§4. SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI.

1. DEFINIZIONE E PROPRIETÀ GENERALI.

Dicendo spazio vettoriale intenderemo spazio vettoriale sul corpo complesso $\mathbb{C}$.
Sia X uno spazio vettoriale.
Una topologia su X dicesi compatibile con la struttura di spazio vettoriale (o brevemente una topologia vettoriale) se è tale che siano continue le due operazioni di spazio vettoriale

$$\begin{cases} (x,y) \mapsto x+y & \text{di } X\times X \text{ in } X \\ (\lambda,x)\mapsto \lambda x & \text{di } \mathbb{C}\times X \text{ in } X \end{cases}.$$

Uno spazio vettoriale dotato di una topologia compatibile con la struttura di spazio vettoriale dicesi uno spazio vettoriale topologico. Spesso useremo la sigla SVT per spazio vettoriale topologico.

Se X è uno spazio vettoriale topologico e $x_0\in X$, $\lambda_0\in\mathbb{C}$, $\lambda_0\neq 0$ le due applicazioni

$x\mapsto x_0+x$ (traslazione)
$x\mapsto \lambda_0 x$ (omotetia)

di X in X sono omeomorfismi.

Per convincersene si pensi che $x\mapsto x_0+x$ si ottiene componendo le due applicazioni continue $x\mapsto(x_0,x)$ di X in $X\times X$ e $(x_0,x)\mapsto x_0+x$ di $X\times X$ in X e che una cosa analoga si ha per l'applicazione inversa $y\mapsto -x_0+y$, nonché per l'applicazione $x\mapsto\lambda_0 x$ e per la sua inversa $y\mapsto \frac{1}{\lambda_0}y$.

Dal fatto che $x\mapsto x_0+x$ è un omeomorfismo discende che

$$(1)\qquad U\in\mathcal{F}(0) \iff x_0+U\in\mathcal{F}(x_0),$$

ove $\mathcal{F}(0)$ e $\mathcal{F}(x_0)$ denotano il filtro degli intorni dell'origine e il filtro degli intorni di x_0.

Di conseguenza, in uno spazio vettoriale topologico la conoscenza del filtro degli intorni di un punto (per esempio dell'origine) implica la conoscenza del filtro degli intorni di ogni punto e quindi la conoscenza della topologia.

TEOREMA 1.1. Un filtro $\mathcal{F}$ su uno spazio vettoriale X è il filtro degli intorni dell'origine per una topologia vettoriale su X se e solo se

(i) $0\in U \quad \forall\, U\in\mathcal{F}$;
(ii) per ogni $U\in\mathcal{F}$ esiste $V\in\mathcal{F}$ tale che $V+V\subseteq U$;
(iii) $U\in\mathcal{F}$, $\lambda\in\mathbb{C}$, $\lambda\neq 0 \Rightarrow \lambda U\in\mathcal{F}$;
(iv) ogni elemento di $\mathcal{F}$ è assorbente
(v) ogni elemento di $\mathcal{F}$ contiene qualche elemento di $\mathcal{F}$ equilibrato.

Dimostrazione. Ci limitiamo a dimostrare la necessità delle condizioni (i), (ii), (iii), (iv), (v).
(i): ovvia.
(ii). Dalla continuità (nell'origine) dell'applicazione $(x,y)\mapsto x+y$ di $X\times X$ in X segue che per ogni $U\in\mathcal{F}$ esistono $V_1, V_2\in\mathcal{F}$ tali che $V_1+V_2\subseteq U$ [si ricordi che una base di intorni dell'origine di $E\times E$ per la topologia prodotto è $\{V_1\times V_2 : V_1, V_2\in\mathcal{F}\}$]. Posto $V=V_1\cap V_2$ si ha $V+V\subseteq U$.
(iii) Dalla continuità (nell'origine) dell'applicazione $x\mapsto\frac{1}{\lambda}x$ $(\lambda\neq 0)$ di X in X segue appunto (iii).
(iv) Per ogni $x\in E$, l'applicazione $\lambda\mapsto\lambda x$ di $\mathbb{C}$ in X è continua [perché si ottiene componendo le due applicazioni continue $\lambda\mapsto(\lambda,x)$ di $\mathbb{C}$ in $\mathbb{C}\times X$ e $(\lambda,x)\mapsto\lambda x$ di $\mathbb{C}\times X$ in X].

Quindi, per ogni $U \in \mathcal{F}$ esiste $\delta(x)>0$ tale che $|\lambda| \le \delta(x) \Rightarrow \lambda x \in U$.

(v) Dalla continuità (nell'origine) dell'applicazione $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ di $\mathbb{C} \times X$ in X segue che, per ogni $U \in \mathcal{F}$, esistono $\delta_0 > 0$ e $W \in \mathcal{F}$ tali che $|\lambda| \le \delta_0,\ x \in W \Rightarrow \lambda x \in U$; di conseguenza $|\lambda| \le \delta_0 \Rightarrow \lambda W \subseteq U$, donde $\bigcup_{|\lambda| \le \delta_0} \lambda W \subseteq U$. Per concludere basta porre $V = \bigcup_{|\lambda| \le \delta_0} \lambda W$ e osservare che V è equilibrato, come si verifica immediatamente. #

Da (v) segue che l'insieme degli intorni equilibrati dell'origine è una base di intorni dell'origine di uno spazio vettoriale topologico.

PROPOSIZIONE 1.1. Esistono basi di intorni dell'origine in uno SVT formate da insiemi chiusi.

Dimostrazione. Sia U un intorno dell'origine di uno spazio vettoriale topologico X. Per il Teorema 1 esiste un intorno equilibrato V dell'origine in X tale che $V+V \subseteq U$.
Per dimostrare l'asserto basterà provare che $\overline{V} \subseteq U$.
Poiché V è equilibrato si ha $-V \subseteq V$; perciò $V-V \subseteq U$.
Sia $x \in \overline{V}$; allora $(x+V) \cap V \neq \emptyset$ e quindi esistono $y, z \in V$ tali che $z = x+y$, donde $x = z-y \in V-V \subseteq U$. Dunque $\overline{V} \subseteq U$. #

PROPOSIZIONE 1.2. Esistono basi di intorni dell'origine in uno SVT formate da insiemi chiusi ed equilibrati.

Dimostrazione. Siano X uno spazio vettoriale topologico e $\mathcal{F}(0)$ il filtro degli intorni dell'origine in X. Per la Proposizione 1.1 ogni intorno dell'origine in X ne contiene uno chiuso e quest'ultimo ne contiene uno equilibrato per il Teorema 1; quindi per dimostrare la Proposizione 1.2 basta provare che la chiusura di un insieme equilibrato è un insieme equilibrato.
Sia A un sottoinsieme equilibrato di X. Verifichiamo che $\overline{A}$ è equilibrato, cioè che $x \in \overline{A},\ |\lambda| \le 1 \Rightarrow \lambda x \in \overline{A}$, ossia che $x \in \overline{A},\ |\lambda| \le 1,\ U \in \mathcal{F}(0) \Rightarrow (\lambda x + U) \cap A \neq \emptyset$.
Se $\lambda = 0$ la cosa è ovvia perché A è equilibrato e quindi contiene l'origine. Sia $\lambda \neq 0$.
Poiché $\lambda^{-1} U \in \mathcal{F}(0)$, allora $x + \lambda^{-1} U$ è un intorno di x e quindi $(x + \lambda^{-1} U) \cap A \neq \emptyset$; di conseguenza esiste $y \in A$ tale che $y \in x + \lambda^{-1} U$. Essendo A equilibrato si ha $\lambda y \in A$ $\forall |\lambda| \le 1$, da cui $(\lambda x + U) \cap A \neq \emptyset$. #

PROPOSIZIONE 1.3. Esistono basi di intorni dell'origine in uno SVT formate da insiemi aperti ed equilibrati.

Dimostrazione. Basta osservare che l'inviluppo equilibrato di un sottoinsieme aperto A di uno SVT è aperto (oltre che equilibrato): per convincersene si ricordi che l'inviluppo equilibrato di A è $\bigcup_{|\lambda| \le 1} \lambda A$. #

PROPOSIZIONE 1.4. Un'applicazione lineare di uno SVT in un altro è continua se e solo se è continua in un punto.

Dimostrazione. Basta ricordare (1). #

PROPOSIZIONE 1.5. Uno SVT X è di Hausdorff se e solo se per ogni $x \in X$, $x \neq 0$, esiste un intorno dell'origine in X che non contiene x.

Dimostrazione. Dimostriamo la sufficienza, la necessità essendo banale.
Siano $x, y \in X$ con $x \neq y$; poiché $x - y \neq 0$ esiste per ipotesi un intorno U di 0 in X tale che $x-y \notin U$.
Sia V un intorno equilibrato dell'origine in E tale che $V+V \subseteq U$; allora $-V \subseteq V$ e quindi $V-V \subseteq U$

Proviamo che $(x+V)\cap(y+V)=\emptyset$. Se tale intersezione fosse non vuota esisterebbero $x', y' \in V$ tali che $x+x' = y+y'$, donde $x-y = y'-x' \in V-V \subseteq U$; ciò è assurdo perché $x-y \notin U$. #

È evidente che la Proposizione 1.5 può enunciarsi come segue: uno SVT X è di Hausdorff se e solo se per ogni $x\in X$, $x\neq 0$, esiste un intorno di x in X che non contiene l'origine.

COROLLARIO. Uno SVT X è di Hausdorff se e solo se $\{0\}$ è chiuso in E.

Dimostrazione. Se $\{0\}$ è chiuso in X e $x\in X\setminus\{0\}$ esiste un intorno di x che non contiene l'origine; dunque X è di Hausdorff in virtù della Proposizione precedente.
Viceversa, se X è di Hausdorff e $x\in X\setminus\{0\}$ esiste un intorno di x che non contiene l'origine e quindi $X\setminus\{0\}$ è aperto, donde $\{0\}$ è chiuso in X. #

* * * * *

PROPOSIZIONE 1.6 Siano X uno SVT, Y uno spazio vettoriale e $g: X\to Y$ un'applicazione lineare suriettiva. Se $\mathcal{F}(0)$ è il filtro degli intorni dell'origine in X, $g(\mathcal{F}(0))=\{g(U): U\in\mathcal{F}(0)\}$ è il filtro degli intorni dell'origine in Y per la più grande topologia su Y per cui g è continua. Tale topologia su Y è vettoriale e g è aperta (cioè mappa ogni aperto di X in un aperto di Y).

Dimostrazione. Innanzitutto si riconosce immediatamente che, essendo g suriettiva, $g(\mathcal{F}(0))$ è un filtro su Y. Ricordando, poi, che, se $x\in X$ e $\mathcal{F}(x)$ è il filtro degli intorni di x, si ha $\mathcal{F}(x) = x+\mathcal{F}(0)$, dalla linearità di g segue che

$$g(x)=0 \implies g(\mathcal{F}(x)) = g(\mathcal{F}(0));$$

Si verificata senza difficoltà, utilizzando il Teorema 1.1 che il filtro $g(\mathcal{F}(0))$ è il filtro degli intorni dell'origine per una topologia vettoriale su Y, che denotiamo con $\mathcal{T}_F$: infatti (i), (ii), (iii) sono ovvie, mentre (iv) discende dal fatto che g è lineare e suriettiva e (v) discende dal fatto che g è lineare.

È evidente che, se Y ha la topologia $\mathcal{T}_Y$, g è continua e aperta (cioè manda aperti in aperti). Ne segue che $\mathcal{T}_Y$ è la più grande topologia su Y per cui g è continua; infatti se $\mathcal{T}'_Y$ una topologia su Y per cui g è continua si ha (ricordando che g è aperta quando F ha la topologia $\mathcal{T}_Y$.
$A\in\mathcal{T}'_Y \Rightarrow g^{-1}(A)$ è aperto in $X \Rightarrow A(=g g^{-1}(A))\in\mathcal{T}_Y$. #

Dalla Proposizione 1.6 segue immediatamente il seguente

COROLLARIO. Siano X uno SVT, M un sottospazio vettoriale di X e $\pi: X\to X/M$ la proiezione canonica di X sullo spazio vettoriale quoziente X/M [v. § 3, n. 2].
La topologia quoziente su X/M [v. § 1, n. 4] è vettoriale e il filtro degli intorni dell'origine per tale topologia è

$$\pi(\mathcal{F}(0)),$$

se $\mathcal{F}(0)$ è il filtro degli intorni dell'origine in X. π è (continua e) aperta.

PROPOSIZIONE 1.7. Siano X uno SVT e M un sottospazio vettoriale di X. Lo spazio quoziente X/M è di Hausdorff se e solo se M è chiuso in X.

Dimostrazione. Il complementare dell'origine in X/M è $\pi(\complement M)$, essendo al solito π la proiezione canonica di X su X/M. Poiché π è continua e aperta $\pi(\complement M)$ è aperto in X/M se e solo se $\complement M$ è aperto in X, cioè se e solo se M è chiuso in X. Per concludere basta ricordare il Corollario della Proposizione 1.5. #

Sulla base del Teorema 1.1 si verifica agevolmente quanto afferma la

PROPOSIZIONE 1.8. Siano X uno spazio vettoriale, $(X_\iota)_{\iota\in I}$ una famiglia di spazi vettoriali topologici e, per ogni $\iota \in I$, sia $f_\iota : X \to X_\iota$ un'applicazione lineare.
La topologia debole (o proiettiva) su E rispetto alla famiglia $(f_\iota)_{\iota\in I}$ [v. §1, n.4] è vettoriale.
In particolare, la topologia prodotto su $\prod\limits_{\iota\in I} X_\iota$ [v. §1, n. 4] è vettoriale.

Se X è uno SVT, dicesi un sottospazio di X ogni sottospazio vettoriale di E dotato della topologia indottavi da quella di X. E' chiaro che un sottospazio di uno SVT X è uno SVT ed è di Hausdorff se tale è X.
In conformità con la definizione generale di isomorfismo tra due strutture data al n. 12 del §1, se X, Y sono due spazi vettoriali topologici, un isomorfismo di X in Y (per le strutture di spazio vettoriale topologico) è una iniezione lineare $f: X \to Y$ continua assieme alla sua inversa (definita su $f(X)$).
Dunque due spazi vettoriali topologici sono isomorfi se essi sono isomorfi algebricamente (in quanto spazi vettoriali) e topologicamente.

Sia, ora, X uno SVT e $(X_i)_{i=1,..,n}$ una famiglia (finita) di sottospazi vettoriali di X tali che $X = \bigoplus\limits_{i=1}^n X_i$. (V. §3, n.3).

Si consideri l'applicazione $\varphi : \prod\limits_{i=1}^n X_i \to X$ definita da $(x_i)_{i=1,..,n} \longmapsto \sum\limits_{i=1}^n x_i$; trattasi evidentemente di un isomorfismo algebrico suriettivo.
Se $\prod\limits_{i=1}^n X_i$ ha la topologia prodotto, φ è continua: infatti l'addizione in X è continua.
Se anche φ^{-1} è continua, cioè se φ è un isomorfismo (di spazi vettoriali topologici), X dicesi la somma diretta topologica dei suoi sottospazi $X_1, .., X_n$.

Dalla Proposizione 4.4 del §1 discende che φ^{-1} è continua se e solo se sono continue le applicazioni $x = \sum\limits_{j=1}^n x_j \mapsto x_i$ di X su X_i.

Siano X, Y spazi vettoriali e $f: X \to Y$ un'applicazione lineare. Al solito poniamo $\operatorname{Ker} f = \{x \in X : f(x) = 0\}$.
Esiste una e una sola applicazione applicazione lineare $\bar f : X/_{\operatorname{Ker} f} \to Y$ tale che

(1.1) $$f = \bar f \circ \pi \;,$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ X/_{\operatorname{Ker} f} \arrow[ur, "\bar f"'] & \end{tikzcd}$$

ove π è la proiezione canonica di E su $E/_{\operatorname{Ker} f}$.
Infatti $\bar f$ è ben definita da $\bar f(\pi(x)) = f(x)$ perchè, essendo π e f lineari, si ha
$\pi(x) = \pi(y) \Rightarrow \pi(x-y) = 0 \Rightarrow x - y \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow f(x-y) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y)$.
$\bar f$ è chiaramente lineare. Inoltre $\bar f$ è iniettiva perchè, ricordando (1.1), si ha
$\bar f(\pi(x)) = \bar f(\pi(y)) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow f(x-y) = 0 \Rightarrow x - y \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow \pi(x-y) = 0 \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)$.
Diremo che (1.1) è la fattorizzazione usuale di f e che $\bar f : X/_{\operatorname{Ker} f} \to Y$ è l'iniezione associata a f.

PROPOSIZIONE 1.9. f è continua se e solo se $\bar f$ è continua.

Dimostrazione. Se $\bar f$ è continua tale è f, perchè componendo due applicazioni continue si ottiene una applicazione continua.
Viceversa, se f è continua tale è $\bar f$, perchè, se A è un aperto di Y, $\bar f^{-1}(A)$ è un aperto di $X/_{\operatorname{Ker} f}$; per convincersene basta pensare che $\bar f^{-1}(A) = \pi(f^{-1}(A))$, che $f^{-1}(A)$ è aperto in E (in quanto f è continua) e che l'applicazione π è aperta. #
Se X, Y sono spazi vettoriali topologici, un omomorfismo di X in Y (per le strutture di spazio vettoriale topologico) è un'applicazione lineare $f: X \to Y$ continua e (relativamente) aperta [nel senso che, per ogni aperto A di X, $f(A)$ è aperto nel sottospazio $f(X)$ di Y]. E' chiaro che l'applicazione lineare $f: X \to Y$ è un omomorfismo se e solo se $\bar f$ è un isomorfismo.

PROPOSIZIONE 1.10. In uno spazio vettoriale topologico l'inviluppo equilibrato di un compatto è compatto.

Dimostrazione. Sia K una parte compatta di uno spazio vettoriale topologico X. L'inviluppo equilibrato di K è l'immagine, tramite la funzione continua $(\lambda,x)\mapsto \lambda x$, del compatto $\{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda|\le 1\}\times K$ di $\mathbb{C}\times X$ e dunque è compatto. #

PROPOSIZIONE 1.11. Sia $(A_\iota)_{\iota\in I}$ una famiglia di parti convesse di uno spazio vettoriale X. L'inviluppo convesso dell'unione $\bigcup_{\iota\in I} A_\iota$ è l'insieme delle combinazioni lineari $\sum'_{\iota\in I}\lambda_\iota x_\iota$ ove $x_\iota\in A_\iota$, $\lambda_\iota\ge 0$ $\forall \iota\in I$ ($\lambda_\iota=0$ tranne per un numero finito di indici) e $\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota=1$.

