# § 3. SPAZI VETTORIALI. INSIEMI CONVESSI E SEMINORME.

## 1. SPAZI VETTORIALI. APPLICAZIONI LINEARI. FORME LINEARI. DUALE ALGEBRICO.

Dato un corpo commutativo $\mathbb{K}$, uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ è un insieme - diciamolo $X$ - munito della struttura algebrica definita dalle due applicazioni

$(x,y) \mapsto x+y$ di $X \times X$ in $X$ (legge di composizione interna, detta addizione in $E$)

$(\alpha,x) \mapsto \alpha x$ di $\mathbb{K} \times X$ in $X$ (legge di composizione esterna, detta moltiplicazione per uno scalare)

aventi le seguenti proprietà:

(3.1) $x+(y+z)=(x+y)+z \quad \forall x,y,z \in X$ ;

(3.2) $x+y=y+x \quad \forall x,y \in X$ ;

(3.3) esiste $0 \in X$ tale che $x=0+x \quad \forall x \in X$ [$0$ è chiamato l'origine di $X$);

(3.4) $\forall x \in X$ esiste un elemento $-x \in X$ tale che $x+(-x)=0$ ;

(3.5) $(\alpha+\mu)x=\alpha x+\mu x \quad \forall \alpha,\mu \in \mathbb{K}$ e $\forall x \in X$

(3.6) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall x,y \in X$

(3.7) $\alpha(\mu x)=(\alpha\mu)x \quad \forall \alpha,\mu \in \mathbb{K}$ e $\forall x \in X$

(3.8) $1x=x \quad \forall x \in X$ [essendo $1$ l'elemento unitario di $\mathbb{K}$].

Gli elementi di $\mathbb{K}$ saranno chiamati scalari.

Osservazioni. Da (3.3),(3.6) segue $\alpha 0=0 \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$ [perchè $\alpha x=\alpha(x+0)=\alpha x+\alpha 0$].
Da (3.5) segue $0x=0 \ \forall x \in X$ [perchè $\alpha x=(\alpha+0)x=\alpha x+0x$].
Inoltre risulta $\alpha(-x)=(-\alpha)x=-(\alpha x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall x \in X$ [perchè $\alpha x+\alpha(-x)=\alpha(x-x)=0$ e $\alpha x+(-\alpha)x=(\alpha-\alpha)x=0$].

Ogni corpo commutativo $\mathbb{K}$ è uno spazio vettoriale su se stesso, ove la moltiplicazione per uno scalare è la moltiplicazione in $\mathbb{K}$.

Un sottoinsieme non vuoto $Y$ di $X$ dicesi un sottospazio vettoriale (o lineare) di $X$ se

$$y_1,y_2 \in Y, \ \alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{K} \implies \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2 \in Y$$

La restrizione ad $Y \times Y$ dell'addizione in $X$ è un'addizione in $Y$; la restrizione a $\mathbb{K} \times Y$ della moltiplicazione per uno scalare è una moltiplicazione per uno scalare e l'insieme $Y$ dotato di queste due operazioni è uno spazio vettoriale. Ciò giustifica la terminologia.

Se $A$ è un sottoinsieme di $X$, l'intersezione $M$ dei sottospazi vettoriali di $X$ contenenti $A$ è chiaramente un sottospazio vettoriale di $X$ e dicesi generato da $A$.

E' immediato verificare che il sottospazio vettoriale di $X$ generato da $A$ coincide con l'insieme delle combinazioni lineari (di famiglie finite) di elementi di $A$, cioè con l'insieme dei vettori di $X$ del tipo $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i$, ove $(x_i)_{i \in I}$ è una famiglia finita di elementi di $A$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

Siano $X,Y$ spazi vettoriali sul medesimo corpo $\mathbb{K}$. Un'applicazione $\varphi: X \to Y$ dicesi lineare se $\varphi(\alpha x+\mu y)=\alpha\varphi(x)+\mu\varphi(y) \quad \forall x,y \in X$ e $\forall \alpha,\mu \in \mathbb{K}$.

In particolare risulta $\varphi(0)=0$ [perchè $\varphi(0)=\varphi(x-x)=\varphi(x)-\varphi(x)=0$].

Si vede subito che, se $\varphi$ è lineare, risulta

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(x_i)$$

per ogni famiglia finita $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ di elementi di $X$ e per ogni famiglia finita $(\alpha_i)_{i=1,\dots,n}$ di scalari.

