base di intorni di x in X [Per esempio $V_n=S_d(x,1/n)$, ove d è una pseudometrica su X definente la topologia di X].

Se f non è continua in x, esiste un intorno U di $f(x)$ in Y tale che, per ogni $n\in\mathbb{N}$, $f(V_n)\not\subset U$.

Sia $x_n\in V_n$ tale che $f(x_n)\notin U$. Allora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, mentre $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ non converge a $f(x)$. #