Dimostrazione. L'insieme, diciamolo C, di queste combinazioni lineari è, evidentemente, contenuto in ogni convesso contenente $\bigcup_{\iota\in I}A_\iota$, e dunque è contenuto nell'inviluppo convesso di tale unione. Proviamo che, viceversa, l'inviluppo convesso di $\bigcup_{\iota\in I}A_\iota$ è contenuto in C. Essendo $A_\iota\subseteq C$ $\forall\iota\in I$, basta mostrare che C è convesso. A tale scopo consideriamo due punti $x=\sum_{\iota\in I}\lambda_\iota x_\iota$ e $y=\sum_{\iota\in I}\mu_\iota y_\iota$ di C e un numero $\alpha\in]0,1[$. Poniamo $\gamma_\iota=\alpha\lambda_\iota+(1-\alpha)\mu_\iota$ e indichiamo con J la parte (finita) di I formata dagli indici ι tali che $\gamma_\iota\ne 0$. Si ha

$$\alpha x+(1-\alpha)y=\sum'_{\iota\in I}\alpha\lambda_\iota x_\iota+(1-\alpha)\mu_\iota y_\iota=\sum_{\iota\in J}\gamma_\iota\left(\gamma_\iota^{-1}(\alpha\lambda_\iota x_\iota+(1-\alpha)\mu_\iota y_\iota)\right),$$

da cui $\alpha x+(1-\alpha)y\in C$ perché $\gamma_\iota^{-1}(\alpha\lambda_\iota x_\iota+(1-\alpha)\mu_\iota y_\iota)\in A_\iota$ e $\sum_{\iota\in J}\gamma_\iota=1$. #

PROPOSIZIONE 1.12. Siano A_i, $i=1,\dots,n$, parti convesse e compatte di uno spazio vettoriale topologico X. L'inviluppo convesso dell'unione $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ è compatto in X.

Dimostrazione. Basta osservare che (per la Proposizione precedente) tale inviluppo è l'immagine del compatto $\{(\lambda_i)_{i=1,\dots,n}\in(\mathbb{R}^+)^n : \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\}\times\prod_{i=1,\dots,n}A_i$ di $\mathbb{R}^n\times X^n$ tramite la funzione continua $(\lambda_1,\dots,\lambda_n,x_1,\dots,x_n)\longmapsto\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n$ di $\mathbb{R}^n\times X^n$ in X. #

Dalle Proposizioni 1.10 e 1.12 segue la

PROPOSIZIONE 1.13. Siano A_i, $i=1,\dots,n$, parti convesse e compatte di uno spazio vettoriale topologico X. L'inviluppo convesso equilibrato (cioè l'inviluppo convesso dell'inviluppo equilibrato) di $\bigcup_{i=1,\dots,n}A_i$ è compatto in X.

2. PSEUDO-SEMINORME. OGNI TOPOLOGIA VETTORIALE È DEFINITA DA UNA FAMIGLIA DI PSEDO-SEMINORME. UNIFORMITÀ CANONICA COMPATIBILE CON UNA TOPOLOGIA VETTORIALE. SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI PSEUDOMETRIZZABILI E METRIZZABILI. COMPLETAMENTI. SOTTOINSIEMI LIMITATI DI UNO SPAZIO VETTORIALE TOPOLOGICO.

Se X è uno spazio vettoriale, una pseudo-seminorma su X è un'applicazione $x \mapsto |x|$ di X in $\mathbb{R}$ tale che

$$(2.1)\quad \begin{cases} |\lambda| \le 1 \implies |\lambda x| \le |x| & \forall x \in X \\ |x+y| \le |x| + |y| & \forall x, y \in X \\ |0| = 0 & ; \end{cases}$$

se inoltre

$$(2.2)\qquad |x| = 0 \implies x = 0\,,$$

allora $x \mapsto |x|$ dicesi una pseudo-norma.

Si osservi che (2.1) implicano $|x| \ge 0$ $\forall x \in X$; infatti per ogni $x \in X$ risulta per (2.1) $0 = |0| = |0x| \le |x|$.

E' inoltre immediato verificare che l'applicazione $(x,y) \mapsto |x-y|$ di $X \times X$ in $\mathbb{R}$ è una pseudometrica (una metrica se vale (2.2)) su X invariante per traslazioni, che diremo associata alla pseudo-seminorma $x \mapsto |x|$. [V. § 2, n.1 e § 3, n.6].

LEMMA 2.1. Sia $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi equilibrati di uno spazio vettoriale X tale che

$$(2.3)\qquad V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n\,.$$

Esiste una pseudo-seminorma $x \mapsto |x|$ su X tale che

$$(2.4)\qquad \{x \in X : |x| < 1/2^n\} \subseteq V_n \subseteq \{x \in X : |x| \le 1/2^n\}\,.$$

Dimostrazione. Per ogni parte finita e non vuota I di $\mathbb{N}$ poniamo $V_I = \sum_{i \in I} V_i$ e definiamo la funzione $x \mapsto |x|$ di X in $[0,1]$ ponendo

$$|x| \begin{cases} = 1 & \text{se } x \notin V_I \text{ qualunque sia la parte finita non vuota } I \text{ di } \mathbb{N} \\ = \inf\left\{\sum_{i \in I} 1/2^i : I \text{ parte finita non vuota di } \mathbb{N} \text{ tale che } x \in V_I\right\} & \text{se } x \in V_I \text{ per qualche} \end{cases}$$

Verifichiamo che la funzione così definita è una pseudo-seminorma, cioè che soddisfa a (2.1).

La prima delle (2.1) è vera, perchè ogni V_I è equilibrato; la terza delle (2.1) è vera perchè l'origine di E appartiene a ogni V_n.

Se I è una parte finita e non vuota di $\mathbb{N}$, poniamo $p_I = \sum_{i \in I} 1/2^i$.

Per verificare la seconda delle (2.1), osserviamo che essa è banalmente vera se $|x| + |y| \ge 1$; pertanto supponiamo $|x| + |y| < 1$. Se $\varepsilon > 0$ è un numero reale tale che $|x| + |y| + 2\varepsilon < 1$, esistono due parti finite e non vuote L, M di $\mathbb{N}$ tali che $x \in V_L$, $y \in V_M$, $p_L < |x| + \varepsilon$, $p_M < |y| + \varepsilon$.

Essendo $p_L + p_M < 1$, esiste un'unica parte finita e non vuota N di $\mathbb{N}$ tale che $p_L + p_M = p_N$. Da (2.3) si deduce allora $V_L + V_M \subseteq V_N$, donde $x + y \in V_N$, da cui $|x+y| \le p_N = p_L + p_M < |x| + |y| + 2\varepsilon$, donde infine $|x+y| \le |x| + |y|$, data l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

Verifichiamo (2.4). Se $x \in V_n$, allora si ha evidentemente $|x| \le 1/2^n$; d'altra parte se $|x| < 1/2^n$ esiste una parte finita e non vuota I di $\mathbb{N}$ tale che $x \in V_I$ e $\sum_{i \in I} 1/2^i < 1/2^n$, donde $n < i$ $\forall i \in I$, che implica $V_i \subseteq V_n$ $\forall i \in I$, donde $V_I \subseteq V_n$, donde infine $x \in V_n$. #

Siano, ora, X uno spazio vettoriale topologico, $\mathcal{T}$ la sua topologia e $\mathcal{F}(0)$ il filtro degli intorni dell'origine in X.
Per ogni $V \in \mathcal{F}(0)$ scegliamo una successione $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di intorni equilibrati dell'origine in X tali che $V_1 \subseteq V$, $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$ se $n \geq 1$. [Una tale successione esiste per il Teorema 1.1].
In virtù del Lemma 3.1 esiste una pseudoseminorma su X – che per semplicità indicheremo con $x \mapsto |x|_V$ (anche se essa dipende, oltre che da V, dalla scelta fatta della successione $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con la proprietà suddetta) – tale che

(2.5) $$\{x \in X : |x|_V < \tfrac{1}{2^n}\} \subseteq V_n \subseteq \{x \in X : |x|_V \leq \tfrac{1}{2^n}\}.$$

Indichiamo con $\mathcal{T}'$ la topologia su X definita dalla famiglia $(|\cdot|_V)_{V \in \mathcal{F}(0)}$ di pseudo-seminorme, cioè la topologia su X definita dalla famiglia $(d_V)_{V \in \mathcal{F}(0)}$ di pseudometriche (invarianti per traslazioni), ove $d_V(x,y) = |x-y|_V$.

Sappiamo [v. §2, n.3] che una prebase di intorni dell'origine in E per $\mathcal{T}'$ è $(\{x \in X : |x|_V < \tfrac{1}{2^n}\})_{n \in \mathbb{N},\, V \in \mathcal{F}(0)}$ oppure $(\{x \in X : |x|_V \leq \tfrac{1}{2^n}\})_{n \in \mathbb{N},\, V \in \mathcal{F}(0)}$; anzi da (2.5) segue facilmente che queste sono basi di intorni dell'origine in X per $\mathcal{T}'$. Da esse, ovviamente, si ottengono due basi intorni del punto generico x di X mediante una traslazione del vettore x.
Allora, in virtù di (2.5), il filtro degli intorni dell'origine – e quindi di ogni punto – di X è lo stesso per $\mathcal{T}$ e per $\mathcal{T}'$, come si riconosce immediatamente; pertanto $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.
Dunque la topologia $\mathcal{T}$ di X è definita dalla famiglia $(|\cdot|_V)_{V \in \mathcal{F}(0)}$ di pseudo-seminorme e quindi è uniformizzabile.
Sappiamo [v. §2, n.3] che una base dell'uniformità, diciamola $\mathcal{U}$, compatibile con $\mathcal{T}$, cioè dell'uniformità su X definita dalla famiglia $(d_V)_{V \in \mathcal{F}(0)}$ di pseudometriche $[d_V(x,y) = |x-y|_V]$ è

$$(\{(x,y) \in X \times X : |x-y|_V < \tfrac{1}{2^n}\})_{n \in \mathbb{N},\, V \in \mathcal{F}(0)}, \text{ oppure } (\{(x,y) \in X \times X : |x-y| \leq \tfrac{1}{2^n}\})_{n \in \mathbb{N},\, V \in \mathcal{F}(0)}.$$

Poiché da (2.5) segue
$$\{(x,y) \in X \times X : |x-y|_V < \tfrac{1}{2^n}\} \subseteq \{(x,y) \in X \times X : x-y \in V_n\} \subseteq \{(x,y) \in X \times X : |x-y|_V \leq \tfrac{1}{2^n}\},$$
si riconosce immediatamente che una base dell'uniformità $\mathcal{U}$ è anche
$$\mathcal{B} = \{\hat{U} : U \in \mathcal{F}(0)\},$$
ove $\hat{U} = \{(x,y) \in X \times X : x-y \in U\}$ e $\mathcal{F}(0)$ è il filtro degli intorni dell'origine in X.
Si osservi che $\mathcal{B}$ è invariante per traslazioni, nel senso che ogni suo elemento $\hat{U}$ è invariante per traslazioni.
Verifichiamo che, se $\mathcal{U}_1$ è una uniformità su X compatibile con $\mathcal{T}$, di cui una base $\mathcal{B}_1$ è invariante per traslazioni (nel senso anzidetto), allora $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}$.
Poiche $\mathcal{U}_1$ è compatibile con $\mathcal{T}$, posto per ogni $B \in \mathcal{B}_1$, $B(0) = \{y \in X : (y,0) \in B\}$, allora $(B(0))_{B \in \mathcal{B}_1}$ è una base di $\mathcal{F}(0)$, (v. §2, n. 3); inoltre, essendo $\mathcal{B}_1$ invariante per traslazioni, risulta $B(0) = \{x-y : x,y \in X,\ (x-y,0) \in B\} = \{x-y : (x,y) \in B\}$. Di conseguenza $\{\widehat{B(0)} : B \in \mathcal{B}_1\}$ è una base di $\mathcal{U}$ e si ha $\widehat{B(0)} = \{(x,y) \in E \times E : x-y \in B(0)\} = B$; dunque $\mathcal{B}_1$ è una base anche di $\mathcal{U}$ e quindi $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}$.
Possiamo pertanto enunciare il seguente

TEOREMA 2.1. Ogni topologia vettoriale è definita da una famiglia di pseudo-seminorme (cioè dalla famiglia delle pseudometriche associate a tali pseudo-seminorme) e quindi è uniformizzabile.

Se X è uno spazio vettoriale topologico esiste (una e) una sola uniformità $\mathcal{U}$ su X compatibile con la topologia di X con la proprietà di avere una base invariante per traslazioni; una base di $\mathcal{U}$ invariante per traslazioni è $\{\hat{U} : U \in \mathcal{F}(0)\}$, ove $\hat{U} = \{(x,y) \in X \times X : x - y \in U\}$ e $\mathcal{F}(0)$ è il filtro degli intorni dell'origine in X.

Diremo che $\mathcal{U}$ è l'uniformità canonica dello spazio vettoriale topologico X.

OSSERVAZIONE. Siano X, Y spazi vettoriali topologici e $f : X \to Y$ un'applicazione. Dicendo che f è uniformemente continua si intende che f è tale rispetto all'uniformità canonica $\mathcal{U}_X$ di X e all'uniformità canonica $\mathcal{U}_Y$ di Y.

Ricordando che una base di $\mathcal{U}_X$ è $\{\hat{V} : V \in \mathcal{F}_X(0)\}$ e che una base di $\mathcal{U}_Y$ è $\{\hat{U} : U \in \mathcal{F}_Y(0)\}$ – essendo $\mathcal{F}_X(0)$ e $\mathcal{F}_Y(0)$ sono i filtri degli intorni dell'origine in X e in Y, $\hat{V} = \{(x_1,x_2) \in X \times X : x_1 - x_2 \in V\}$, $\hat{U} = \{(y_1,y_2) \in Y \times Y : y_1 - y_2 \in U\}$ – si ha (v. §2, n.5) che $f : X \to Y$ è uniformemente continua se e solo se per ogni $U \in \mathcal{F}_Y(0)$ esiste $V \in \mathcal{F}_X(0)$ tale che $x_1 - x_2 \in V \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) \in U$.

Analogamente, dicendo che uno spazio vettoriale topologico X è completo si intende che tale è lo spazio uniforme $(X, \mathcal{U}_X)$, ove $\mathcal{U}_X$ è l'uniformità canonica di X; dicendo che un filtro su X o che una rete in X è di Cauchy si intende che è di Cauchy rispetto all'uniformità canonica $\mathcal{U}_X$.

Ricordando che una base di $\mathcal{U}_X$ è $\{\hat{U} : U \in \mathcal{F}_X(0)\}$ si riconosce immediatamente [v. §2, n. 8] che un un filtro $\mathcal{F}$ su X è di Cauchy se e solo se per ogni $U \in \mathcal{F}_X(0)$ esiste $M \in \mathcal{F}$ tale che $M - M \subseteq U$ e che una rete $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ in X è di Cauchy se e solo se per ogni $U \in \mathcal{F}_X(0)$ esiste $\alpha_0 \in A$ tale che $\alpha, \beta \geq \alpha_0 \Rightarrow x_\alpha - x_\beta \in U$.

PROPOSIZIONE 2.1. Un'applicazione lineare e continua di uno SVT in un altro è uniformemente continua.

La dimostrazione è banale.

PROPOSIZIONE 2.2. Un isomorfismo f di uno spazio vettoriale topologico X in uno spazio vettoriale topologico Y è anche un isomorfismo dello spazio uniforme $(X, \mathcal{U}_X)$ nello spazio uniforme $(Y, \mathcal{U}_Y)$, essendo $\mathcal{U}_X$ e $\mathcal{U}_Y$ le uniformità canoniche di X e di Y.

Dimostrazione. Per la Proposizione 2.1, f è uniformemente continua assieme alla sua inversa e quindi è un isomorfismo uniforme di $(X, \mathcal{U}_X)$ in $(Y, \mathcal{U}_Y)$. [v. §2, n. 7]. #

Uno SVT è detto pseudometrizzabile (metrizzabile) se tale è la sua topologia [v. §2, n. 2].

TEOREMA 2.2. Uno SVT è pseudometrizzabile se e solo se il filtro degli intorni dell'origine ha una base numerabile.

La topologia di uno SVT pseudometrizzabile (metrizzabile) è definita da una pseudo-seminorma (pseudo-norma).

Dimostrazione. Sia X uno spazio vettoriale topologico.

Se X è pseudometrizzabile e d è una pseudometrica definente la topologia di X una base (numerabile) di intorni dell'origine in X è l'insieme delle d-sfere $S_d(0, 1/n) = \{x \in E : d(x,0) < 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Viceversa, il filtro degli intorni dell'origine in X abbia una base numerabile: $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Per il Teorema 1.1 si può supporre che ogni V_n sia equilibrato e che $V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. In virtù del Lemma 2.1 esiste una pseudo-seminorma $x \mapsto |x|$ su X tale che valgano (2.4); ne segue, evidentemente, che la topologia di X è definita dalla pseudo-seminorma $x \mapsto |x|$, ossia dalla pseudometrica ad essa associata.

Per concludere la dimostrazione osserviamo che, se X è di Hausdorff, in base alla Proposizione 1.5 si ha $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \Rightarrow x = 0$; allora da (2.4) segue (2.2) e quindi $x \mapsto |x|$ è una pseudo-norma. #

PROPOSIZIONE 2.3. Siano X uno SVT e M un sottospazio vettoriale di X.
Se X è pseudometrizzabile, tale è lo spazio quoziente X/M; se $x \mapsto |x|$ è una pseudo-seminorma definente la topologia di X, allora

$$(2.7) \qquad \hat{x} \mapsto |\hat{x}| = \inf_{x \in \hat{x}} |x| \quad , \quad (\hat{x} = x + M),$$

è una pseudo-seminorma su X/M definente la topologia di X/M.
Se X è pseudometrizzabile e completo, tale è lo spazio quoziente X/M.

Dimostrazione. Sia X pseudometrizzabile e sia [v. Teorema 2.1] $x \mapsto |x|$ una pseudo-seminorma definente la topologia di X. Verifichiamo che (2.7) è una pseudo-seminorma su X/M. La prima e la terza delle (2.1) sono ovviamente soddisfatte; per quanto riguarda la seconda si osservi che, dati $\hat{x}, \hat{y} \in X/M$, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $x \in \hat{x}$, $y \in \hat{y}$ tali che $|x| < |\hat{x}| + \varepsilon$, $|y| < |\hat{y}| + \varepsilon$, donde $|\hat{x} + \hat{y}| \leq |x+y| \leq |x| + |y| \leq |\hat{x}| + |\hat{y}| + 2\varepsilon$.