Se $\varphi: X \to Y$, $\psi: X \to Y$ sono lineari, tali sono anche le applicazioni $\varphi + \psi$ e $\alpha\varphi$ ($\alpha \in \mathbb{K}$) definite dalle

$$(3.9) \quad \begin{cases} (\varphi+\psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) \\ (\alpha\varphi)(x) = \alpha\varphi(x) \end{cases} \qquad \forall x \in X$$

Si verifica immediatamente che, con le operazioni definite da (3.9), l'insieme delle applicazioni lineari di $X$ in $Y$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Se $X$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, dicesi <u>forma lineare</u> su $X$ ogni applicazione lineare di $X$ in $\mathbb{K}$.

Lo spazio vettoriale delle forme lineari su $X$ dicesi il <u>duale dello spazio vettoriale</u> $X$ e sarà denotato con il simbolo $X^*$.

In conformità con la definizione generale di isomorfismo data al n. 8 del §1, se $X, Y$ sono spazi vettoriali sul medesimo corpo $\mathbb{K}$, un <u>isomorfismo</u> dello spazio vettoriale $X$ nello (sullo) spazio vettoriale $Y$ è un'applicazione lineare e iniettiva di $X$ in (su) $Y$.

Sia $M$ un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale $X$ e sia $x_0 \in X$. Il sottoinsieme
$$x_0 + M = \{x_0 + x : x \in X\}$$
di $X$ dicesi il <u>sottospazio affine</u> (o la <u>sottovarietà lineare</u>) di $X$ passante per $x_0$ e parallelo a $M$.

## 2. SPAZIO VETTORIALE QUOZIENTE. PRODOTTO E SOMMA DIRETTA (ESTERNA) DI UNA FAMIGLIA DI SPAZI VETTORIALI.

Sia $X$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e sia $M$ un sottospazio lineare di $X$.
L'<u>insieme quoziente</u> $X/M$ è l'insieme quoziente dell'insieme $X$ rispetto alla relazione di equivalenza: $x \, \mathcal{S}_M \, y \iff x - y \in M$.
Gli elementi dell'insieme $X/M$ sono pertanto i sottoinsiemi di $X$ del tipo
$$x + M = \{x + y : y \in M\}, \quad x \in X.$$
Il sottoinsieme $x + M$ di $X$ dicesi la sottovarietà lineare di $X$ passante per $x$ e parallela a $M$. Ovviamente $x + M = M \iff x \in M$.
Lo <u>spazio vettoriale quoziente</u> $X/M$ è lo spazio vettoriale che si ottiene definendo sull'insieme quoziente $X/M$ l'addizione e la moltiplicazione per uno scalare nel modo seguente
$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x+y), \qquad \alpha\pi(x) = \pi(\alpha x),$$
ove $\pi: X \to X/M$ è l'applicazione che ad ogni $x \in X$ associa l'elemento $\pi(x)$ del quoziente individuato da $x$.
La "proiezione canonica" $\pi$ è, così, lineare.

Sia $(X_\iota)_{\iota \in I}$ una famiglia (qualunque) di spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.
Lo <u>spazio vettoriale prodotto</u> $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ della famiglia $(X_\iota)_{\iota \in I}$ è lo spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ che si ottiene definendo sull'insieme prodotto $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ l'addizione e la moltiplicazione per uno scalare nel modo seguente

$$(10) \quad (x_\iota)_{\iota \in I} + (y_\iota)_{\iota \in I} = (x_\iota + y_\iota)_{\iota \in I}, \qquad \alpha (x_\iota)_{\iota \in I} = (\alpha x_\iota)_{\iota \in I}$$

La <u>somma diretta (esterna)</u> $\bigoplus_{\iota \in I} X_\iota$ della famiglia $(X_\iota)_{\iota \in I}$ è il sottospazio vettoriale di $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ i cui elementi sono gli elementi $(x_\iota)_{\iota \in I}$ di $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ tali che $x_\iota = 0$ salvo che per un numero finito di indici.

## 3. SOMME DIRETTE DI SOTTOSPAZI.

Siano uno spazio vettoriale e $(X_\iota)_{\iota\in I}$ una famiglia di sottospazi vettoriali di $X$.