Poniamo, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n = \{x \in X : |x| < 1/n\}, \qquad \hat{V}_n = \{\hat{x} \in X/M : |\hat{x}| < 1/n\}.$$

$(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una base di intorni dell'origine in X e quindi, detta π la proiezione canonica di E su E/M, $(\pi(V_n))_{n \in \mathbb{N}}$ è una base di intorni dell'origine in X/M. Verifichiamo che $\pi(V_n) = \hat{V}_n$; ne seguirà che $x \to |\hat{x}|$ definisce la topologia di X/M e che, quindi, X/M è pseudometrizzabile (metrizzabile se tale è X e se M è chiuso in X). Se $x \in V_n$, cioè se $|x| < 1/n$, si ha ovviamente $|\hat{x}| < 1/n$; cioè $\hat{x} \in \hat{V}$, donde $\pi(V_n) \subseteq \hat{V}_n$, perché $\hat{x} = \pi(x)$. Viceversa se $\hat{x} \in \hat{V}_n$, cioè se $|\hat{x}| < 1/n$, esiste $x \in \hat{x}$ tale che $|x| < 1/n$, cioè tale che $x \in V_n$, donde $\hat{V}_n \subseteq \pi(V_n)$.

Sia, infine, X pseudometrizzabile e completo e proviamo che lo spazio pseudometrizzabile X/M è completo. Data una successione di Cauchy $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X/M esiste una sottosuccessione $(\hat{x}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ di $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che

$$|\hat{x}_{n_{k+1}} - \hat{x}_{n_k}| < \frac{1}{2^k};$$

$(\hat{x}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ si definisce per induzione nel modo seguente: n_1 è il più piccolo numero naturale tale che $n, m \geq n_1 \Rightarrow |\hat{x}_n - \hat{x}_m| < \frac{1}{2}$, n_{k+1} è il più piccolo numero naturale maggiore di n_k tale che $n, m \geq n_{k+1} \Rightarrow |\hat{x}_n - \hat{x}_m| < \frac{1}{2^{k+1}}$.

Allora, per ogni $k \in \mathbb{N}$, esiste $y_k \in \hat{x}_{n_{k+1}} - \hat{x}_{n_k}$ tale che $|y_{n_k}| < \frac{1}{2^k}$. Scelto arbitrariamente $x_{n_1} \in \hat{x}_{n_1}$, poniamo $x_{n_k} = x_{n_1} + \sum_{i=1}^{k} y_i \quad \forall k \geq 2$; ricordando che $\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} = 1$, si constata facilmente che la successione $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in X e quindi converge verso qualche $x \in X$. Per la continuità di π, segue che $(\hat{x}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge in X/M; essendo $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di Cauchy in X/M, anche $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge in X/M e quindi X/M è completo. #

Se lo spazio vettoriale topologico X non è pseudometrizzabile, la completezza di X non implica, in generale la completezza di X/M.

Se X è uno spazio vettoriale topologico, ogni coppia (i, X^*), ove X^* è uno spazio vettoriale topologico completo e i è un isomorfismo (per la struttura di SVT) di X in X^* tale che $i(X)$ è denso in X^* dicesi un <u>completamento</u> di X.

TEOREMA 2.3. <u>Ogni spazio vettoriale topologico ammette dei completamenti.</u>
<u>Uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff X ha un unico completamento (i, X^*) con X^* di Hausdorff a meno di un isomorfismo</u> (nel senso che, se (i_1, X_1^*), (i_2, X_2^*) sono completamenti di X, con X_1^* e X_2^* di Hausdorff, esiste un isomorfismo g di X_1^* su X_2^* tale che $i_2 = g \circ i_1$).

Dimostrazione. Sia X uno spazio vettoriale topologico. Per il Teorema 2.1, la topologia di X è definita da una famiglia, sia $\mathcal{P}$, di pseudometriche invarianti per traslazioni (associate a pseudo-seminorme) ciascuna delle quali definisce una topologia vettoriale su X.
Per ogni $d \in \mathcal{P}$, sia $(i_d, (X_d^*, d^*))$ il completamento di (X, d) considerato nella dimostrazione del Teorema 9.1 del §2.
L'insieme X_d^* è atteggiabile a spazio vettoriale ponendo $x^* + y^* = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\lambda x^* = (\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ per ogni $x^* = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y^* = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X_d^*$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$.
Si constata facilmente che la pseudometrica d^* definita da $d^*(x^*, y^*) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n)$ definisca su X^* una topologia vettoriale; dunque X_d^* è uno spazio vettoriale topologico (pseudometrizzabile) completo.
Definiamo $i : X \to \prod_{d \in \mathcal{P}} X_d^*$, ponendo $i(x) = (i_d(x))_{d \in \mathcal{P}}$. Lo spazio prodotto $\prod_{d \in \mathcal{P}} X_d^*$ è uno spazio vettoriale topologico [v. Proposizione 1.8] ed è completo in quanto prodotto di spazi completi [v. Teorema 8.1 del §2].
L'applicazione i è lineare e iniettiva, perchè tale è ogni i_d.
Inoltre i è continua in virtù del Corollario 1 del Teorema 6.1 del §2, perchè si ha $i_d = p_d \circ i$, ove p_d è la proiezione di $\prod_{d \in \mathcal{P}} X_d^*$ su X_d^* la quale è continua.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "i_d"'] & X^* \subseteq \prod_{d \in \mathcal{P}} X_d^* \arrow[d, "p_d"] \\ & X_d^* \end{tikzcd}$$

Anche $i^{-1} : i(X) \to X^*$ è continua, perchè p_d è continua e i_d è una isometria.
Allora, detta X^* la chiusura di $i(X)$ in $\prod_{d \in \mathcal{P}} X_d^*$, la coppia (i, X^*) è un completamento di X.
Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato si procede come nella dimostrazione del Teorema 9.3 del §2. #

* * * * *

Un sottoinsieme A di uno spazio vettoriale topologico X dicesi <u>limitato</u> se A è assorbito da ogni intorno dell'origine in X.
Poichè l'insieme degli intorni equilibrati dell'origine in X è una base di intorni dell'origine in X, si riconosce immediatamente che <u>A è limitato se e solo se per ogni intorno U dell'origine in X esiste un numero reale $\lambda_U > 0$ tale che $A \subseteq \lambda_U U$.</u>

PROPOSIZIONE 2.4. <u>I compatti di uno SVT sono limitati.</u>
Dimostrazione. Sia K un compatto di uno SVT X e sia U un intorno dell'origine in X aperto ed equilibrato [v. Proposizione 1.3]. Poichè U è assorbente si ha $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nU$. Essendo K compatto, esistono $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ tali che $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} n_i U$. Dal fatto che U è equilibrato segue $\bigcup_{i=1}^{r} n_i U = \max\{n_1, \dots, n_r\} U$. Dunque $K \subseteq \max\{n_1, \dots, n_r\} U$. #

3. SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI DI DIMENSIONE FINITA.

TEOREMA 3.1. Ogni SVT di Hausdorff X di dimensione finita n è isomorfo a $\mathbb{C}^n$: precisamente, se $(a_1,..,a_n)$ è una base dello spazio vettoriale X, l'isomorfismo algebrico

(3.1) $$(x_1,..,x_n) \longmapsto x_1 a_1 + .. + x_n a_n$$

di $\mathbb{C}^n$ su X è anche un omeomorfismo e quindi è un isomorfismo di spazio vettoriale topologico.

Ogni applicazione lineare definita in uno SVT di Hausdorff di dimensione finita e a valori in uno SVT è continua.

Dimostrazione. L'applicazione (3.1) è continua in virtù della continuità della moltiplicazione per uno scalare e dell'addizione in uno SVT. Dimostriamo che anche l'inversa della (3.1) è continua.

Ciò è vero, innanzitutto, se $n=1$, cioè è continua l'applicazione $xa \mapsto x$ di E in $\mathbb{C}$ se X ha dimensione 1 e $a \in E$, $a \neq 0$. Infatti, dato (arbitrariamente) il numero reale $\varepsilon > 0$ esiste (perchè E è di Hausdorff: v. Proposizione 1.4) un intorno equilibrato U dell'origine in X tale che $\varepsilon a \notin U$, donde $xa \in U \Rightarrow |x| < \varepsilon$, perchè se $|x| \geq \varepsilon$, cioè se $|\varepsilon/x| \leq 1$, da $xa \in U$ segue $\varepsilon/x\,(xa) = \varepsilon a \in U$ (essendo U equilibrato); dunque l'applicazione $xa \to x$ di X in $\mathbb{C}$ è continua nell'origine e quindi è continua in ogni punto.

Ragionando per induzione, dimostriamo la continuità di $x_1 a_1 + .. + x_n a_n \mapsto (x_1,..,x_n)$ per $n > 1$, supponendo che, se Y è uno SVT di Hausdorff di dimensione $n-1$ e $(b_1,..,b_{n-1})$ è una base di Y, l'applicazione $\eta_1 b_1 + .. + \eta_{n-1} b_{n-1} \mapsto (\eta_1,..,\eta_{n-1})$ di Y su $\mathbb{C}^{n-1}$ sia continua.

In base al Corollario della Proposizione 4.4 del §1, per dimostrare la continuità dell'applicazione $x_1 a_1 + .. + x_n a_n \mapsto (x_1,..,x_n)$ di X su $\mathbb{C}^n$ basta (e occorre) dimostrare la continuità delle forme lineari $x_1 a_1 + .. + x_n a_n \mapsto x_i$, $(i=1,..,n)$, su X. A tale scopo proviamo che ogni forma lineare φ su X è continua.

Se $\varphi = 0$, la cosa è ovvia. Se $\varphi \neq 0$, il nucleo $\operatorname{Ker}\varphi$ di φ ha dimensione $n-1$ [v. Proposizioni 5.1 e 5.3 del § 3] e quindi, per l'ipotesi induttiva, è isomorfo (in quanto SVT) a $\mathbb{C}^{n-1}$ e quindi è completo perchè tale è $\mathbb{C}^{n-1}$ [v. Teoremi 8.1 e 8.3 del §2]; di conseguenza $\operatorname{Ker}\varphi$ è chiuso in X perchè X è di Hausdorff [v. Proposizione 8.3 del §2], e quindi $X/_{\operatorname{Ker}\varphi}$ è di Hausdorff [v. Proposizione 2.2].

Consideriamo la fattorizzazione usuale, [v. n.1], di φ:
$$\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi .$$

Poichè $X/_{\operatorname{Ker}\varphi}$ è uno SVT di Hausdorff di dimensione 1, $\bar{\varphi}: X/_{\operatorname{Ker}\varphi} \to \mathbb{C}$ è continua; infatti, assunto come base di $X/_{\operatorname{Ker}\varphi}$ un punto $\hat{a}$ tale che $\bar{\varphi}(\hat{a}) = 1$, si ha $\bar{\varphi}: \xi \hat{a} \mapsto \xi$, $(\xi \in \mathbb{C})$, e quindi $\bar{\varphi}$ è continua per quanto s'è detto sopra a proposito del caso $n=1$.

Dalla continuità di $\bar{\varphi}$ segue la continuità di φ e così è dimostrata la prima parte del Teorema e anche il fatto che ogni forma lineare su E è continua.

Per concludere mostriamo che, se Y è uno SVT, ogni applicazione lineare $f: X \to Y$ è continua.

Infatti, posto $b_i = f(a_i)$, $i=1,..,n$, si ha immediatamente $f(x) = x_1 b_1 + .. + x_n b_n$ $\forall x = x_1 a_1 + .. + x_n a_n \in X$, donde la continuità di f, essendo continue le forme lineari $x \mapsto x_i$ su X nonchè la moltiplicazione per uno scalare e l'addizione in Y. #

TEOREMA 3.2. Ogni SVT localmente compatto è di dimensione finita.

Dimostrazione. Sia X uno SVT localmente compatto [v. §1, n.11] e sia K un intorno compatto dell'origine in X. Poichè K è compatto e $\frac{1}{2}K$ è un intorno dell'origine in X, esiste una famiglia finita $(x_1, .., x_r)$ di punti di K tale che $K \subseteq (x_1 + \frac{1}{2}K) \cup \cdot\cdot \cup (x_r + \frac{1}{2}K)$.

Sia M il sottospazio di X generato da $\{x_1, .., x_r\}$. M è uno SVT di Hausdorff di dimensione finita e quindi (per il Teorema 3.1) è completo e dunque chiuso in X. Ne segue che X/M è di Hausdorff (v. Proposizione 1,7).

Poichè $K \subseteq M + \frac{1}{2}K$, detta π la proiezione canonica di X su X/M, si ha $\pi(K) \subseteq \frac{1}{2}\pi(K)$, cioè $\pi(2K) \subseteq \pi(K)$. Iterando il procedimento si ottiene $\pi(2^n K) \subseteq \pi(K)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Essendo K assorbente (in quanto intorno dell'origine) si ha $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} 2^n K$. Perciò $\pi(X) = X/M \subseteq \pi(K)$, donde $X/M = \pi(K)$. Se ne deduce che lo SVT di Hausdorff X/M è compatto (perchè π, in quanto continua, mappa compatti in compatti, per il Teorema 9.1 del §1).

Di conseguenza X/M ha dimensione zero. Se così non fosse X/M conterrebbe un sottospazio del tipo $\mathbb{C}\hat{x}_0$, con $\hat{x}_0 \in X/M$ e $\hat{x}_0 \neq 0$, ovviamente isomorfo a $\mathbb{C}$; ciò è assurdo perchè $\mathbb{C}\hat{x}_0$, in quanto sottoinsieme chiuso di uno spazio topologico compatto, è compatto, mentre $\mathbb{C}$ non lo è.

Dunque X coincide con M e quindi è di dimensione finita. #

4. SPAZI SEMINORMATI E NORMATI E LORO COMPLETAMENTI. SPAZI DI BANACH. SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI SEMINORMABILI E NORMABILI.

Ricordiamo [v. §3, n. 6] che una seminorma su uno spazio vettoriale X è un'applicazione $p: X \to \mathbb{R}^+$ tale che, per ogni $x, y \in X$ e ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ si abbia

$$\begin{cases} p(x+y) \leq p(x) + p(y) \\ p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x). \end{cases}$$

Dalla seconda condizione segue $p(0) = 0$. Se, oltre alle condizioni scritte sopra, si ha

$$p(x) = 0 \implies x = 0$$

allora p dicesi una norma su X.

Uno spazio vettoriale X su cui è assegnata una seminorma (una norma) p dicesi uno <u>spazio seminormato</u> (uno <u>spazio normato</u>) e sarà indicato con (X, p).

Dato uno spazio seminormato (X, p), consideriamo lo spazio vettoriale quoziente $\bar{X} = X/_{\mathrm{Ker}\, p}$, ove $\mathrm{Ker}\, p = \{x \in X : p(x) = 0\}$ e osserviamo che osserviamo che, fissato $x \in X$, p ha lo stesso valore in ogni punto di $\pi(x) = x + \mathrm{Ker}\, p$; infatti, se $y \in \mathrm{Ker}\, p$, si ha $p(x+y) \leq p(x) + p(y) = p(x)$ e $p(x) = p(x+y-y) \leq p(x+y) + p(y) = p(x+y)$. Pertanto ha senso porre, per ogni $x \in X$,

$$(4.1) \qquad \bar{p}(\pi(x)) = p(x).$$

Si constata immediatamente che $\bar{p}$ è una norma su $\bar{X}$. Lo <u>spazio normato $(\bar{X}, \bar{p})$</u> è <u>canonicamente associato allo spazio seminormato (X, p)</u>.

Ricordiamo [v. §3, n. 6] che a ogni seminorma (norma) p su uno spazio vettoriale X resta associata una pseudometrica (metrica) d_p su X ponendo

$$(4.2) \qquad d_p(x, y) = p(x-y).$$

Tale pseudometrica (o metrica) definisce una uniformità e una topologia su X: esse diconsi <u>l'uniformità e la topologia definite dalla seminorma p su X</u>.

Ricordiamo [v. §2, n. 2] che una base dell'uniformità $\mathcal{U}(p)$ su X definita da p è l'insieme delle parti di $X \times X$ del tipo $\{(x, y) \in X \times X : p(x-y) < r\}$, con r reale positivo e che una base di intorni dell'origine in X per la topologia $\mathcal{T}(p)$ definita da p è l'insieme delle p-sfere (con centro nell'origine)

$$S_p(r) = \{x \in X : p(x) < r\}, \quad \text{con } r \text{ reale positivo.}$$

Ricordando [v. Proposizione 6.1 del §3] che le sfere $S_p(r)$ sono sottoinsiemi convessi, equilibrati, assorbenti di X e osservando che (essendo $S_p(r)$ convesso) $S_p(r) + S_p(r) = 2 S_p(r) = S_p(2r)$, dal Teorema 1.1 segue immediatamente che la topologia $\mathcal{T}(p)$ definita su X dalla seminorma p è vettoriale e che quindi <u>uno spazio seminormato (o normato) ha una struttura di spazio vettoriale topologico.</u>

Per quanto si è detto al n. 2 del §2, <u>la topologia $\mathcal{T}(p)$ è di Hausdorff se e solo se p è una norma.</u>

Uno spazio normato (X, p) completo (rispetto all'uniformità $\mathcal{U}(p)$ definita da p) dicesi uno <u>spazio di Banach.</u>

PROPOSIZIONE 4.1. <u>Siano $(X, p_X), (Y, p_Y)$ due spazi seminormati e $(X, d_{p_X}), (Y, d_{p_Y})$ gli spazi pseudometrici ad essi associati tramite (4.2).</u>

<u>Un'applicazione lineare $f: X \to Y$ è una isometria di (X, d_{p_X}) in (Y, d_{p_Y}) se e solo se f conserva le seminorme</u>, cioè se e solo se

$$(4.3) \qquad p_Y(f(x)) = p_X(x) \qquad \forall x \in X.$$

Dimostrazione. Dire che f è una isometria di (X, d_{p_X}) in (Y, d_{p_Y}) significa dire [v. §2, n.1] che $d_{p_Y}(f(x_1), f(x_2)) = d_{p_X}(x_1, x_2)$ $\forall\, x_1, x_2 \in X$ e ciò è equivalente a (4.3) perchè $d_{p_Y}(f(x_1), f(x_2)) = p_Y(f(x_1) - f(x_2)) = p_Y(f(x_1 - x_2))$ e $d_{p_X}(x_1, x_2) = p_X(x_1 - x_2)$. #

Se (X, p_X), (Y, p_Y) sono spazi seminormati, un isomorfismo di X in Y per la struttura di spazi seminormati [v. §1, n.12] è un isomorfismo dello spazio vettoriale X nello spazio vettoriale Y verificante (4.3): lo chiameremo un isomorfismo isometrico (o un isomorfismo conservante le seminorme).

Dalla Proposizione 3.1 del §1 segue immediatamente che, se (X, p_X), (Y, p_Y) sono spazi seminormati, un'applicazione $f: X \to Y$ è continua in $x_0 \in X$ (per le topologie $\mathcal{T}(p_X)$ su X e $\mathcal{T}(p_Y)$ su Y) se e solo se per ogni reale $\varepsilon > 0$ esiste un reale $\delta > 0$ tale che $p_X(x - x_0) \le \delta \Rightarrow p_Y(f(x) - f(x_0)) \le \varepsilon$.

PROPOSIZIONE 4.2. Siano (X, p_X), (Y, p_Y) spazi seminormati. Un'applicazione lineare $f: X \to Y$ è continua (per le topologie $\mathcal{T}(p_X)$ su X e $\mathcal{T}(p_Y)$ su Y) se e solo se esiste un numero reale $c > 0$ tale che

$$p_Y(f(x)) \le c\, p_X(x) \qquad \forall\, x \in X.$$

Dimostrazione. Necessità. Se f è continua (nell'origine) esiste $\delta > 0$ tale che

$$p_X(x) \le \delta \Rightarrow p_Y(f(x)) \le 1,$$

donde, per ogni $x \in X$ tale che $p_X(x) \neq 0$, $p_Y\left(f\left(\delta \frac{x}{p_X(x)}\right)\right) \le 1$, donde infine $p_Y(f(x)) \le \frac{1}{\delta}\, p_X(x)$.
Se $p_X(x) = 0$, la continuità di f implica evidentemente $p_Y(f(x)) = 0$: Quindi (4.4) sussiste con $c = \frac{1}{\delta}$.

Sufficienza. Se sussiste (4.4) e $x_0 \in X$, dato $\varepsilon > 0$ si ha

$$p_X(x - x_0) \le \frac{\varepsilon}{c} \Rightarrow p_Y(f(x) - f(x_0)) = p_Y(f(x - x_0)) \le c\, p_X(x - x_0) \le \varepsilon,$$

donde la continuità di f in x_0. #

PROPOSIZIONE 4.3. Sia $(\bar{X}, \bar{p})$ lo spazio normato canonicamente associato allo spazio seminormato (X, p) e sia (Y, p_Y) uno spazio normato. Se $f: X \to Y$ è lineare e continua (per le topologie $\mathcal{T}(p_X)$ su X e $\mathcal{T}(p_Y)$ su Y), allora, per ogni fissato $x \in X$ f ha lo stesso valore in tutti i punti di $\pi(x) = x + \operatorname{Ker} p \in \bar{X}$ e quindi ha senso porre

$$\bar{f}(\pi(x)) = f(x). \tag{4.5}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & F \\ \bar{E} = E/\operatorname{Ker} p \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

L'applicazione $\bar{f}: \bar{X} \to Y$ definita da (4.5) è lineare, continua e risulta $f = \bar{f} \circ \pi$.

Dimostrazione. Se $y \in \operatorname{Ker} p$, cioè se $p(y) = 0$, si ha $f(y) = 0$ perchè, per il Teorema 4.1, risulta $p_Y(f(y)) \le c\, p_E(y) = 0$. Pertanto si ha $f(x + y) = f(x) + f(y) = f(x)$ $\forall\, y \in \operatorname{Ker} p$. L'applicazione $\bar{f}: \bar{X} \to Y$ definita da (4.5) è ovviamente lineare ed è continua per la Proposizione 4.2, in quanto, essendo f lineare e continua, si ha $p_Y(\bar{f}(\pi(x))) = p_Y(f(x)) \le c\, p_X(x) = c\, \bar{p}(\pi(x))$ $\forall\, x \in X$. #

Dal Teorema 9.1 del §2 sui completamenti di uno spazio pseudometrico discende il seguente

TEOREMA 4.1. (A). Se (X, p) è uno spazio seminormato, esiste un isomorfismo isometrico i di (X, p) in uno spazio seminormato completo (X^*, p^*) tale che $i(X)$ è denso in X^* con la topologia $\mathcal{T}(p^*)$.
Per ogni applicazione lineare continua f di (X, p) in uno spazio normato completo (F, p_F) esiste una e una sola applicazione lineare continua f^* di (X^*, p^*) in (Y, p_Y) tale che $f = f^* \circ i$.

(B). Se $(\hat{X}, \hat{p})$ è lo spazio normato canonicamente associato allo spazio seminormato (X^*, p^*) e π è l'isometria (lineare) canonica di (X^*, p^*) su $(\hat{X}, \hat{p})$, allora $(\hat{X}, \hat{p})$ è completo e $j = \pi \circ i$ è una isometria (lineare) di (X, p) in $(\hat{X}, \hat{p})$ tale che $j(X)$ è denso in $\hat{X}$ con la topologia $\mathcal{T}(\hat{p})$.

(C). Se (X, p) è uno spazio normato, allora l'isometria lineare j è iniettiva, cioè j è un isomorfismo isometrico e la coppia $(j, (\hat{X}, \hat{p}))$ con le proprietà suddette è unica a meno di un isomorfismo isometrico, nel senso che, se j_s, $(s=1,2)$, è un isomorfismo isometrico di (X,p) nello spazio normato completo $(\hat{X}_s, \hat{p}_s)$ tale che $j_s(X)$ è denso in $\hat{X}_s$ con la topologia $\mathcal{T}(\hat{p}_s)$, allora esiste un isomorfismo isometrico g di $(\hat{X}_1, \hat{p}_1)$ su $(\hat{X}_2, \hat{p}_2)$ tale che $j_2 = g \circ j_1$.

Dimostrazione. (A). Sia d_p la pseudometrica associata alla seminorma p, (v. §3, n. 6), definita ponendo $d_p(x,y) = p(x-y)$ $\forall x,y \in X$, e sia $(i, (X^*, d_p^*))$ il completamento dello spazio pseudometrico (X, d_p) considerato nella dimostrazione del Teorema 9.1 del §2.

L'insieme X^* è atteggiabile a spazio vettoriale ponendo $x^* + y^* = (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\lambda x^* = (\lambda x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ per ogni $x^* = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y^* = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^*$ e per ogni scalare λ.

Posto $p^*(x^*) = d_p^*(x^*, 0)$, cioè

$$p^*(x^*) = \lim_{n \to \infty} p(x_n)$$

$\forall x^* = (x_n) \in E^*$, si verifica subito che p^* è una seminorma su X^* tale che $d_p^*(x^*, y^*) = p^*(x^* - y^*)$.

Lo spazio seminormato (X^*, p^*) è completo perchè tale è lo spazio pseudometrico (E^*, d_p^*).

L'isometria iniettiva i è, evidentemente, lineare, cioè è un isomorfismo isometrico. Inoltre $i(E)$ è denso in X^* con la topologia $\mathcal{T}(p^*)$, perchè $\mathcal{T}(p^*) = \mathcal{T}(d_p^*)$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & i(X) \subseteq X^* \arrow[dl, "f \circ i^{-1}"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Infine, se f è un'applicazione lineare continua di (X,p) nello spazio normato completo (Y, p_Y), $f \circ i^{-1} : i(X) \to Y$ è pure lineare e continua e, poichè $i(X)$ è denso in X^* con la topologia $\mathcal{T}(p^*)$, esiste, per il Teorema 8.2 del §2, una e una sola applicazione lineare e continua $f^* : X^* \to Y$ prolungante $f \circ i^{-1}$, cioè tale che $f^*(i(x)) = (f \circ i^{-1})(i(x))$ $\forall x \in X$, ossia tale che $f^* \circ i = f$. [Si ricordi che un'applicazione lineare e continua di uno SVT in un altro è uniformemente continua].

(B) non ha bisogno di dimostrazione. C'è solo da osservare che, per la definizione di spazio normato canonicamente associato a uno spazio seminormato, $\hat{X}$ è lo spazio vettoriale quoziente $X^*/\ker p^*$ e la norma $\hat{p}$ su $\hat{X}$ è definita (v. (4.1)) da $\hat{p}(\hat{x}) = p(x^*)$, ove $\pi(x^*) = \hat{x}$, cioè da

$$\hat{p}(\hat{x}) = \lim_{n \to \infty} p(x_n), \quad \text{ove } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \hat{x},$$

tale limite risultando indipendente dalla scelta di $x^* = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\hat{x}$.

(C). La dimostrazione è analoga a quella della parte (C) del Teorema 9.1 del §2.

Se (X,p) è uno spazio seminormato (o normato), ogni coppia $(i, (X^*, p^*))$, con (X^*, p^*) spazio seminormato completo e i isomorfismo isometrico di (X,p) in (X^*, p^*) tale che $i(X)$ sia denso in X^* con la topologia $\mathcal{T}(p^*)$ dicesi un <u>completamento</u> di (X,p).

Dal Teorema 4.1 segue che <u>ogni spazio seminormato (X,p) ha completamenti</u> e che, <u>se (X,p) è uno spazio normato, esiste, unico a meno di un isomorfismo isometrico, un completamento $(j, (\hat{X}, \hat{p}))$ con $(\hat{X}, \hat{p})$ spazio normato.</u>

Uno spazio vettoriale topologico dicesi <u>seminormabile</u> (<u>normabile</u>) se la sua topologia può essere definita da una seminorma (norma).
$\mathbb{C}$, pensato come spazio vettoriale su se stesso dotato della topologia usuale è normabile: infatti la topologia usuale di $\mathbb{C}$ è definita dalla norma $x \mapsto |x| =$ modulo di x.

Due <u>seminorme</u> (o norme) su uno spazio vettoriale X diconsi <u>equivalenti</u> se definiscono la stessa topologia su X.

Si osservi che <u>due seminorme</u> (o norme) <u>su X equivalenti</u>, oltre a definire la stessa topologia su X, <u>definiscono la stessa uniformità su X</u>. Infatti l'uniformità su X definita da una seminorma p è, evidentemente, quella canonica dello spazio vettoriale topologico X con la topologia definita da p.

PROPOSIZIONE 4.4. <u>Due seminorme p_1, p_2 su uno spazio vettoriale X sono equivalenti se e solo se esistono due numeri $a>0$, $b>0$ tali da aversi</u>

$$a\, p_1(x) \le p_2(x) \le b\, p_1(x) \qquad \forall x \in X. \tag{4.6}$$

Dimostrazione. Dette $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ le topologie su X definite da p_1 e p_2, le seminorme p_1 e p_2 sono equivalenti se e solo se l'applicazione identica $i: (X,\mathcal{T}_1) \to (X,\mathcal{T}_2)$ è bicontinua, cioè (per la Proposizione 4.2) se e solo se sussiste (4.6). #

PROPOSIZIONE 4.5. <u>Su uno spazio vettoriale X di dimensione finita tutte le norme sono tra loro equivalenti.</u>

Dimostrazione. Se p_1, p_2 sono due norme in X e $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ le topologie che esse definiscono, gli spazi vettoriali topologici $(X,\mathcal{T}_1)$ e $(X,\mathcal{T}_2)$ sono entrambi isomorfi a $\mathbb{C}^n$, se n è la dimensione di X [v. Teorema 3.1]. Ne segue che $(X,\mathcal{T}_1)$ e $(X,\mathcal{T}_2)$ sono isomorfi e quindi omeomorfi tra loro, donde l'equivalenza delle norme p_1 e p_2. #

PROPOSIZIONE 4.6. <u>Se $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ è una famiglia (finita) di SVT seminormabili, anche lo SVT prodotto $X = \prod_{i=1}^n X_i$ è seminormabile. Se p_i è una seminorma definente la topologia di X_i, la topologia di X è definita da una delle seguenti seminorme tra loro equivalenti:</u>

$$x = (x_i)_{i=1,\dots,n} \longmapsto \max_{i=1,\dots,n} p_i(x_i) \tag{4.7}$$

$$x = (x_i)_{i=1,\dots,n} \longmapsto \left(\sum_{i=1}^n \left(p_i(x_i)\right)^\alpha \right)^{1/\alpha}, \quad \alpha \text{ reale} \ge 1. \tag{4.8}$$

Dimostrazione. La seminorma (4.7) e le seminorme (4.8) che si ottengono al variare di α sono tutte equivalenti tra loro; ciò deriva dalla Proposizione 4.4 e dal fatto che, per la Proposizione 4.5, su $\mathbb{R}^n$ tutte le norme sono tra loro equivalenti e, in particolare, sono tra loro equivalenti le norme

$$(a_i)_{i=1,\dots,n} \longmapsto \max_{i=1,\dots,n} |a_i|, \qquad (a_i)_{i=1,\dots,n} \longmapsto \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^\alpha \right)^{1/\alpha}, \quad \alpha \ge 1.$$

La topologia su X definita dalle seminorme (4.7) o (4.8) è proprio la topologia prodotto; infatti una prebase di intorni dell'origine di X per la topologia prodotto è l'insieme delle parti di X del tipo $V_{i,\varepsilon} = \{x \in E : p_i(x_i) < \varepsilon\}$, con $i=1,\dots,n$ e ε reale positivo, mentre una base di intorni dell'origine di X per la topologia definita dalla seminorma (4.7) è l'insieme delle parti di X del tipo $V_\varepsilon = \{x \in X : \sup_{i=1,\dots,n} p_i(x_i) < \varepsilon\}$, con ε reale positivo. Allora le due topologie suddette coincidono perché

$$V_\varepsilon \subseteq \bigcap_{i=1}^n V_{i,\varepsilon} \subseteq V_{n\varepsilon}. \quad \#$$

PROPOSIZIONE 4.7. Siano X uno SVT e M un sottospazio vettoriale di X. Se X è seminormabile, tale è lo spazio quoziente X/M; se p è una seminorma definente la topologia di X, allora
$$\hat{x} \mapsto \hat{p}(\hat{x}) = \inf_{x \in \hat{x}} p(x) \,, \qquad (\hat{x} = x + M),$$
è una seminorma su X/M definente la topologia di X/M.
Se X è seminormabile e completo, tale è lo spazio quoziente X/M.

Dimostrazione. Si procede come nella dimostrazione della Proposizione 2.3; l'unica differenza è che qui si ha a che fare con una seminorma anziché con una pseudo-seminorma. #

ESEMPI DI SPAZI DI BANACH. Gli esempi più importanti di spazi di Banach saranno forniti, nel § 7, dalla teoria dell'integrazione.

(a). I più semplici spazi di Banach sono gli spazi gli spazi normati di dimensione finita; essi sono completi, e quindi spazi di Banach, perché [v. Teorema 3.1] ogni SVT di Hausdorff di dimensione (finita) n è isomorfo a $\mathbb{C}^n$ e quindi è completo.
Gli spazi normati di dimensione finita sono, evidentemente, localmente compatti (in quanto spazi topologici); anzi, per il Teorema 3.2, essi sono gli unici spazi di Banach localmente compatti.

(b). Spazio delle funzioni continue su un compatto. Sia K uno spazio topologico compatto [v. § 1, n. 9]. Indichiamo con $C(K)$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue di K in $\mathbb{C}$, (le operazioni di addizione e di moltiplicazione per un numero complesso essendo quelle usuali), dotato della norma

(4.9) $$f \mapsto \|f\|_0 = \sup_{x \in K} |f(x)| \,.$$

In virtù dei Teoremi 9.1 e 10.2 del § 1, $\|f\|_0 \in \mathbb{R}$. Che (4.9) sia una norma è evidente.
Una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f in $C(K)$ (per la topologia definita dalla norma $\|\cdot\|_0$) se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$; tale convergenza dicesi uniforme su K e la topologia definita dalla norma $\|\cdot\|_0$ dicesi la topologia della convergenza uniforme su K, come vedremo - in un contesto più generale - al § 5.
Dimostriamo che $C(K)$ è completo. [Più in generale, sussiste il Teorema 1.2 del § 5].
Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $C(K)$. Allora, dato (arbitrariamente) $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

(4.10) $$n, m \geq n_0 \implies \sup_{x \in K} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \,.$$

Ne segue che, per ogni $x \in K$, la successione $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{C}$ e quindi converge in $\mathbb{C}$, perché $\mathbb{C}$ è completo; cioè esiste $f(x) \in \mathbb{C}$ tale che

(4.11) $$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0 \,.$$

Poiché $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)|$, da (4.10), (4.11) segue

(4.12) $$n \geq n_0 \implies \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \,;$$

dunque la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alla funzione $f : x \mapsto f(x)$ uniformemente su K.
Per provare che $C(K)$ è completo basta, pertanto, dimostrare la seguente proposizione.

(4.13). Siano X uno spazio topologico e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni di X in $\mathbb{C}$ che converge uniformemente alla funzione $f : X \to \mathbb{C}$. Se le funzioni f_n sono continue, anche f è continua

Dimostriamo perciò (4.13). Fissiamo arbitrariamente $x_0 \in X$ e proviamo la continuità di f in x_0.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e ogni $x \in X$ si ha

(4.14) $\qquad |f(x)-f(x_0)| \le |f(x)-f_n(x)| + |f_n(x)-f_n(x_0)| + |f_n(x_0)-f(x_0)|.$

Dato $\varepsilon>0$, fissiamo n in modo tale che $|f(y)-f_n(y)| \le \varepsilon/3 \quad \forall y \in X$; ciò è possibile perchè f_n converge a f uniformemente in X. Per la continuità di f_n in x_0 esiste un intorno V di x_0 tale che $x \in V \Rightarrow |f_n(x)-f_n(x_0)| \le \varepsilon/3$.
Allora da (4.14) segue: $x \in V \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)| \le \varepsilon$. Dunque f è continua in x_0. #

(c) Lo spazio $C^m(\overline{\Omega})$, con Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^n$.

Se $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n)$ è una n-pla di numeri interi non negativi, porremo $|\alpha| = \alpha_1 + .. + \alpha_n$; se $x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ porremo $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$; analogamente porremo

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n}, \qquad \text{ove} \quad D_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, D_n = \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e m è un intero non negativo, indicheremo con $C^m(\Omega)$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ delle funzioni $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tali che le derivate $D^\alpha f$ esistano e siano continue in Ω per $|\alpha| \le m$ [se $\alpha = 0$ si deve intendere $D^0 f = f$] e con $C^\infty(\Omega)$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ delle funzioni complesse definite in Ω di cui esistono e sono continue in Ω le derivate di ogni ordine.

Sia ora Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$ e sia m un numero intero non negativo.
Indicheremo con $C^m(\overline{\Omega})$ il sottospazio vettoriale di $C^m(\Omega)$ costituito dalle funzioni $f \in C^m(\Omega)$ tali che $D^\alpha f$ sia prolungabile a una funzione continua nella chiusura $\overline{\Omega}$ di Ω per $|\alpha| \le m$, dotato della norma

$$f \mapsto \|f\|_m = \sup_{|\alpha| \le m} \left(\sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)| \right).$$

Si osservi che $\|f\|_m \in \mathbb{R}$ perchè $\overline{\Omega}$ è un compatto di $\mathbb{R}^n$ e $D^\alpha f$ è continua in $\overline{\Omega}$ [v. Teoremi 9.1 e 10.2 del § 1].
E' evidente che una successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f in $C^m(\overline{\Omega})$ (per la topologia definita dalla norma $\|\cdot\|_m$) se e solo se per ogni α tale che $|\alpha| \le m$ la successione $(D^\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $D^\alpha f$ in $C(\overline{\Omega})$, cioè uniformemente in $\overline{\Omega}$, e che una successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $C^m(\overline{\Omega})$ se e solo se per ogni α tale che $|\alpha| \le m$ la successione $(D^\alpha f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $C(\overline{\Omega})$.
La dimostrazione della completezza di $C^m(\overline{\Omega})$ si fonda sulla seguente proposizione che proveremo appresso.