La <u>somma</u> $\sum_{\iota\in I} X_\iota$ <u>della famiglia</u> $(X_\iota)_{\iota\in I}$ è il sottospazio vettoriale di $X$ generato da $\bigcup_{\iota\in I} X_\iota$.

Si riconosce facilmente che $\sum_{\iota\in I} X_\iota$ coincide con l'insieme delle somme $\sum_{\iota\in I} x_\iota$, ove $(x_\iota)_{\iota\in I}$ descrive l'insieme degli elementi della somma diretta (esterna) della famiglia $(X_\iota)_{\iota\in I}$.

La <u>somma</u> $\sum_{\iota\in I} X_\iota$ dicesi <u>diretta</u>, e si indica con $\bigoplus_{\iota\in I} X_\iota$, se ogni elemento di essa può scriversi in un solo modo nella forma $\sum_{\iota\in I} x_\iota$ (con $x_\iota \in E_\iota$ e $x_\iota = 0$ tranne che per un numero finito di indici).

E' immediato verificare che la somma $\sum_{\iota\in I} X_\iota$ è diretta se e solo se, per ogni $j\in I$, risulta

$$X_j \cap \sum_{\iota\neq j} X_\iota = \{0\}.$$

Osservazione. Sia $(X_\iota)_{\iota\in I}$ una famiglia di spazi vettoriali sullo stesso corpo commutativo $\mathbb{K}$. La somma diretta (esterna) della famiglia $(X_\iota)_{\iota\in I}$ coincide con la somma diretta della famiglia $(X'_\iota)_{\iota\in I}$ dei sottospazi $X'_\iota$ del prodotto $\prod_{\iota\in I} X_\iota$ così definiti:

$$X'_j = \prod_{\iota\in I} Y_\iota \quad , \text{ ove } \quad Y_j = X_j \quad \text{e} \quad Y_\iota = \{0\} \text{ se } \iota\neq j.$$

Due sottospazi vettoriali $M, N$ di uno spazio vettoriale $E$ diconsi <u>supplementari in $X$</u> se $X$ è somma diretta di $M$ e $N$:

$$X = M \oplus N ;$$

ciò significa (lo ripetiamo) $X = M + N$ e $M \cap N = \{0\}$.

## 4. BASI. DIMENSIONE. BASE DUALE. MATRICI.

Una <u>famiglia</u> $(a_\iota)_{\iota\in I}$ di elementi di uno spazio vettoriale $X$ su $\mathbb{K}$ dicesi <u>libera</u> (oppure che gli $a_\iota$ sono linearmente indipendenti) se, per ogni porzione finita $J$ di $I$, $\sum_{\iota\in J} \lambda_\iota a_\iota = 0 \quad (\lambda_\iota \in \mathbb{K}) \Rightarrow \lambda_\iota = 0 \quad \forall \iota\in J$.

Una famiglia $(a_\iota)_{\iota\in I}$ di elementi di uno spazio vettoriale $E$ dicesi una <u>base di $X$</u> se essa è libera e genera $X$, cioè se essa è libera e [V. n. 1] ogni $x\in X$ è combinazione lineare (finita) di elementi della famiglia stessa.

Si può dimostrare che <u>ogni spazio vettoriale ha</u> (almeno) <u>una base</u> e che <u>tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero cardinale</u>: questo cardinale dicesi la <u>dimensione</u> dello spazio vettoriale.

E' ovvio che $(a_\iota)_{\iota\in I}$ è una base di $X$ se e solo se $X$ è somma diretta dei suoi sottospazi (di dimensione 1) $\mathbb{K}a_\iota = \{\lambda a_\iota : \lambda\in\mathbb{K}\}$.

Se $\mathbb{K}$ è un corpo commutativo, una base dello spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ è la seguente

$$e_1=(1,0,0,\dots,0),\ e_2=(0,1,0,\dots,0),\ \dots,\ e_n=(0,0,\dots,0,1).$$

Essa dicesi la base canonica di $\mathbb{K}^n$.

Ogni spazio vettoriale $X$ di dimensione (finita) $n$ su $\mathbb{K}$ è isomorfo a $\mathbb{K}^n$. Infatti, se $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ è una base di $X$, per ogni $x\in X$ esiste uno ed un solo elemento $(\xi_i)_{i=1,\dots,n}$ di $\mathbb{K}^n$ tale che $x=\sum_i \xi_i a_i$ e l'applicazione $x\mapsto(\xi_i)_{i=1,\dots,n}$ è palesemente un isomorfismo di $X$ su $\mathbb{K}^n$.