(4.15). <u>Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni di Ω in $\mathbb{C}$ derivabili in ogni punto $x \in \Omega$ rispetto a una direzione orientata u. Se esistono due funzioni f e g di Ω in $\mathbb{C}$ tali che per ogni $x \in \Omega$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ e che $\left(\frac{\partial f_n}{\partial u}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente in Ω a g, allora f è derivabile rispetto a u in Ω e risulta</u> $\frac{\partial f}{\partial u} = g$.

Infatti $C^m(\overline{\Omega})$ è completo se $m = 0$ come si è visto nell'esempio (b); se $m > 0$ supponiamo $C^{m-1}(\overline{\Omega})$ completo e dimostriamo che allora $C^m(\overline{\Omega})$ è completo.
Sia $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $C^m(\overline{\Omega})$; allora $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $C(\overline{\Omega})$ e quindi converge uniformemente in $\overline{\Omega}$ a una funzione $f \in C(\overline{\Omega})$ e inoltre $\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in $C^{m-1}(\overline{\Omega})$ per $i = 1, .., n$, e quindi, per la supposta completezza di $C^{m-1}(\overline{\Omega})$, converge in $C^{m-1}(\overline{\Omega})$ a una funzione $g_i \in C^{m-1}(\overline{\Omega})$. Pertanto, utilizzando (4.15), si deduce facilmente che $\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i$ per $i = 1, .., n$.
Dunque $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f in $C(\overline{\Omega})$ e, per $i = 1, .., n$, $\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in $C^{m-1}(\overline{\Omega})$; ciò significa che $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a f in $C^m(\overline{\Omega})$.

Passiamo ora alla dimostrazione di (4.15).
Fissiamo arbitrariamente $x_0 \in \Omega$ e dimostriamo che, nelle ipotesi di (4.15), si ha $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0) = g(x_0)$, cioè che

$$\lim_{\mathbb{R} \ni t \to 0} \frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t} = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{\mathbb{R}\ni t\to 0} \frac{f_n(x_0+tu)-f_n(x_0)}{t}\right).$$

Poniamo

$$\varphi(t) = \frac{f(x_0+tu)-f(x_0)}{t}, \qquad \varphi_n(t) = \frac{f_n(x_0+tu)-f_n(x_0)}{t}$$

Le funzioni φ e φ_n sono definite in $I \setminus \{0\}$, ove I è un conveniente intorno dello zero in $\mathbb{R}$.
Proviamo che $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a φ uniformemente in $I\setminus\{0\}$ come conseguenza del fatto che $\left(\frac{\partial f_n}{\partial u}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente in Ω e che, di conseguenza, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

(4.16) $$n, m \geq n_0 \Rightarrow \sup_{x\in\Omega}\left|\frac{\partial f_n}{\partial u}(x) - \frac{\partial f_m}{\partial u}(x)\right| \leq \varepsilon$$

Posto

$$F_{n,m}(t) = f_n(x_0+tu) - f_m(x_0+tu),$$

per ogni $t \in I\setminus\{0\}$ esiste (per il Teorema del valor medio) $\tau \in \mathbb{R}$, interno all'intervallo di estremi 0 e t, tale che

(4.17) $$\varphi_n(t) - \varphi_m(t) = \frac{1}{t}\Big[\big(f_n(x_0+tu) - f_m(x_0+tu)\big) - \big(f_n(x_0) - f_m(x_0)\big)\Big] = \frac{dF_{n,m}}{dt}(\tau).$$

Poiché $\frac{dF_{n,m}}{dt}(\tau) = \frac{\partial f_n}{\partial u}(x_0+\tau u) - \frac{\partial f_m}{\partial u}(x_0+\tau u)$, da (4.17) segue

$$|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| = \left|\frac{\partial f_n}{\partial u}(x_0+\tau u) - \frac{\partial f_m}{\partial u}(x_0+\tau u)\right|$$

e quindi, per (4.16),

(4.18) $$n, m \geq n_0 \Longrightarrow \sup_{t\in I\setminus\{0\}} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| \leq \varepsilon.$$

D'altra parte, dall'ipotesi segue che, per ogni $t \in I\setminus\{0\}$, si ha $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) = \varphi(t)$. Da quest'ultima e da (4.18) segue [osservando che $|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| + |\varphi_m(t) - \varphi(t)|$]

(4.19) $$n \geq n_0 \Longrightarrow \sup_{t\in I\setminus\{0\}} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leq \varepsilon;$$

dunque $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a φ uniformemente in $I\setminus\{0\}$.
Poiché (per ipotesi) $\left(\frac{\partial f_n}{\partial u}(x_0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $g(x_0)$, esiste $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che

(4.20) $$n \geq n_1 \Longrightarrow \left|\frac{\partial f_n}{\partial u}(x_0) - g(x_0)\right| \leq \varepsilon;$$

inoltre, essendo $\frac{\partial f_n}{\partial u}(x_0) = \lim_{t\to 0}\varphi_n(t)$, esiste $\delta_n > 0$ tale che

(4.21) $$|t| \leq \delta_n,\ t\in I\setminus\{0\} \Longrightarrow \left|\varphi_n(t) - \frac{\partial f_n}{\partial u}(x_0)\right| \leq \varepsilon.$$

Avendosi

$$|\varphi(t) - g(x_0)| \leq |\varphi(t) - \varphi_n(t)| + \left|\varphi_n(t) - \frac{\partial f_n}{\partial u}(x_0)\right| + \left|\frac{\partial f_n}{\partial u}(x_0) - g(x_0)\right|,$$

da (4.19), (4.20), (4.21) segue evidentemente

$$|t| \leq \delta_{\max(n_0,n_1)},\ t\in I\setminus\{0\} \Longrightarrow |\varphi(t) - g(x_0)| \leq 3\varepsilon.$$

Dunque, poiché il numero reale positivo ε era stato scelto arbitrariamente, si ha

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t) = g(x_0),$$

donde $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0) = g(x_0)$. #

5. TOPOLOGIA DEFINITA DA UNA FAMIGLIA DI SEMINORME. SPAZI LOCALMENTE CONVESSI. SPAZI DI FRÉCHET.

Sia X uno spazio vettoriale. Una topologia localmente convessa su X è una topologia vettoriale su X tale che, per essa, l'origine (e quindi ogni punto di X) ha una base di intorni convessi. Diremo che uno spazio vettoriale topologico X è localmente convesso (o che X è uno spazio localmente convesso) se è di Hausdorff e la sua topologia è localmente convessa. Useremo la sigla SLC per spazio localmente convesso.
Poiché ogni intorno dell'origine in uno SVT contiene qualche intorno dell'origine equilibrato e l'inviluppo convesso di un insieme equilibrato è equilibrato, in uno SLC esistono basi di intorni dell'origine fatte di insiemi convessi ed equilibrati (oltre che assorbenti).

PROPOSIZIONE 5.1. Una base $\mathcal{B}$ per un filtro su uno spazio vettoriale X, costituita di insiemi convessi, equilibrati, assorbenti è una base del filtro degli intorni dell'origine per una topologia vettoriale (localmente convessa) su X se e solo se

(5.1) per ogni $U\in\mathcal{B}$ e ogni $\alpha>0$ esiste $V\in\mathcal{B}$ tale che $V\subseteq\alpha U$.

Dimostrazione. E' facile verificare che il filtro generato da $\mathcal{B}$, cioè l'insieme delle parti di X contenenti qualche elemento di $\mathcal{B}$, soddisfa alle condizioni (i), (ii), (iii), (iv), (v) del Teorema 1.1 se e solo se vale (5.1). A tale proposito si osservi che, se V è un convesso, si ha evidentemente $V+V=2V$. #

Sia $\mathcal{P}$ una famiglia di seminorme su uno spazio vettoriale X. La topologia e l'uniformità su X definite dalla famiglia $\{d_p : p\in\mathcal{P}\}$ di pseudometriche, ove $d_p(x,y)=p(x-y)$, [v. §1, n.3], diconsi rispettivamente la topologia e l'uniformità definite dalla famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme.
Ricordiamo [v. §1, n. 3] che una prebase di intorni dell'origine in X per tale topologia è l'insieme delle p-sfere aperte $\{x\in E : p(x)<r\}$, $p\in\mathcal{P}$, $r>0$, oppure l'insieme delle p-sfere chiuse $\{x\in E : p(x)\le r\}$, $p\in\mathcal{P}$, $r>0$ e che una prebase di tale uniformità è l'insieme delle parti di $X\times X$ del tipo $\{(x,y)\in X\times X : p(x-y)<r\}$, $p\in\mathcal{P}$, $r>0$, oppure l'insieme delle parti di $X\times X$ del tipo $\{(x,y)\in X\times X : p(x-y)\le r\}$, $p\in\mathcal{P}$, $r>0$.
Tali prebasi sono addirittura delle basi se la famiglia $\mathcal{P}^*$ è filtrante (rispetto alla relazione d'ordine $p_1\le p_2 \Leftrightarrow p_1(x)\le p_2(x)\quad \forall x\in E$) [v. §1, n. 6].
Utilizzando la Proposizione precedente e ricordando la Proposizione 6.1 del §3 si riconosce subito che la topologia definita da una famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme è una topologia (vettoriale) localmente convessa; trattasi, evidentemente, della più piccola topologia vettoriale per cui è continua ogni seminorma $p\in\mathcal{P}$.
Ancora dalla Proposizione 6.2 del §3 segue che, viceversa, ogni topologia localmente convessa è definibile da una famiglia di seminorme. Infatti se X è uno spazio localmente convesso e $\mathcal{B}$ la base di intorni dell'origine di X costituita da tutti gli intorni dell'origine di X convessi ed equilibrati, ad ogni $U\in\mathcal{B}$ si può associare (per la Proposizione 6.1 del §3) una seminorma p_U su X tale che $\{x\in X ; p_U(x)<1\}\subseteq U\subseteq$ $\subseteq\{x\in X : p_U(x)\le 1\}$; la famiglia $\{p_U : U\in\mathcal{B}\}$ di seminorme è filtrante perché (essendo $\mathcal{B}$ una base di un filtro) se $U_1, U_2\in\mathcal{B}$ esiste $U_3\in\mathcal{B}$ tale che $U_1\cap U_2\supseteq U_3$, donde $p_{U_1}\le p_{U_3}$, $p_{U_2}\le p_{U_3}$; poiché, se $U\in\mathcal{B}$ e ε è un numero reale positivo,

$$\{x\in E : p_U(x)<\varepsilon\}=\varepsilon\{x\in E : p_U(x)<1\}\subseteq\varepsilon U\subseteq\varepsilon\{x\in E : p_U(x)\le 1\}\subseteq\{x\in E : p_U(x)\le\varepsilon\},$$

la topologia su E definita dalla famiglia $\{p_U : U\in\mathcal{B}\}$ di seminorme coincide con la topologia di X.
Pertanto sussiste il seguente

TEOREMA 5.1. Una topologia su uno spazio vettoriale è localmente convessa se e solo se è definita da una famiglia di seminorme.

Dalla Proposizione 1.5 segue immediatamente la seguente

PROPOSIZIONE 5.2. La topologia definita su uno spazio vettoriale da una famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme è di Hausdorff se e solo se $x \neq 0 \Rightarrow p(x) \neq 0$ per qualche $p \in \mathcal{P}$.

Due famiglie di seminorme su uno spazio vettoriale X diconsi equivalenti se esse definiscono la stessa topologia su X; in tale caso esse definiscono anche la stessa uniformità su X, perchè l'uniformità definita da una famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme su X è proprio l'uniformità canonica dello spazio vettoriale topologico X con la topologia definita da $\mathcal{P}$, com'è facile constatare.

Si noti che [v. § 2, n.3] se $\mathcal{P}$ è una famiglia di seminorme su uno spazio vettoriale X, la famiglia $\mathcal{P}^*$ delle seminorme su X, ottenuta prendendo l'estremo superiore (rispetto all'ordine $p_1 \leq p_2 \Leftrightarrow p_1(x) \leq p_2(x) \quad \forall x \in E$) di tutte le parti finite di $\mathcal{P}$ è filtrante e equivalente a $\mathcal{P}$.

Pertanto, data una topologia localmente convessa su X, c'è sempre una famiglia filtrante di seminorme su X che la definisce.

Dal Teorema 3.2 e dalla dimostrazione del Teorema 5.1 discende la seguente

PROPOSIZIONE 5.3. Una topologia localmente convessa su uno spazio vettoriale è pseudometrizzabile se e solo se è generata da una famiglia numerabile di seminorme.

PROPOSIZIONE 5.4. Siano X uno spazio vettoriale, $(X_\iota)_{\iota \in I}$ una famiglia di spazi vettoriali topologici e, per ogni $\iota \in I$, sia $f_\iota : X \to X_\iota$ un'applicazione lineare.
Se la topologia di ogni X_ι è localmente convessa, tale è la topologia debole (o proiettiva) su X rispetto alla famiglia $(f_\iota)_{\iota \in I}$.
In particolare, la topologia prodotto su $\prod_{\iota \in I} X_\iota$ è localmente convessa.

Dimostrazione. Basta ricordare [v. Proposizione 4.3 del § 1] che una base di intorni dell'origine in X per la topologia debole rispetto a $(f_\iota)_{\iota \in I}$ è l'insieme delle intersezioni finite di parti di X del tipo $f_\iota^{-1}(V)$, con $\iota \in I$ e V che descrive una base di intorni dell'origine in X_ι, che se V è convesso tale è $f_\iota^{-1}(V)$ e che l'intersezione di insiemi convessi è un insieme convesso. #

PROPOSIZIONE 5.5. Siano X uno SVT e M un sottospazio vettoriale di X.
Se la topologia di X è localmente convessa, tale è la topologia quoziente su X/M; se $\mathcal{P}$ è una famiglia di seminorme definente la topologia di X, allora, posto per ogni $p \in \mathcal{P}$,

$$\hat{p}(\hat{x}) = \inf_{x \in \hat{x}} p(x) \quad , \quad (\hat{x} = x + M),$$

$\hat{\mathcal{P}} = \{\hat{p} : p \in \mathcal{P}\}$ è una famiglia di seminorme su X/M definente la topologia quoziente.

Dimostrazione. Il fatto che la topologia di X/M sia localmente convessa se tale è quella di X è immediato: infatti [v. Coroll. Prop. 1.6] se $\mathcal{B}$ è una base di intorni convessi dell'origine in X e π è la proiezione canonica di X su X/M, allora $\{\pi(V) : V \in \mathcal{B}\}$ è una base di intorni convessi dell'origine nello spazio quoziente X/M.
Già sappiamo [v. Proposizione 4.7] che $\hat{p}$ è una seminorma su X/M se p è una seminorma su X.
Una prebase di intorni dell'origine in X per la topologia definita da una famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme è $\{S_{p,n} : p \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N}\}$, ove $S_{p,n} = \{x \in X : p(x) < 1/n\}$ e una prebase di intorni dell'origine in X/M per la topologia definita dalla famiglia $\hat{\mathcal{P}} = \{\hat{p} : p \in \mathcal{P}\}$ di seminorme è $\{\hat{S}_{\hat{p},n} : \hat{p} \in \hat{\mathcal{P}}, n \in \mathbb{N}\}$, ove $\hat{S}_{\hat{p},n} = \{\hat{x} \in X/M : \hat{p}(\hat{x}) < 1/n\}$.
Poichè, come si verifica facilmente, risulta

$$\pi(S_{p,n}) = \hat{S}_{\hat{p},n},$$

la topologia definita su X/M da $\hat{\mathcal{P}}$ è proprio la topologia quoziente, dato che $\{\pi(S_{p,n}) : p \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N}\}$ è una prebase di intorni dell'origine in X/M per la topologia quoziente [v. Corollario della Proposizione 1.6]. #

PROPOSIZIONE 5.6. <u>Siano X, Y spazi vettoriali topologici con topologie localmente convesse, $\mathcal{P}$ una famiglia di seminorme definente la topologia di X e $\mathcal{Q}$ una famiglia di seminorme definente la topologia di Y.</u>
<u>Un'applicazione lineare $f: X \to Y$ è continua se e solo se per ogni $q \in \mathcal{Q}$ esistono un numero reale $c > 0$ e una parte finita $\{p_1, .., p_n\}$ di $\mathcal{P}$ tali che</u>

$$q(f(x)) \leq c \sup\{p_1(x), .., p_n(x)\} \qquad \forall x \in E. \tag{5.2}$$

<u>Di conseguenza, se $\mathcal{P}$ è filtrante, allora $f: X \to Y$ è continua se e solo se per ogni $q \in \mathcal{Q}$ esistono un numero reale $c > 0$ e una seminorma $p \in \mathcal{P}$ tali che</u>

$$q(f(x)) \leq c\, p(x) \qquad \forall x \in X.$$

Dimostrazione. Sappiamo (v. Proposizione 1.4) che l'applicazione lineare f è continua se e solo se è continua nell'origine. Se $p \in \mathcal{P}$, $q \in \mathcal{Q}$ e ε, δ sono numeri reali positivi, poniamo

$$V_{p,\delta} = \{x \in X : p(x) < \delta\}, \qquad U_{q,\varepsilon} = \{y \in Y : q(y) < \varepsilon\}.$$

Una prebase di intorni dell'origine in X è $\{V_{p,\delta} : p \in \mathcal{P}, \delta \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}$ e una prebase di intorni dell'origine in Y è $\{U_{q,\varepsilon} : q \in \mathcal{Q}, \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\}$. Queste prebasi sono addirittura delle basi se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono filtranti.
Sia f continua (nell'origine). Per la Proposizione 3.1 del § 1, per ogni $q \in \mathcal{Q}$ esistono una parte finita $\{p_1, .., p_n\}$ di $\mathcal{P}$ e $\delta_1, .., \delta_n$ reali positivi tali che $f(V_{p_1,\delta_1} \cap .. \cap V_{p_n,\delta_n}) \subseteq U_{q,1}$, cioè tali che $p_i(x) \leq \delta_i$, $i = 1, .., n$ $\Rightarrow q(f(x)) \leq 1$, donde, posto $\delta = \inf\{\delta_1, .., \delta_n\}$,

$$p_i(x) \leq \delta, \quad i = 1, .., n \implies q(f(x)) \leq 1. \tag{5.3}$$

Allora (5.2) sussiste con $c = 1/\delta$. Infatti, se $x \in E$ è tale che $\sup\{p_1(x), .., p_n(x)\} > 0$, risulta $p_i\left(\delta \frac{x}{\sup\{p_1(x), .., p_n(x)\}}\right) = \delta \frac{p_i(x)}{\sup\{p_1(x), .., p_n(x)\}} \leq \delta$, donde, per (5.3), si ha $q\left(f\left(\delta \frac{x}{\sup\{p_1(x), .., p_n(x)\}}\right)\right) \leq 1$, cioè $q(f(x)) \leq 1/\delta \sup\{p_1(x), .., p_n(x)\}$; se $\sup\{p_1(x), .., p_n(x)\} = 0$, (5.2) sussiste ancora con $c = 1/\delta$, perché $\sup\{p_1(x), .., p_n(x)\} = 0$ implica, per (5.3), $q(f(\lambda x)) \leq 1$ $\forall \lambda > 0$, donde $\lambda q(f(x)) \leq 1$ $\forall \lambda > 0$, donde infine $q(f(x)) = 0$.
Viceversa, supponiamo che per ogni $q \in \mathcal{Q}$ esistano $c > 0$ e $p_1, .., p_n \in \mathcal{P}$ tali che sussista (5.2). Allora f è continua nell'origine, perché, se ε è un numero reale positivo, si ha $\sup\{p_1(x), .., p_n(x)\} \leq \varepsilon/c \Rightarrow q(f(x)) \leq \varepsilon$, donde $f(V_{p_1,\varepsilon/c} \cap .. \cap V_{p_n,\varepsilon/c}) \subseteq U_{q,\varepsilon}$. #

Le topologie vettoriali con cui si ha a che fare nelle applicazioni sono sempre localmente convesse, per cui si lavora praticamente con seminorme o norme.
Una classe molto importante di spazi localmente convessi è quella dei cosiddetti spazi di Fréchet.
Uno <u>spazio di Fréchet</u> è uno spazio localmente convesso, metrizzabile e completo.
Ovviamente gli spazi di Banach sono (in quanto spazi vettoriali topologici) spazi di Fréchet.
Considereremo, ora, alcuni importanti esempi di spazi localmente convessi, e in particolare di spazi di Fréchet, non normabili.

6. ESEMPI DI SPAZI LOCALMENTE CONVESSI E DI SPAZI DI FRÉCHET.

(a) Lo spazio $C(X)$ con X spazio topologico. Il caso che X sia localmente compatto e σ-compatto.

Sia X uno spazio topologico. Indicheremo con $C(X)$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ delle funzioni di X in $\mathbb{C}$ continue, dotato della topologia (localmente convessa) definita dalla famiglia $\{p_K : K \text{ compatto di } X\}$ delle seminorme p_K definite ponendo, per ogni $f \in C(X)$,

$$p_K(f) = \sup_{x\in K} |f(x)| .$$

Tale famiglia di seminorme è filtrante, perchè se K_1 e K_2 sono compatti di X tale è $K_1 \cup K_2$ e risulta $p_{K_1} \le p_{K_1\cup K_2}$, $p_{K_2} \le p_{K_1 \cup K_2}$. Dalla Proposizione 5.2 segue immediatamente che $C(X)$ è di Hausdorff.

E' immediato riconoscere [v. § 1, n. 6] che una rete $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ in $C(X)$ converge a f in $C(X)$ se e solo se per ogni compatto K di X e ogni reale $\varepsilon > 0$ esiste $\alpha_0 \in A$ tale che

$$\alpha \in A;\ \alpha \ge \alpha_0 \implies \sup_{x\in K} |f_\alpha(x) - f(x)| \le \varepsilon ;$$

tale convergenza dicesi uniforme sui compatti di X [v. § 5]; per tale motivo la topologia di $C(X)$ dicesi la topologia della convergenza uniforme sui compatti di X.

Se X è localmente compatto, allora $C(X)$ è completo, cioè ogni rete di Cauchy in $C(X)$ è convergente.

Sia infatti $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ una rete di Cauchy in $C(X)$; allora, fissati (arbitrariamente) un compatto K di X e un reale $\varepsilon>0$, esiste $\alpha_0 \in A$ tale che

$$(6.1) \qquad \alpha,\beta \in A;\ \alpha,\beta \ge \alpha_0 \implies \sup_{x\in K} |f_\alpha(x) - f_\beta(x)| \le \varepsilon .$$

Ne segue che, per ogni $x \in K$, la rete $(f_\alpha(x))_{\alpha\in A}$ è di Cauchy in $\mathbb{C}$ e quindi converge in $\mathbb{C}$, perchè $\mathbb{C}$ è completo: sia $f(x)$ il suo limite.

Allora, da (6.1) e da $|f_\alpha(x) - f(x)| \le |f_\alpha(x) - f_\beta(x)| + |f_\beta(x) - f(x)|$ segue

$$\alpha \ge \alpha_0 \implies \sup_{x\in K} |f_\alpha(x) - f(x)| \le \varepsilon .$$

Dunque $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ converge uniformemente sui compatti di X alla funzione f.

Allora, se X è localmente compatto, $C(X)$ è completo, perchè (con un ragionamento analogo a quello fatto per provare (4.13)) si riconosce che

(6.2). Siano X uno spazio topologico e $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ una rete di funzioni di X in $\mathbb{C}$ che converge alla funzione f uniformemente su ogni compatto di X. Se le funzioni f_α sono continue, allora la restrizione di f a ogni compatto di X è continua.

Se X è localmente compatto e σ-compatto [v. § 1, n. 11] (il che accade, ad esempio, se X è un aperto di $\mathbb{R}^n$) allora $C(X)$ è metrizzabile (oltre che completo) e quindi è uno spazio di Fréchet.

Infatti, se X è localmente compatto e σ-compatto, esiste [v. Proposizione 11.3 del § 1] una successione $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di compatti di X tale che $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$. Ciò implica che ogni compatto K di X è contenuto in qualche K_n, perchè, essendo $(K \cap \mathring{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto di K, esiste $K_{\bar n}$ tale che $K \subseteq K \cap \mathring{K}_{\bar n} \subseteq K_{\bar n}$. Da $K \subseteq K_{\bar n}$ segue $p_K \le p_{K_{\bar n}}$, da cui $S_{p_{K_{\bar n}},\varepsilon} = \{f \in C(X) : p_{K_{\bar n}}(f) < \varepsilon\} \subseteq S_{K,\varepsilon} = \{f\in C(X) : p_K(f) < \varepsilon\}$; pertanto la famiglia numerabile $(p_{K_n})_{n\in\mathbb{N}}$ di seminorme basta a definire la topologia di $C(X)$ e quindi $C(X)$, essendo di Hausdorff, è metrizzabile per la Proposizione 5.3.

(b) <u>Lo spazio $C_c(X)$ con X spazio topologico. Il caso che X sia localmente compatto e σ-compatto.</u>

Sia X uno spazio topologico. Il <u>supporto</u> di una funzione $f: X \to \mathbb{C}$ è la chiusura in X dell'insieme $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Il supporto di f sarà denotato con <u>supp f</u>.

Se K è un compatto di X, indicheremo con <u>$C_c(K)$ il sottospazio di $C(X)$ costituito dalle funzioni appartenenti a $C(X)$ il cui supporto è contenuto in K</u> (e quindi è compatto in X). La topologia di $C_c(K)$ è quella della convergenza uniforme (su K e quindi in X), definita dalla norma $f \mapsto p_K(f) = \sup_{x \in K} |f(x)| \left(= \sup_{x \in X} |f(x)|\right)$. Infatti, se H è un arbitrario compatto di X, si ha evidentemente $p_H(f) \leq p_K(f)$ $\forall f \in C_c(K)$, donde $\{f \in C_c(K) : p_K(f) < \varepsilon\} \subseteq$ $\subseteq \{f \in C_c(K) : p_H(f) < \varepsilon\}$; dunque la topologia di $C(X)$ – che è definita dalla famiglia $\{p_H : H \text{ compatto di } X\}$ induce su $C_c(K)$ la topologia definita dall'unica seminorma p_K.

Si osservi che, per qualche compatto K, $C_c(K)$ può ridursi alla sola funzione nulla: ciò accade, ad esempio, se $X = \mathbb{R}^n$ e K contiene un solo punto.

<u>Sul sottospazio vettoriale $C_c(X)$ di $C(X)$ formato dalle funzioni appartenenti a $C(X)$ il cui supporto è compatto in X consideremo</u> (salvo avviso contrario) <u>la più grande topologia localmente convessa che, per ogni compatto K di X induce su $C_c(K)$ la topologia</u> (della convergenza uniforme) <u>di $C_c(K)$.</u>

Una tale topologia su $C_c(X)$ esiste e una base di intorni dell'origine di $C_c(X)$ per essa è l'insieme $\mathcal{B}$ delle parti convesse, equilibrate e assorbenti V di $C_c(X)$ tali che, per ogni compatto K di X, $V \cap C_c(K)$ sia un intorno dell'origine in $C_c(K)$.

Infatti, utilizzando la Proposizione 5.1, si verifica innanzitutto che $\mathcal{B}$ è una base di intorni dell'origine per una topologia vettoriale (localmente convessa) $\mathcal{T}$ sullo spazio vettoriale $C_c(X)$, la quale, evidentemente, induce su ogni $C_c(K)$ una topologia più piccola di quella della convergenza uniforme. D'altra parte, detta $\mathcal{T}_u$ la topologia su $C_c(X)$ della convergenza uniforme in X, cioè la topologia definita dalla norma $f \mapsto \sup_{x \in X} |f(x)|$, si ha $\mathcal{T} \geq \mathcal{T}_u$ perchè una base di intorni dell'origine in $C_c(X)$ per $\mathcal{T}_u$ è l'insieme delle sfere $\{f \in C_c(X) : \sup_{x \in X} |f(x)| < \varepsilon\}$, con ε reale positivo, che è [v. §3, Proposizione 6.1] un sottoinsieme di $\mathcal{B}$. Poichè $\mathcal{T}_u$ è una topologia localmente convessa su $C_c(X)$ che induce su ogni $C_c(K)$ la topologia della convergenza uniforme, se ne deduce che anche $\mathcal{T}$ induce su ogni $C_c(K)$ la topologia della convergenza uniforme.

Inoltre, per com'è stata definita, $\mathcal{T}$ è la più grande topologia localmente convessa su $C_c(X)$ che induce su ogni $C_c(K)$ la topologia della convergenza uniforme: infatti, se $\mathcal{T}'$ è una topologia localmente convessa sullo spazio vettoriale $C_c(X)$ che induce su ogni $C_c(K)$ la topologia della convergenza uniforme e $\mathcal{B}'$ è l'insieme degli intorni convessi ed equilibrati dell'origine per $\mathcal{T}'$, si ha chiaramente $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{B}'$.

La topologia $\mathcal{T}$ di $C_c(X)$ dicesi la <u>topologia limite induttivo</u> (delle topologie dei sottospazi $C_c(K)$ di $C_c(X)$ [v. n. 7]. Essa è di Hausdorff, perchè più fine della topologia (di Hausdorff) della convergenza uniforme sui compatti.

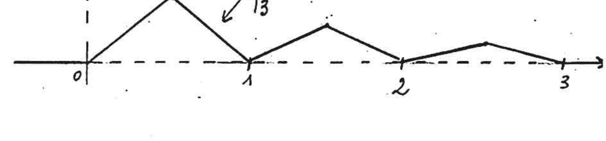
Sia ora X localmente compatto e σ-compatto (per esempio un aperto di $\mathbb{R}^n$) e sia $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di compatti di X tale che $X = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m$, $K_m \subseteq \mathring{K}_{m+1}$ [v. Proposizione 11.3 del §1], una base di intorni dell'origine in $C_c(X)$ è l'insieme delle parti convesse, equilibrate e assorbenti V di $C_c(X)$ tali che $V \cap C_c(K_m)$ sia un intorno dell'origine in $C_c(K_m)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Per convincersene basta pensare che (come s'è visto nell'esempio (a)) ogni compatto K di X è contenuto in qualche K_m. In questo caso si può dimostrare (v. Teorema 7.3) che <u>lo spazio localmente convesso $C_c(X)$ è completo.</u>

Mostriamo, con un esempio, che <u>lo spazio vettoriale $C_c(X)$</u> <u>dotato della topologia della convergenza uniform</u> definita dalla norma $f \mapsto \sup_{x \in X} |f(x)|$, <u>oppure dotato della topologia indottavi da quella di $C(X)$ non è complet</u>

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita ponendo $f(x) = 0$ se $x < 0$, $f(x) = x/2$ se $0 \leq x \leq 1/2$, $f(x) = \frac{1}{2}(1-x)$ se $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, $f(x) = 0$ se x:

Si consideri la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C_c(\mathbb{R})$ così definita:

$f_1(x) = f(x)$, $f_n(x) = f_{n-1}(x) + \frac{1}{n-1} f(x-n+1)$ se $n > 1$. [V. grafico].



Evidentemente $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy per entrambe le topologie localmente convesse suddette e non converge per alcuna di queste topologie.

Osserviamo infine che $C_c(X)$ (con la topologia limite induttivo che gli abbiamo assegnato) non è metrizzabile infatti se $C_c(X)$ fosse metrizzabile, essendo esso completo, sarebbe di seconda categoria per il Teorema di Baire [v. §2, n. 11], mentre esso è di prima categoria, in quanto $C_c(X) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} C_c(K_m)$ e $C_c(K_m)$ è chiuso in $C_c(X)$ e privo di punti interni; come si constata facilmente.

(c) Gli spazi $C^m(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.

Siano Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e m un numero intero non negativo.

Lo spazio vettoriale $C^m(\Omega)$, delle funzioni $f:\Omega\to\mathbb{C}$ tali che $D^\alpha f$ esiste (in ogni punto di Ω) ed è continua in Ω per ogni α tale che $|\alpha|\le m$, sarà pensato dotato della topologia (localmente convessa) definita dalla famiglia (filtrante) $\{p_{m,K} : K \text{ compatto di } \Omega\}$ delle seminorme $p_{m,K}$ definite da

$$(6.3) \qquad p_{m,K}(f) = \sup_{|\alpha|\le m}\left(\sup_{x\in K} |D^\alpha f(x)|\right).$$

Ovviamente $C^0(\Omega)$ è lo spazio che in (a) è stato indicato con $C(\Omega)$.

E' ovvio che una rete $(f_\iota)_{\iota\in I}$ in $C^m(\Omega)$ converge a f in $C^m(\Omega)$ se e solo se, per ogni α tale che $|\alpha|\le m$, la rete $(D^\alpha f_\iota)_{\iota\in I}$ converge a $D^\alpha f$ in $C(\Omega)$, cioè $(D^\alpha f_\iota)_{\iota\in I}$ converge a $D^\alpha f$ uniformemente su ogni compatto di Ω. Per tale motivo la topologia di $C^m(\Omega)$ è detta la topologia della convergenza uniforme sui compatti di Ω per le derivate di ordine $\le m$.

E' anche evidente che la topologia di $C^m(\Omega)$ è la topologia debole rispetto alla famiglia $(D^\alpha)_{|\alpha|\le m}$ ove $D^\alpha : C^m(\Omega)\to C(\Omega)$, cioè la più piccola topologia su $C^m(\Omega)$ tale che $D^\alpha: C^m(\Omega)\to C(\Omega)$ sia continua per ogni α con $|\alpha|\le m$.

Se $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è una successione di compatti di Ω tale che $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$, $K_j \subseteq \mathring{K}_{j+1}$ [certamente esistente, in base alla Proposizione 11.3 del §1], ogni compatto di Ω è contenuto in qualche K_j; se ne deduce che la successione $(p_{m,K_j})_{j\in\mathbb{N}}$ di seminorme basta a definire la topologia di $C^m(\Omega)$, la quale è, pertanto, pseudometrizzabile [v. Proposizione 5.3]. Inoltre $C^m(\Omega)$ è di Hausdorff in virtù della Proposizione 5.2, perchè, se $f\in C^m(\Omega)$, $f\neq 0$ e K è un compatto di Ω contenente un punto in cui f non si annulla, si ha chiaramente $p_{m,K}(f)\neq 0$.

Quindi $C^m(\Omega)$ è uno spazio (localmente convesso) metrizzabile.

$C^m(\Omega)$ è anche completo: ciò si prova con ragionamento analogo a quello esposto per provare la completezza di $C^m(\bar\Omega)$ nell'esempio (c) del n. 4. Dunque $C^m(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet.

Lo spazio vettoriale $C^\infty(\Omega)$, delle funzioni $f:\Omega\to\mathbb{C}$ tali che $D^\alpha f$ esiste (in ogni punto di Ω) ed è continua in Ω per ogni α, sarà pensato dotato della topologia (localmente convessa) definita dalla famiglia (filtrante) $\{p_{m,K} : m \text{ intero non negativo}, K \text{ compatto di } \Omega\}$ delle seminorme $p_{m,K}$ definite da (6.1).

Chiaramente una rete $(f_\iota)_{\iota\in I}$ in $C^\infty(\Omega)$ converge a f in $C^\infty(\Omega)$ se e solo se per ogni α la rete $(D^\alpha f_\iota)_{\iota\in I}$ converge a $D^\alpha f$ in $C(\Omega)$, cioè uniformemente su ogni compatto di Ω. Per tale motivo la topologia di $C^\infty(\Omega)$ dicesi la topologia della convergenza uniforme sui compatti di Ω per tutte le derivate.

E' chiaro altresì che la topologia di $C^\infty(\Omega)$ è la più piccola topologia sullo spazio vettoriale $C^\infty(\Omega)$ tale che $D^\alpha: C^\infty(\Omega)\to C(\Omega)$ sia continua qualunque sia α.

Considerazioni del tutto analoghe a quelle fatte per $C^m(\Omega)$ provano che anche $C^\infty(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet. Esso viene indicato anche con la notazione $\mathcal{E}(\Omega)$.

(d) Gli spazi $C_c^m(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega)$, con Ω aperto di $\mathbb{R}^n$.

Siano ancora Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$ e m un numero intero non negativo.
Se K è un compatto di Ω, indicheremo con $C_c^m(K)$ il sottospazio di $C^m(\Omega)$ costituito dalle funzioni appartenenti a $C^m(\Omega)$ il cui supporto è contenuto in K e con $C_c^\infty(K)$ il sottospazio di $C^\infty(\Omega)$ costituito dalle funzioni appartenenti a $C^\infty(\Omega)$ il cui supporto è contenuto in K.

Si riconosce facilmente che la topologia di $C_c^m(K)$ è quella della convergenza uniforme (in K e quindi in Ω) per le derivate di ordine $\leq m$, definita dalla norma $p_{m,K}$ (definita da (6.3)) e che la topologia di $C_c^\infty(K)$ è quella della convergenza uniforme (in K e quindi in Ω) per tutte le derivate, definita dalla famiglia $\{p_{m,K} : m$ intero non negativo$\}$ delle norme $p_{m,K}$.
Si noti che, su $C_c^m(K)$ e su $C_c^\infty(K)$, $p_{m,K}$ è effettivamente una norma perchè, se $f \in C_c^m(K)$ oppure $f \in C_c^\infty(K)$, si ha $\sup_{x\in K} |D^\alpha f(x)| = \sup_{x\in\Omega} |D^\alpha f(x)|$.