L'elemento $\xi_i$ di $\mathbb{K}$ dicesi la componente (o coordinata) di indice $i$ di $x$ rispetto alla base $(a_i)_{i=1,\dots,n}$.

Se lo spazio vettoriale $X$ su $\mathbb{K}$ ha dimensione $n$, anche il suo duale algebrico $X^*$ è isomorfo a $\mathbb{K}^n$ (e quindi ha dimensione $n$); se $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ è una base di $X$ allora $(a_i^*)_{i=1,\dots,n}$, ove $a_i^*\in E^*$ è definito da $a_i^*(x)=\xi_i \quad \forall x=\sum\xi_i a_i\in X$, è una base di $X^*$ e dicesi la base duale della base $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ di $X$.

Dimostrazione. L'applicazione $\varphi\mapsto(\varphi(a_i))_{i=1,\dots,n}$ è un isomorfismo di $X^*$ su $\mathbb{K}^n$, come si verifica facilmente tenendo presente tra l'altro che, fissato (arbitrariamente) $(\alpha_i)_{i=1,\dots,n}\in\mathbb{K}^n$, l'applicazione $x=\sum_i\xi_i a_i\mapsto\sum_i\xi_i\alpha_i$ è una forma lineare su $X$.

$(a_i^*)_{i=1,\dots,n}$ è una base di $X^*$. Infatti:

(a) $\sum_i d_i a_i^*=0 \Longrightarrow (d_i)_{i=1,\dots,n}=0$, perchè $\sum_i d_i a_i^*=0 \Longrightarrow \sum d_i a_i^*(x)=0 \quad \forall x\in X$
$\Longrightarrow \sum d_i\xi_i=0 \quad \forall(\xi_i)_{i=1,\dots,n}\in\mathbb{K}^n \Longrightarrow (d_i)_{i=1,\dots,n}=0.$

(b) Se $\varphi\in X^*$ risulta $\varphi=\sum_i\alpha_i a_i^*$, ove $\alpha_i=\varphi(a_i)$, perchè

$$\varphi(x)=\varphi\Big(\sum_i\xi_i a_i\Big)=\sum_i\xi_i\varphi(a_i)=\sum_i a_i^*(x)\alpha_i=\Big(\sum_i\alpha_i a_i^*\Big)(x) \qquad \forall x\in X.\ \#$$

Siano $X$ e $Y$ due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensioni rispettivamente $n$ e $m$. $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ sia una base di $X$ e $(b_j)_{j=1,\dots,m}$ sia una base di $Y$.

Data $\varphi: X\to Y$ lineare sarà

$$\varphi(a_i)=\sum_{j=1}^m\alpha_{ji}b_j\ ;$$

$\alpha_{ji}$ denota, dunque la coordinata $j$-ma di $\varphi(a_i)\in Y$ rispetto alla base $(b_j)_{j=1,\dots,m}$.

La famiglia doppia $(\alpha_{ji})_{j=1,\dots,m;\,i=1,\dots,n}$ di elementi di $\mathbb{K}$ si chiama matrice di $m$ righe e $n$ colonne [o di tipo $(m,n)$] su $\mathbb{K}$. Diremo che $(\alpha_{ji})$ è la matrice dell'applicazione lineare $\varphi$ rispetto alle basi $(a_i)$ e $(b_j)$.

In effetti, fissate le due basi $(a_i)$ e $(b_j)$, c'è una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle applicazioni lineari di $X$ in $Y$ e l'insieme delle matrici di tipo $(m,n)$ su $\mathbb{K}$.

Anzi, se l'insieme delle matrici di tipo $(m,n)$ su $\mathbb{K}$ viene atteggiato a spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ definendo l'addizione e la moltiplicazione per uno scalare nel modo seguente

$$(\alpha_{ij})+(\beta_{ij})=(\alpha_{ij}+\beta_{ij}), \qquad \lambda(\alpha_{ij})=(\lambda\alpha_{ij}),$$

si constata facilmente che la corrispondenza biunivoca succennata è un isomorfismo dello spazio vettoriale delle applicazioni lineari di $X$ in $Y$ sullo spazio vettoriale delle matrici di tipo $(m,n)$ su $\mathbb{K}$.

Siano $X, Y, Z$ spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensioni $n, m, p$ rispettivamente. Siano $(a_i)_{i=1,\dots,n}$ una base di $X$, $(b_j)_{j=1,\dots,m}$ una base di $Y$ e $(c_k)_{k=1,\dots,p}$ una base di $Z$. Siano $\varphi : X \to Y$, $\psi : Y \to Z$ lineari.

Se $\alpha = (\alpha_{ji})_{j=1,\dots,m;\, i=1,\dots,n}$ è la matrice di $\varphi$ rispetto alle basi $(a_i)$ e $(b_j)$,

$\beta = (\beta_{kj})_{k=1,\dots,p;\, j=1,\dots,m}$ è la matrice di $\psi$ rispetto alle basi $(b_j)$ e $(c_k)$,

e $\gamma = (\gamma_{ki})_{k=1,\dots,p;\, i=1,\dots,n}$ è la matrice dell'applicazione lineare $\psi \circ \varphi : X \to Z$ rispetto alle basi $(a_i)$ e $(c_k)$, risulta

$$\gamma_{ki} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{kj}\, \alpha_{ji} .$$

Infatti, poiché

$$\varphi(a_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji}\, b_j \quad , \quad \psi(b_j) = \sum_{k=1}^{p} \beta_{kj}\, c_k ,$$

si ha

$$(\psi\circ\varphi)(a_i) = \psi(\varphi(a_i)) = \psi\Big(\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji} b_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\, \psi(b_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\Big(\sum_{k=1}^{p} \beta_{kj} c_k\Big) = \sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{j=1} \beta_{kj}\alpha_{ji}\Big) c_k .$$

Si dice che la matrice $\gamma$, di tipo $(p,n)$, è il <u>prodotto righe per colonne</u> della matrice $\alpha$, di tipo $(m,n)$ e della matrice $\beta$, di tipo $(p,m)$.

## 5. CODIMENSIONE. IPERPIANI.

Siano $X$ uno spazio vettoriale sul corpo commutativo $\mathbb{K}$ ed $M$ un sottospazio lineare di $X$. Dicesi <u>codimensione</u> di $M$ in $X$ la dimensione di $X/M$.

PROPOSIZIONE 5.1 <u>$M$ ha codimensione (finita) $n$ in $X$ se e solo se $M$ ha un supplementare in $X$ di dimensione $n$.</u> [V. n. 3].

Dimostrazione.

(a) Sia $\operatorname{codim} M = n$. Allora, detta $\phi$ l'applicazione canonica di $X$ su $X/M$, esistono $a_i \in X$, $(i=1,\dots,n)$, tali che $\phi(X) = X/M = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K}\phi(a_i)$.

Segue che $X = M \oplus \big(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K} a_i\big)$. Infatti l'insieme che sta a secondo membro è chiaramente contenuto in $X$; viceversa, se $x \in X$, risulta

$\phi(x) = \sum_i d_i \phi(a_i) = \phi\big(\sum_i d_i a_i\big)$, da cui $\phi\big(x - \sum_i d_i a_i\big) = 0$, donde

$x \in M + \sum_i d_i a_i \subseteq M \oplus \big(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K} a_i\big)$.

(b) Sia $X = M \oplus \big(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K} a_i\big)$ e proviamo che $X/M = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K}\phi(a_i)$.

Infatti $X/M = \phi(X) = \phi\big(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K} a_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{K}\,\phi(a_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K}\,\phi(a_i)$.

L'ultima uguaglianza è giustificata, perché, se $X = M \oplus \big(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{K} a_i\big)$, allora gli elementi $\phi(a_i)$ di $X/M$ sono linearmente indipendenti. Infatti

$\sum_i d_i \phi(a_i) = 0 \Rightarrow \phi\big(\sum_i d_i a_i\big) = 0 \Rightarrow \sum_i d_i a_i \in M$, donde $\sum_i d_i a_i = 0$, da cui, infine, $d_i = 0$. #

Dicesi un <u>iperpiano omogeneo</u> di uno spazio vettoriale $X$ ogni sottospazio vettoriale di $X$ di codimensione $1$.