Evidentemente $C_c^m(K)$ è chiuso in $C^m(\Omega)$ e $C_c^\infty(K)$ è chiuso in $C^\infty(\Omega)$; di conseguenza, essendo $C^m(\Omega)$ e $C^\infty(\Omega)$ completi, anche $C_c^m(K)$ e $C_c^\infty(K)$ sono completi [v. Proposizione 8.4 del §2]. Dunque $C_c^m(K)$, dotato della norma $p_{m,K}$, è uno spazio di Banach e $C_c^\infty(K)$ è uno spazio di Fréchet.

Indicheremo con $C_c^m(\Omega)$ il sottospazio vettoriale di $C^m(\Omega)$ costituito dalle funzioni appartenenti a $C^m(\Omega)$, il cui supporto è compatto in Ω, dotato della più grande topologia localmente convessa che, per ogni compatto K di Ω, induce su $C_c^m(K)$ la topologia (della convergenza uniforme per le derivate di ordine $\leq m$) di $C_c^m(K)$.
Inoltre indicheremo con $C_c^\infty(\Omega)$, oppure con $\mathcal{D}(\Omega)$, il sottospazio vettoriale di $C^\infty(\Omega)$ costituito dalle funzioni appartenenti a $C^\infty(\Omega)$ il cui supporto è compatto in Ω, dotato della più grande topologia localmente convessa che, per ogni compatto K di Ω, induce su $C_c^\infty(K)$ la topologia (della convergenza uniforme per tutte le derivate) di $C_c^\infty(K)$.
E' essenziale osservare che sullo spazio vettoriale $C_c^m(\Omega)$ (risp. $C_c^\infty(\Omega)$) ha senso parlare della più grande topologia localmente convessa che induce su ogni $C_c^m(K)$ (risp. $C_c^\infty(K)$) la topologia di $C_c^m(K)$ (risp. $C_c^\infty(K)$): una base di intorni dell'origine di $C_c^m(\Omega)$ (risp. $C_c^\infty(\Omega)$) per tale topologia è l'insieme delle parti convesse, equilibrate e assorbenti V di $C_c^m(\Omega)$ (risp. $C_c^\infty(\Omega)$) tali che, per ogni compatto K di Ω, $V \cap C_c^m(K)$ (risp. $V\cap C_c^\infty(K)$) sia un intorno dell'origine in $C_c^m(K)$ (risp. $C_c^\infty(K)$). Di ciò ci si rende conto ragionando analogamente a come s'è fatto nell'esempio (b) per $C_c(X)$.
La topologia di $C_c^m(\Omega)$ [risp. quella di $C_c^\infty(\Omega)$] dicesi la topologia limite induttivo (delle topologie dei sottospazi $C_c^m(K)$ [risp. delle topologie dei sottospazi $C_c^\infty(K)$]). La topologia di $C_c^m(\Omega)$ e quella di $C_c^\infty(\Omega)$ sono di Hausdorff, perchè tali sono la topologia di $C^m(\Omega)$ e quella di $C^\infty(\Omega)$.

Dal Teorema 7.3 seguirà che $C_c^m(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega)$ sono completi; essi non sono, però, metrizzabili, come si riconosce facendo le stesse considerazioni con cui abbiamo giustificato la non metrizzabilità di $C_c(X)$, con X spazio localmente compatto e σ-compatto, nell'esempio (b).
Come si vedrà in seguito la topologia (limite induttivo) degli spazi $C_c^m(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega)$ è molto più utile della topologia (più piccola) indotta su di essi rispettivamente da quella di $C^m(\Omega)$ e da quella di $C^\infty(\Omega)$.

Esempio di funzione appartenente a $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$: $f(x) = e^{\frac{1}{|x|^2-1}}$ se $|x|<1$, $f(x)=0$ se $|x|\geq 1$ (essendo $|x| = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{\frac12}$).
Si verifica senza difficoltà che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$; poichè, chiaramente, $\operatorname{supp} f = \{x\in\mathbb{R}^n : |x|\leq 1\}$, si ha $f\in C_c^\infty(\Omega)$.
Posto $\varphi(x) = \frac{f(x)}{\int f(x)\,dx}$, ove $\int f(x)\,dx$ è l'integrale di f su $\mathbb{R}^n$ (rispetto alla misura di Lebesgue) [v. parte del corso], la funzione φ ha le seguenti proprietà:

$$(6.4) \qquad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\quad \varphi\geq 0,\quad \operatorname{supp}\varphi = \{x\in\mathbb{R}^n : |x|\leq 1\},\quad \int \varphi(x)\,dx = 1.$$

7. TOPOLOGIE LOCALMENTE CONVESSE LIMITE INDUTTIVO. MISURE DI RADON IN UNO SPAZIO TOPOLOGICO. DISTRIBUZIONI IN UN APERTO DI $\mathbb{R}^n$.

Al n. 6 abbiamo considerato alcuni esempi di topologie localmente convesse, che abbiamo chiamato limite induttivo. Conviene, ora, dare la definizione di topologia localmente convessa induttiva e di topologia localmente convessa limite induttivo e di studiarle per metterne in evidenza alcune interessanti proprietà.

Siano $(X_\iota)_{\iota\in I}$ una famiglia di SLC, E uno spazio vettoriale e, per ogni $\iota\in I$, sia $f_\iota: X_\iota \to X$ un'applicazione lineare.

In generale, la topologia induttiva su X rispetto alla famiglia $(f_\iota)_{\iota\in I}$ (cioè la più grande topologia su X tale che ogni f_ι sia continua [v. §1, n. 4]) non è localmente convessa e neppure vettoriale, come si potrebbe constatare su degli esempi.

Tuttavia ha senso parlare della più grande topologia localmente convessa su X tale che ogni f_ι sia continua: diremo che essa è la topologia localmente convessa induttiva rispetto a $(f_\iota)_{\iota\in I}$.

Infatti, detto $\mathcal{B}$ l'insieme delle parti convesse, equilibrate e assorbenti V di X tali che, per ogni $\iota\in I$, $f_\iota^{-1}(V)$ è un intorno dell'origine in X_ι, si verifica immediatamente, utilizzando la Proposizione 5.1, che $\mathcal{B}$ è una base di intorni dell'origine in X per una topologia vettoriale (localmente convessa) $\mathcal{T}$; se X è dotato della topologia $\mathcal{T}$ ogni f_ι è continua nell'origine (in base alla Proposizione 3.1 del §1) e quindi è continua in X (per la Proposizione 1.4); inoltre, se $\mathcal{T}'$ è una topologia localmente convessa su X tale che ogni f_ι sia continua e $\mathcal{B}'$ è una base di intorni convessi ed equilibrati dell'origine in X per $\mathcal{T}'$, allora (per la Proposizione 3.1 del §1) $\mathcal{B}'$ è chiaramente contenuta in $\mathcal{B}$ e quindi $\mathcal{T}'\subseteq\mathcal{T}$.

PROPOSIZIONE 7.1. *Siano $(X_\iota)_{\iota\in I}$ una famiglia di SLC, X uno spazio vettoriale dotato della topologia localmente convessa induttiva rispetto a $(f_\iota)_{\iota\in I}$ con $f_\iota: X_\iota\to X$ lineare e Y uno SLC. Un'applicazione lineare $g: X\to Y$ è continua se e solo se, per ogni $\iota\in I$, è continua l'applicazione $g\circ f_\iota: X_\iota\to Y$.*

Dimostrazione. Se g è continua tali sono le applicazioni $g\circ f_\iota$, perché f_ι è continua.

Viceversa, sia $g\circ f_\iota: X_\iota\to Y$ continua $\forall \iota\in I$. Allora, per ogni $\iota\in I$, se V è un intorno convesso ed equilibrato dell'origine in Y, $(g\circ f_\iota)^{-1}(V)$ è un intorno dell'origine in X_ι. Poiché $(g\circ f_\iota)^{-1}(V)=f_\iota^{-1}(g^{-1}(V))$ il sottoinsieme convesso, equilibrato e assorbente $g^{-1}(V)$ di X è un intorno dell'origine in X per la topologia localmente convessa induttiva rispetto a $(f_\iota)_{\iota\in I}$. [Si ricordi, infatti, che una base degli intorni dell'origine in X per tale topologia è proprio l'insieme delle parti convesse, equilibrate e assorbenti U di X tali che, per ogni $\iota\in I$, $f_\iota^{-1}(U)$ è un intorno dell'origine in X_ι]. Dunque $g: X\to Y$ è continua. #

Siano X uno spazio vettoriale, $(X_\iota)_{\iota\in I}$ una famiglia di sottospazi vettoriali di X filtrante rispetto all'inclusione (cioè tale che l'unione di ogni coppia di elementi di tale famiglia è contenuta in qualche elemento della famiglia stessa). Ogni X_ι sia dotato di una topologia localmente convessa $\mathcal{T}_\iota$ tale che, se $E_\alpha\subseteq E_\beta$, $\alpha,\beta\in I$, l'iniezione canonica di X_α in X_β sia continua (cioè $\mathcal{T}_\beta$ induca su X_α una topologia $\mathcal{T}'_\alpha\subseteq\mathcal{T}_\alpha$).

La topologia localmente convessa induttiva su X rispetto alla famiglia $(i_\iota)_{\iota\in I}$ delle iniezioni canoniche $i_\iota: X_\iota\to X$ (cioè la più grande topologia localmente convessa su X per cui ogni $i_\iota: X_\iota\to X$ sia continua) dicesi la topologia limite induttivo (delle topologie $\mathcal{T}_\iota$ dei sottospazi X_ι di X).

Da quanto s'è detto sopra, segue che una base di intorni dell'origine in X per la topologia limite induttivo (delle topologie $\mathcal{T}_\iota$ di X_ι) è l'insieme delle parti convesse, equilibrate e assorbenti V di X tali che, per ogni $\iota\in I$, $V\cap X_\iota$ è un intorno dell'origine in X_ι.

Dalla Proposizione 7.1 segue, poi, che se Y è uno SLC, un'applicazione lineare $f: X \to Y$ è continua se e solo se, per ogni $\iota \in I$, è continua la restrizione di f a X_ι.

Nel caso che $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione crescente di sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale E tale che $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ e che, per ogni $n\in\mathbb{N}$, X_n sia dotato di una topologia localmente convessa $\mathcal{T}_n$ con la proprietà che $\mathcal{T}_{n+1}$ induca $\mathcal{T}_n$ su X_n, allora la topologia limite induttivo su X (delle topologie $\mathcal{T}_n$), dicesi la topologia limite induttivo stretto (delle topologie $\mathcal{T}_n$); X, dotato di tale topologia, dicesi il limite induttivo stretto dei sottospazi X_n, $(n\in\mathbb{N})$ e si indica con il simbolo

$$X = \varinjlim X_n .$$

LEMMA 7.1. Siano X uno spazio vettoriale con una topologia localmente convessa e M un sottospazio di X. Per ogni intorno convesso ed equilibrato V dell'origine in M esiste un intorno convesso ed equilibrato U dell'origin in X tale che $V = U \cap M$. Se inoltre M è chiuso in X e $x_0 \in X \setminus V$, allora U può essere scelto tale che $x_0 \notin U$.

Dimostrazione. Poiché M ha la topologia indottavi da quella di X, esiste un intorno dell'origine W in X tale che $V = W \cap M$. Detto W_1 un intorno dell'origine in X convesso ed equilibrato contenuto in W, si ha $W_1 \cap M \subseteq V$.

Sia U l'inviluppo convesso [v. §3, n.6] di $W_1 \cup V$. U è un intorno dell'origine in E, perché $U \supseteq W_1$. Proviamo che $U \cap M = V$. Si ha $U \cap M \supseteq V$, perché $U \supseteq V$, $M \supseteq V$. Per verificare che $U \cap M \subseteq V$ osserviamo che, se $z \in U \cap M$, allora esistono $x \in W_1$, $y \in V$ e $\lambda \in [0,1]$ tali che $z = \lambda x + (1-\lambda) y$. Se $\lambda = 0$, risulta $z \in V$; se $\lambda \neq 0$, si ha $x = z/\lambda - \frac{1-\lambda}{\lambda} y$, donde $x \in M$ (perché M è uno spazio vettoriale e $z \in M$, $y \in M$), donde $x \in M \cap W_1 \subseteq V$, donde infine $z \in V$.

Sia ora M chiuso in X e sia $x_0 \in X$, $x_0 \notin V$. Se $x_0 \in M$, ovviamente $x_0 \notin U$ perché $U \cap M = V$. Se $x_0 \notin M$, detta π la proiezione canonica di X sullo spazio (localmente convesso) E/M, si ha $\pi(x_0) \neq 0$; poiché M è chiuso, X/M risulta di Hausdorff [v. Proposizione 1.7] e quindi esiste un intorno convesso ed equilibrato dell'origine in X/M che non contiene $\pi(x_0)$; la sua immagine inversa tramite π è un intorno convesso ed equilibrato - chiamiamolo A - di M, e quindi di 0, che non contiene x_0. Allora $A \cap U$ è un intorno convesso ed equilibrato dell'origine in X tale che $(A \cap U) \cap M = V$ e che $x_0 \notin A \cap U$. #

TEOREMA 7.1. La topologia limite induttivo stretto $\mathcal{T}$ su X della successione $(\mathcal{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di topologie $\mathcal{T}_n$ localmente convesse sui sottospazi vettoriali X_n di X induce su ciascun X_n la topologia $\mathcal{T}_n$ (e quindi $\mathcal{T}$ è la più grande topologia localmente convessa su E che induce $\mathcal{T}_n$ su E_n $\forall n\in\mathbb{N}$). Inoltre se, per ogni $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{T}_n$ è di Hausdorff, allora anche $\mathcal{T}$ è di Hausdorff.

Dimostrazione. Indichiamo con $\mathcal{T}|_{X_n}$ la topologia indotta da $\mathcal{T}$ su E_n.
Poiché le iniezioni canoniche $i_n: X_n \to X$ sono continue (rispetto alle topologie $\mathcal{T}_n$ su X e $\mathcal{T}$ su X), si ha ovviamente $\mathcal{T}|_{X_n} \subseteq \mathcal{T}_n$. Dobbiamo pertanto provare che $\mathcal{T}|_{X_n} \supseteq \mathcal{T}_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$, cioè che, dato un intorno convesso ed equilibrato U_n dell'origine in X_n, esiste un intorno dell'origine U in E per la topologia $\mathcal{T}$ tale che

$$U \cap X_n = U_n .$$

In virtù del Lemma 7.1, dato U_n, esiste un intorno convesso ed equilibrato U_{n+1} dell'origine in X_{n+1}, tale che $U_{n+1} \cap X_n = U_n$; per lo stesso motivo esiste un intorno convesso ed equilibrato U_{n+2} dell'origine in X_{n+2} tale che

$U_{n+2} \cap X_{n+1} = U_{n+1}$. Così procedendo si costruisce per induzione una successione $(U_{n+k})_{k\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di X tale che, per ogni $k\in\mathbb{N}$, U_{n+k} è un intorno convesso ed equilibrato dell'origine in E_{n+k} e che $U_{n+k} \cap X_{n+k-1} = U_{n+k-1}$. Poniamo

$$U = \bigcup_{k=0}^{+\infty} U_{n+k}.$$

U è convesso (perchè unione di una successione crescente di convessi) ed è equilibrato e assorbente (in quanto unione di una famiglia di insiemi equilibrati e assorbenti); inoltre risulta

$$U \cap E_n = U_n$$

perchè, fissato arbitrariamente $k\in\mathbb{N}$, si ha $U_{n+k}\cap X_n = U_n$, in quanto

$$U_{n+k} \cap X_n = U_{n+k} \cap (X_{n+k-1} \cap X_n) = (U_{n+k} \cap X_{n+k-1}) \cap X_n = U_{n+k-1} \cap X_n = \dots = U_{n+1} \cap X_n = U_n .$$

Se ne deduce che, $\forall m\in\mathbb{N}$, $U\cap X_m$ è un intorno dell'origine in X_m, e quindi U è un intorno dell'origine in X per la topologia $\mathcal{T}$, perchè avendosi $U\cap E_m = \bigcup_{k=0}^{+\infty}(U_{n+k}\cap E_m)$, risulta $U\cap X_m \supseteq U_m \cap X_m$ se $m \geq n$ e $U\cap X_m \supseteq U_n \cap X_m$ se $m < n$.

Per dimostrare la seconda parte del Teorema, consideriamo $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$; poichè $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ esiste $n_0\in\mathbb{N}$ tale che $x_0 \in X_{n_0}$; se ogni X_n è uno spazio di Hausdorff esiste un intorno V_{n_0}, che possiamo supporre convesso ed equilibrato, dell'origine in X_{n_0} il quale non contiene x_0; allora, per quanto s'è detto sopra, esiste un intorno dell'origine V in X per la topologia $\mathcal{T}$ tale che $V \cap X_{n_0} = V_{n_0}$, donde $x_0 \notin V$ (perchè $x_0 \in E_{n_0}$, $x_0 \notin V_{n_0}$).

Dunque, in base alla Proposizione 1.5, se ogni X_n è di Hausdorff, tale è X con la topologia $\mathcal{T}$. #

PROPOSIZIONE 7.2. Sia $(X,\mathcal{T})$ il limite induttivo stretto della successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Se, per ogni $n\in\mathbb{N}$, X_n è chiuso in X_{n+1}, allora X_n è chiuso in X per ogni $n\in\mathbb{N}$.

Dimostrazione. Si osservi innanzitutto che dall'essere X_n chiuso in X_{n+1} $\forall n\in\mathbb{N}$, si trae immediatamente che, per ogni $n,k\in\mathbb{N}$, X_n è chiuso in X_{n+k}.

Mostriamo che X_n è chiuso in X, cioè che il complementare di X_n in X è aperto in X, cioè che per ogni $x\in X\setminus X_n$ esiste un intorno di x contenuto in $X\setminus X_n$.

Se $x \in X\setminus X_n$, esiste $k\in\mathbb{N}$ tale che $x\in X_{n+k}$. Essendo X_n chiuso in X_{n+k}, esiste un intorno convesso ed equilibrato V_{n+k} dell'origine in X_{n+k} tale che $(x+V_{n+k})\cap X_n = \emptyset$. In virtù del Teorema 7.1 esiste un intorno dell'origine V in $(X,\mathcal{T})$ tale che $V\cap X_{n+k} = V_{n+k}$ e quindi si ha $(x+V)\cap X_n = (x+V)\cap(X_{n+k}\cap X_n) = ((x+V)\cap X_{n+k})\cap X_n = (x+V_{n+k})\cap X_n = \emptyset$; dunque l'intorno $x+V$ di x è contenuto in $X\setminus X_n$. #

Di notevole importanza è il seguente

TEOREMA 7.2. Sia $(X,\mathcal{T})$ il limite induttivo stretto della successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e, per ogni $n\in\mathbb{N}$, X_n sia chiuso in X_{n+1}. Un sottoinsieme B di E è limitato in $(X,\mathcal{T})$ se e solo se B è un sottoinsieme limitato di qualche X_n.