In base alla Proposizione 1, un sottospazio vettoriale $H$ di $X$ è un iperpiano (omogeneo) di $X$ se e solo se

$$X = H \oplus \mathbb{K}a \quad , \text{ ove } \quad a \in E \, , \; a \notin H .$$

Dicesi un <u>iperpiano</u> (affine) di uno spazio vettoriale $X$ passante per $x_0 \in X$ e parallelo all'iperpiano omogeneo $H$ di $X$, il sottospazio affine $x_0 + H$ di $X$.

PROPOSIZIONE 5.2. <u>Se $H$ è un iperpiano omogeneo di $X$, esiste una forma lineare $\varphi$ su $X$, determinata a meno della moltiplicazione per uno scalare, tale che</u>

$$\underline{H = \operatorname{Ker} \varphi} \quad , \text{ ove } \operatorname{Ker}\varphi = \{x \in X : \varphi(x) = 0\} \text{ è il } \underline{\text{nucleo}} \text{ di } \varphi.$$

<u>L'equazione (lineare omogenea) $\varphi(x) = 0$ si chiama l'equazione dell'iperpiano $H$.</u>

Dimostrazione. Se $H$ è un iperpiano omogeneo di $X$ si ha

$$X = H \oplus \mathbb{K}a \quad , \text{ con } a \in X, \; a \notin H .$$

Pertanto ogni $x \in X$ è del tipo $x = y + \varphi(x)a$, ove $y \in H$ e $\varphi(x) \in \mathbb{K}$ sono individuati da $x$.

Si verifica immediatamente che $x \mapsto \varphi(x)$ di $X$ in $\mathbb{K}$ è lineare. Inoltre

$$\varphi(x) = 0 \iff x = y \in H .$$

Se $\varphi, \psi \in X^*$ sono tali che $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi = H$, esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $\varphi = \lambda \psi$. Infatti, se $\alpha = \varphi(a)$ e $\beta = \psi(a)$ la forma lineare $\alpha\psi - \beta\varphi$ su $X$ è nulla, perché essa è nulla in $H$ e in $a$ e risulta $X = H \oplus \mathbb{K}a$. #

PROPOSIZIONE 5.3. <u>Se $\varphi \in X^*$, $\varphi \neq 0$, allora $\operatorname{Ker}\varphi$ è un iperpiano omogeneo di $X$.</u>

Dimostrazione. Sia $a \in X$ tale che $\varphi(a) \neq 0$ e poniamo, per ogni $x \in X$,

$$y = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a .$$

Poiché, chiaramente, $\varphi(y) = 0$, cioè $y \in \operatorname{Ker}\varphi$, segue che $X = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \mathbb{K}a$. #

PROPOSIZIONE 5.4. <u>Se $P$ è un iperpiano (affine) di $X$ esistono $\varphi \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, tali che</u>

$$P = \{x \in X : \varphi(x) = \alpha\} .$$

<u>$\varphi(x) = \alpha$ dicesi l'equazione dell'iperpiano $P$.</u>

Dimostrazione. Se $x_0 \in P$ risulta $P = x_0 + H$ con $H$ iperpiano omogeneo di $X$. Se $\varphi \in X^*$ è tale che $\operatorname{Ker}\varphi = H$, risulta $P = \{x \in X : \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$. #

PROPOSIZIONE 5.5. <u>Se $\varphi \in X^*$, $\varphi \neq 0$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, allora $\{x \in X : \varphi(x) = \alpha\}$ è un iperpiano (affine) di $X$.</u>

Dimostrazione. Poniamo $P = \{x \in X : \varphi(x) = \alpha\}$. Se $x_0 \in P$ si ha evidentemente $P = x_0 + \operatorname{Ker}\varphi$. #

Siano $X$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\varphi \in X^*$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. L'iperpiano $P = \{x \in X : \varphi(x) = \alpha\}$ di $X$ individua due <u>semispazi</u> di $X$: il semispazio $X_\alpha = \{x \in X : \varphi(x) \le \alpha\}$ ed il semispazio $X^\alpha = \{x \in X : \varphi(x) \ge \alpha\}$.

Dati due sottoinsiemi $A$ e $B$ di $X$, si dice che l'<u>iperpiano $P = \{x \in X : \varphi(x) = \alpha\}$</u> di $X$ <u>separa $A$ e $B$</u> se $\varphi(x) \le \alpha$ $\forall x \in A$, $\varphi(x) \ge \alpha$ $\forall x \in B$.

Si dice che <u>$P$ separa strettamente $A$ e $B$</u> se $\varphi(x) < \alpha$ $\forall x \in A$, $\varphi(x) > \alpha$ $\forall x \in B$.

# 6. INSIEMI CONVESSI E SEMINORME.



Sia $X$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ (o su $\mathbb{R}$).

Un sottoinsieme $A$ di $E$ dicesi <u>convesso</u> se $x_1, x_2 \in A$, $\lambda \in [0,1] \Rightarrow \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$, oppure, equivalentemente, se $x_1, x_2 \in A$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$.

Se $A$ è convesso si ha facilmente, per induzione,

(6.1) $\quad x_1, \dots, x_n \in A, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in A$.

E' immediato verificare che l'intersezione di una famiglia di convessi è un convesso.

Se $A$ è un sottoinsieme di $X$, dicesi l'inviluppo convesso di $A$ il più piccolo convesso di $X$ contenente $A$, cioè l'intersezione della famiglia dei sottoinsiemi convessi di $E$ contenenti $A$.

Sussiste la seguente caratterizzazione dell'<u>inviluppo convesso di $A$</u>, che indicheremo con $K(A)$:

(6.2) $\quad K(A) = \{\sum_{i\in I} \lambda_i x_i : x_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{R}^+, \sum_{i\in I} \lambda_i = 1, \ I \text{ parte finita di } \mathbb{N}\}$.

Infatti, detto $B$ l'insieme a secondo membro di (6.2), si ha $B \subseteq K(A)$, in virtù di (6.1), perché $K(A)$ è convesso; inoltre $K(A) \subseteq B$ perché, come si verifica immediatamente, $B$ è convesso (e contiene $A$).

E' facile constatare che, se $A, B$ sono sottoinsiemi convessi di $X$, tale è la loro somma (vettoriale)

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$$

e che l'immagine e l'antiimmagine di un insieme convesso tramite un'applicazione lineare sono insiemi convessi.

Se $A$ è un sottoinsieme di $X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ si pone

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}.$$

inoltre $-A$ è un'abbreviazione di $(-1)A$.

Se $A$ e $B$ sono sottoinsiemi di $E$ si dice che <u>$A$ assorbe $B$</u> se esiste $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda_0 > 0$ tale che

$$\lambda B \subseteq A \qquad \text{per ogni } \lambda \in \mathbb{C} \text{ con } |\lambda| \le \lambda_0.$$

Un sottoinsieme $A$ di $X$ dicesi <u>assorbente</u> se esso assorbe ogni punto di $X$, cioè se per ogni $x \in E$ esiste $\lambda(x) \in \mathbb{R}$, $\lambda(x) > 0$, tale che $|\lambda| \le \lambda(x) \Rightarrow \lambda x \in A$.

Un sottoinsieme $A$ di $X$ dicesi <u>equilibrato</u> se $|\lambda| \le 1 \Rightarrow \lambda A \subseteq A$.

L'intersezione di una qualunque famiglia di sottoinsiemi equilibrati è un sottoinsieme equilibrato.

Se $A$ è un sottoinsieme di $X$, l'inviluppo equilibrato di $A$ è il più piccolo sottoinsieme equilibrato di $X$ contenente $A$, cioè l'intersezione della famiglia dei sottoinsiemi equilibrati di $E$ contenenti $A$.

Si riconosce facilmente che l'inviluppo equilibrato di $A$ è

$$\bigcup_{|\lambda| \le 1} \lambda A.$$

E' immediato verificare che <u>l'inviluppo convesso di un sottoinsieme equilibrato di $X$ è equilibrato</u>.

Una <u>seminorma</u> su $X$ è un'applicazione $p: X \to \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni $x, y \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, si abbia

(6.3) $\quad \begin{cases} p(x+y) \le p(x) + p(y) & \text{(cioè } p \text{ è subadditiva)} \\ p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x) & \text{(cioè } p \text{ è assolutamente omogenea di grado 1)} \end{cases}$

Si osservi che dalla seconda di (6.3) segue $p(0) = 0$. Se oltre a (6.3) sussiste

(6.4) $\quad p(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$

allora $p$ è una <u>norma</u> su $X$ e si indica abitualmente con $\|\cdot\|$.

Sia $U$ un sottoinsieme assorbente di $X$. Ad $U$ associamo la funzione $p_U : X \to \mathbb{R}$ definita da

(6.5) $$p_U(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0,\ x \in \lambda U\} ;$$

$p_U$ dicesi il funzionale di Minkowky di $U$.

La funzione $p_U$ è positivamente omogenea di grado 1, cioè risulta $p_U(\mu x) = \mu p_U(x)$ $\forall \mu \geq 0$.

Se $U$ è equilibrato $p_U$ è assolutamente omogenea di grado 1, cioè $p_U(\mu x) = |\mu| p_U(x)$ $\forall \mu \in \mathbb{C}$; infatti ciò è banalmente vero se $\mu = 0$ essendo $0 \in U$ (poiché $U$ è assorbente) e, se $\mu \neq 0$, si ha $p_U(\mu x) = \inf\{\lambda > 0 : \mu x \in \lambda U\} = \inf\{\lambda > 0 : |\mu| x \in \lambda U\} = \inf\{\lambda > 0 : x \in \frac{\lambda}{|\mu|} U\} = |\mu| \inf\{\frac{\lambda}{|\mu|} : \lambda > 0,\ x \in \frac{\lambda}{|\mu|} U\} = |\mu|\, p_U(x)$.

Se $U$ è convesso allora $p_U$ è subadditiva, cioè risulta, per ogni $x, y \in X$, $p_U(x+y) \leq p_U(x) + p_U(y)$.

Infatti, fissato arbitrariamente $\varepsilon > 0$, esistono $d_1 > 0$ e $d_2 > 0$ tali che $x \in d_1 U$, $y \in d_2 U$ e $p_U(x) \leq d_1 \leq p_U(x) + \varepsilon$, $p_U(y) \leq d_2 \leq p_U(y) + \varepsilon$; allora (ricordando che $U$ è convesso) $x + y \in d_1 U + d_2 U = (d_1 + d_2)\left[\frac{d_1}{d_1+d_2} U + \frac{d_2}{d_1+d_2} U\right] \subseteq (d_1 + d_2) U$, donde $p_U(x+y) \leq d_1 + d_2 \leq p_U(x) + p_U(y) + 2\varepsilon$, donde infine la conclusione data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

Dunque se $U$ è un sottoinsieme convesso, equilibrato, assorbente di $X$, allora $p_U$ è una seminorma su $X$; inoltre risulta

(6.6) $$\{x \in X : p_U(x) < 1\} \subseteq U \subseteq \{x \in X : p_U(x) \leq 1\},$$

come si constata immediatamente sfruttando il fatto che $U$ è equilibrato.

Viceversa, se $p$ è una seminorma su $X$ allora gli insiemi $\{x \in X : p(x) < \varepsilon\}$, $\{x \in X : p(x) \leq \varepsilon\}$, ove $\varepsilon$ è un numero reale positivo, sono convessi, equilibrati, assorbenti, come si constata senza difficoltà. Pertanto sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 6.1. Sia $X$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ (o su $\mathbb{R}$).
Se $p$ è una seminorma su $X$ e $\varepsilon$ è un numero reale positivo gli insiemi $\{x \in X : p(x) < \varepsilon\}$, $\{x \in X : p(x) \leq \varepsilon\}$ sono convessi, equilibrati e assorbenti.
Viceversa, se $U$ è un sottoinsieme di $X$ convesso, equilibrato e assorbente, allora la funzione $p_U$ definita da (6.5) è una seminorma su $X$ e vale (6.6).

Se $p$ è una seminorma (norma) su $X$ posto

(6.7) $$d_p(x,y) = p(x-y) \qquad \text{per ogni } x, y \in X,$$

è immediato verificare che $d_p$ è una pseudometrica (metrica) su $X$ che gode delle seguenti proprietà:

(6.8) $$\begin{cases} d_p(x,y) = d_p(x+z, y+z) & \text{(cioè } d \text{ è invariante per traslazioni)} \\ d_p(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d_p(x,y) \end{cases}$$

per ogni $x, y, z \in E$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.

Viceversa, se $d$ è una pseudometrica (metrica) su $X$ verificante (6.8), allora, posto
$$p_d(x) = d(x, 0),$$
$p_d$ è una seminorma (norma) su $X$ e vale
$$d(x,y) = p_d(x-y),$$
come si riconosce facilmente.