Dimostrazione. La condizione è chiaramente sufficiente, in base al Teorema 7.1.

Viceversa, dimostriamo che, se B è limitato in $(X,\mathcal{T})$, allora B è contenuto in qualche X_n (e quindi ivi limitato). A tale scopo supponiamo che B non sia contenuto in alcun X_n e proviamo che allora B non è limitato in $(X,\mathcal{T})$.

Se B non è contenuto in alcun X_n, per ogni $n\in\mathbb{N}$ esiste $x_n\in B$ tale che $x_n\notin X_n$.

Sia U_1 un intorno convesso ed equilibrato dell'origine in X_1.
Poiché $x_1 \notin X_1$, e quindi $x_1 \notin U_1$, per il Lemma 7.1 esiste un intorno convesso ed equilibrato U_2 dell'origine in X_2 tale che $x_1 \notin U_2$ e $U_2 \cap X_1 = U_1$.
Poiché $x_1 \notin U_2$ e $x_2/2 \notin U_2$, dal Lemma 7.1 segue l'esistenza di due intorni convessi ed equilibrati U_3' e U_3'' dell'origine in X_3 tali che $x_1 \notin U_3'$, $x_2/2 \notin U_3''$ e $U_3' \cap X_2 = U_3'' \cap X_2 = U_2$.
Allora, posto $U_3 = U_3' \cap U_3''$, si ha $x_1 \notin U_3$, $x_2/2 \notin U_3$ e $U_3 \cap X_2 = U_2$.
Così procedendo si definisce una successione $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ove U_n è un intorno convesso ed equilibrato dell'origine in X_n, tale che $U_{n+1} \cap X_n = U_n$ e che $x_1 \notin U_n$, $x_2/2 \notin U_n, \dots, x_n/n \notin U_n$. Poniamo $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.
U è chiaramente un sottoinsieme convesso equilibrato e assorbente di X tale che $U \cap X_m = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (U_n \cap X_m) = U_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$ e quindi U è un intorno (convesso ed equilibrato) dell'origine in $(X, \mathcal{T})$.
Proviamo che U non assorbe il sottoinsieme $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ di B e che quindi B non è limitato in $(X, \mathcal{T})$. Se U assorbisse $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$, esisterebbe $\lambda_0 > 0$ tale che $|\lambda| \geq \lambda_0 \Rightarrow x_n \in \lambda U \quad \forall n \in \mathbb{N}$; in particolare si avrebbe $x_n \in nU \quad \forall n \geq \lambda_0$, cioè $x_n/n \in U \quad \forall n \geq \lambda_0$. Il che non è vero perché U non contiene alcun elemento dell'insieme $\{x_n/n : n \in \mathbb{N}\}$. #

COROLLARIO. <u>Sia $(X, \mathcal{T})$ il limite induttivo stretto della successione $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e, per ogni $n \in \mathbb{N}$, X_n sia chiuso in X_{n+1}. Una successione $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X converge per la topologia $\mathcal{T}$ se e solo se $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq X_{\bar{n}}$ per qualche $\bar{n} \in \mathbb{N}$ (e $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è convergente in $X_{\bar{n}}$).</u>

Dimostrazione. La sufficienza della condizione è ovvia, stante il Teorema 7.1.
Supponiamo pertanto $x_k \to x$ in $(X, \mathcal{T})$. Allora l'insieme $B = \{x, x_1, x_2, \dots\}$ è compatto in $(X, \mathcal{T})$ e quindi limitato [v. Proposizione 2.4]. Dal Teorema 7.2 segue allora che B è contenuto in $X_{\bar{n}}$ con $\bar{n} \in \mathbb{N}$ conveniente; di conseguenza $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a x per la topologia di $X_{\bar{n}}$. #

TEOREMA 7.3. <u>Il limite induttivo stretto di una successione di SLC completi è completo.</u>
Omettiamo la dimostrazione di questo Teorema, che il lettore trova, per esempio in H.H. SCHAEFER: Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, 1970, p. 59.

Sia X uno spazio topologico. Ogni forma lineare continua sullo spazio localmente convesso $C_c(X)$ (definito nell'esempio (b) del n. 6) dicesi una <u>misura di Radon</u> in X.

Il motivo di tale nomenclatura sarà giustificato nella seconda parte del corso (nei numeri 16 e 17).

Ricordando che $C_c(X)$ è il limite induttivo dei suoi sottospazi $C_c(K)$ con K compatto di X e che, quindi, una forma lineare u su $C_c(X)$ è continua se e solo se tale è la sua restrizione a ogni $C_c(K)$ [v. Proposizione 7.1], dalla Proposizione 4.2 segue che <u>una forma lineare u su $C_c(X)$ è continua</u> (cioè è una misura di Radon) <u>se e solo se per ogni compatto K di X esiste una costante positiva c_K tale da aversi</u>

$$|u(\varphi)| \leq c_K \sup_{x\in X} |\varphi(x)| \qquad \forall \varphi \in C_c(K).$$

Esempio. Se $x_0 \in X$, la forma lineare δ_{x_0} su $C_c(X)$ definita ponendo, per ogni $\varphi \in C_c(X)$,

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$$

è chiaramente continua: δ_{x_0} dicesi la <u>misura di Dirac</u> in X concentrata nel punto x_0.

Sia ora Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Ogni forma lineare continua sullo spazio localmente convesso $\mathcal{D}(\Omega)$ (definito nell'esempio (d) del n. 6) dicesi una <u>distribuzione</u> in Ω.

Lo spazio vettoriale delle distribuzioni in Ω è indicato con la notazione $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Ricordando che $\mathcal{D}(\Omega)$ è il limite induttivo dei suoi sottospazi $C_c^\infty(K)$ con K compatto di Ω e che, quindi, una forma lineare u su $\mathcal{D}(\Omega)$ è continua se e solo se tale è la sua restrizione a ogni $C_c^\infty(K)$ [v. Proposizione 7.1], dalla Proposizione 5.6 segue che <u>una forma lineare u su $\mathcal{D}(\Omega)$ è continua</u> (cioè è una distribuzione in Ω) <u>se e solo se per ogni compatto K di Ω esistono un intero $m_K \geq 0$ e una costante positiva c_K tali da aversi</u>

$$|u(\varphi)| \leq c_K \sup_{|\alpha|\leq m_K} \left(\sup_{x\in\Omega} |D^\alpha \varphi(x)| \right) \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(K).$$

Sia u una forma lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$. Poiché, per ogni compatto K di Ω, lo spazio $C_c^\infty(K)$ è metrizzabile, la restrizione di u a $C_c^\infty(K)$ è continua se e solo se è continua per successioni [v. Proposizione 13.1 del §2], cioè se e solo se $\varphi_k \to 0$ in $C_c^\infty(K) \Longrightarrow u(\varphi_k) \to 0$ in $\mathbb{C}$.

Allora <u>una forma lineare u su $\mathcal{D}(\Omega)$ è continua</u> (cioè è una distribuzione in Ω) <u>se e solo se risulta $u(\varphi_k) \to 0$ in $\mathbb{C}$ per ogni successione $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ tale che</u>

(a) <u>le funzioni φ_k hanno il supporto contenuto in uno stesso compatto K di Ω,</u>

(b) <u>per ogni multiindice α, la successione $(D^\alpha \varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a zero uniformemente.</u>

Di conseguenza, ricordando il Corollario del Teorema 7.2, <u>una forma lineare u su $\mathcal{D}(\Omega)$ è continua</u> (cioè è una distribuzione in Ω) <u>se e solo se u è continua per successioni</u>, <u>cioè se e solo se</u>

$$\varphi_k \to 0 \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \Longrightarrow u(\varphi_k) \to 0 \text{ in } \mathbb{C}.$$

8. IL TEOREMA DI HAHN-BANACH E SUE CONSEGUENZE.

Se X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, indicheremo con X_0 lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ soggiacente (che si ottiene da X restringendo a $\mathbb{R}\times X$ la moltiplicazione per uno scalare).
Una forma lineare reale (o $\mathbb{R}$-lineare) su X è una forma lineare su X_0; un iperpiano reale di X è un iperpiano di X_0; un sottospazio reale di X è un sottospazio di X_0.

Ogni forma $\mathbb{C}$-lineare f su X è della forma $f=f_0+i\,g_0$, ove f_0 e g_0 sono forme $\mathbb{R}$-lineari su X univocamente individuate da f; f_0 dicesi la parte reale di f e g_0 la parte immaginaria di f.
Si osservi che f è individuata da f_0, perché risulta

(8.1) $$f(x)=f_0(x)-i\,f_0(ix);$$

infatti, da $f(ix)=i f(x)$ segue $f_0(ix)+i\,g_0(ix)=i f_0(x)-g_0(x)$, donde $f_0(ix)=-g_0(x)$ e $f_0(x)=g_0(ix)$.
D'altra parte, se f_0 è una forma lineare reale su X, allora f, definita in (8.1), è una forma $\mathbb{C}$-lineare su E ed è l'unica forma $\mathbb{C}$-lineare su X che ha f_0 come parte reale.
Se X è uno spazio vettoriale topologico, da (8.1) segue che f è continua se e solo se f_0 è continua.

PROPOSIZIONE 8.1. Sia X uno spazio vettoriale topologico e sia $f\in X^*$. f è continua se e solo se $\operatorname{Ker} f$ è chiuso in X. Di conseguenza l'iperpiano affine $H=\{x\in X: f(x)=\alpha\}$ è chiuso se e solo se f è continua.

Dimostrazione. Se f è continua, allora $\operatorname{Ker} f$ è chiuso in X perché $\operatorname{Ker} f=f^{-1}(\{0\})$.
Viceversa, se $\operatorname{Ker} f$ è chiuso in X, allora $X/_{\operatorname{Ker} f}$ è uno S.V.T. di Hausdorff (v. Proposizione 1.7) di dimensione 1 (v. §3, n.5); perciò, detta $f=\bar f\circ\pi$ la fattorizzazione usuale di f (v. (1.1)), $\bar f: X/_{\operatorname{Ker} f}\to\mathbb{C}$ è continua in base al Teorema 3.1 e quindi anche f è continua.
La seconda parte della Proposizione 8.1 è una conseguenza immediata della prima; infatti, poiché $H=x_0+\operatorname{Ker} f$, (con $x_0\in H$), H è chiuso se e solo se $\operatorname{Ker} f$ è chiuso. #

DEFINIZIONE. Se X è uno spazio vettoriale topologico, lo spazio vettoriale delle forme lineari e continue su X dicesi il duale (topologico) di X e sarà da noi indicato con il simbolo X'.

TEOREMA 8.1 (forma geometrica del Teorema di Hahn-Banach). Siano X uno spazio vettoriale topologico, N un sottospazio affine di X e A un aperto convesso non vuoto di X disgiunto da N. Esiste un iperpiano reale (affine) chiuso H_0 di X che separa N e A (v. §3, n.5), cioè tale che
$$N\subseteq H_0,\qquad H_0\cap A=\emptyset.$$
Di conseguenza esiste un iperpiano complesso (affine) chiuso H di X tale che
$$N\subseteq H,\qquad H\cap A=\emptyset.$$

Dimostrazione. Supponiamo che N sia un sottospazio vettoriale di X; a questo caso ci si può sempre ricondurre mediante una traslazione.
Sia $\mathcal{M}$ l'insieme dei sottospazi reali chiusi M di X tali che $N\subseteq M$, $M\cap A=\emptyset$; $\mathcal{M}$ è non vuoto perché $\bar N\in\mathcal{M}$. Nell'insieme $\mathcal{M}$, ordinato per inclusione, ogni parte totalmente ordinata ammette estremo superiore [l'estremo superiore è la chiusura dell'unione] e quindi, per il Lemma di Zorn, esiste un elemento massimale H_0 di $\mathcal{M}$. Proviamo che H_0 è un iperpiano di X_0 (= spazio vettoriale reale soggiacente a X), cioè che $\dim X_0/_{H_0}=1$.
Poiché $A\neq\emptyset$, $A\cap H_0=\emptyset$, la dimensione di $X_0/_{H_0}$ è ≥ 1. Supponiamo (per assurdo) $\dim X_0/_{H_0}\geq 2$.

Detta π la proiezione canonica di X_0 su X_0/H_0, $\pi(A)$ è un aperto convesso di X_0/H_0 non contenente l'origine; se $\dim X_0/H_0 \geq 2$ esiste (*) un sottospazio vettoriale L di dimensione 1 di X_0/H_0 disgiunto da $\pi(A)$. Per il Teorema 3.1 L è chiuso e quindi è chiuso in X_0 il sottospazio vettoriale $\pi^{-1}(L)$; inoltre $\pi^{-1}(L)$ contiene propriamente H_0 ed è disgiunto da A. Ciò è in contraddizione con il fatto che H_0 è un elemento massimale dell'insieme dei sottospazi chiusi di X_0 contenenti N e disgiunti da A; pertanto $\dim X_0/H_0 = 1$. Se X è uno SVT su $\mathbb{R}$ la dimostrazione è conclusa.

Sia, allora, X uno SVT su $\mathbb{C}$. Poniamo $H = H_0 \cap iH_0$. H è un iperpiano complesso chiuso di X: Infatti, se $f_0(x)=0$ (con f_0 forma $\mathbb{R}$-lineare continua su E) è l'equazione di H_0, allora evidentemente $f_0(ix)=0$ è l'equazione dell'iperpiano reale iH_0; di conseguenza, se f è la forma $\mathbb{C}$-lineare continua su X definita in (8.1), si ha $H=\{x\in X: f(x)=0\}$.

Inoltre H contiene N (perchè $N=iN$) ed è disgiunto da A (perchè H_0 è disgiunto da A). #

(*) <u>Se X è uno SVT di Hausdorff su $\mathbb{R}$ di dimensione ≥ 2 e B è un aperto convesso di X non contenente l'origine, esiste un sottospazio vettoriale di X di dimensione 1 disgiunto da B.</u> Ciò segue immediatamente dal seguente

TEOREMA (di Hahn-Banach in dimensione 2). <u>Se A è un aperto convesso non vuoto di $\mathbb{R}^2$ non contenente l'origine, esiste una retta di $\mathbb{R}^2$ passante per l'origine e disgiunta da A.</u>

Dimostrazione. Sia A un aperto convesso non vuoto di $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ e sia C (il cono) definito ponendo $C=\{\lambda x: \lambda>0, x\in A\}$. C è aperto in quanto unione di aperti: infatti $C=\bigcup_{\lambda>0}\lambda A$. Inoltre $C\neq\emptyset$ (perchè $\emptyset\neq A\subseteq C$) e sussistono le seguenti due proprietà:

(a) $\mu\in\mathbb{R}, \mu>0, v\in C \Rightarrow \lambda v\in C$,

(b) $u,v\in C \Rightarrow u+v\in C$.

La proprietà (a) è di immediata constatazione. Per quanto riguarda (b) si osservi che se $u=\lambda x$ e $v=\mu y$ (con $\lambda>0, \mu>0$, e $x,y\in A$) si ha

$$u+v=(\lambda+\mu)\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x+\frac{\mu}{\lambda+\mu}y\right) \quad e \quad \frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}=1,$$

e quindi $u+v\in C$, perchè, essendo A convesso, risulta $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}x+\frac{\mu}{\lambda+\mu}y\in A$.

Evidentemente $-C$ ha le stesse proprietà segnalate per C. Inoltre $-C\cap C=\emptyset$, perchè, se $x\in C$ e $-x\in C$, si ha (per (b)) $x+(-x)\in C$, ma ciò è falso perchè $0\notin C$. Se ne deduce che $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\neq -C\cup C$, perchè $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ è connesso.

Esiste allora $(\bar{x},\bar{y})\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ tale che $(\bar{x},\bar{y})\notin C$ e $(\bar{x},\bar{y})\notin -C$. La retta $\{t(\bar{x},\bar{y}): t\in\mathbb{R}\}$ ha intersezione vuota con C (e quindi con A), poichè da $t(\bar{x},\bar{y})\in C$, $t\neq 0$, segue $\frac{t}{|t|}(\bar{x},\bar{y})\in C$, che implica $(\bar{x},\bar{y})\in C$ se $t>0$ oppure $(\bar{x},\bar{y})\in -C$ se $t<0$. #

TEOREMA 8.2 (forma analitica del Teorema di Hahn-Banach). Siano p una seminorma su uno spazio vettoriale X e M un sottospazio vettoriale di X. Se f è una forma lineare su M tale che

$$|f(x)| \le p(x) \quad \forall x \in M,$$

allora esiste una forma lineare $\bar{f}$ su X estendente f [cioè tale che $\bar{f}(x) = f(x)$ $\forall x \in M$] e tale che

$$|\bar{f}(x)| \le p(x) \quad \forall x \in X.$$

Dimostrazione. Se $f = 0$ la cosa è banale. Supponiamo pertanto $f \neq 0$ e poniamo

$$\begin{cases} N = \{x \in M : f(x) = 1\} \\ A = \{x \in X : p(x) < 1\}. \end{cases}$$

N è un sottospazio affine di X ed A è un aperto convesso e non vuoto di X per la topologia definita da p. Allora, per il Teorema 8.1 esiste un iperpiano affine H di X tale che

$$N \subseteq H, \quad H \cap A = \emptyset.$$

Da $H \cap A = \emptyset$, $0 \in A$ segue $0 \notin H$ e quindi (v. §3, n.5) esiste $\bar{f} \in X^*$ tale che

$$H = \{x \in X : \bar{f}(x) = 1\}.$$

L'insieme $\{x \in M : \bar{f}(x) = f(x)\}$ è un sottospazio vettoriale di M contenente N (essendo $N \subseteq H$) e quindi coincide con M, perché N è un iperpiano non omogeneo di M. Dunque $\bar{f}(x) = f(x)$ $\forall x \in M$.

Ci resta da verificare che $|\bar{f}(x)| \le p(x)$ $\forall x \in X$. Se $\bar{f}(x) = 0$ ciò è banalmente vero. Sia allora $\bar{f}(x) \neq 0$. Poiché $\bar{f}\left(\frac{x}{\bar{f}(x)}\right) = 1$ si ha $\frac{x}{\bar{f}(x)} \in H$ e quindi risulta $p\left(\frac{x}{\bar{f}(x)}\right) \ge 1$, perché $H \cap A = \emptyset$ e $A = \{x \in X : p(x) < 1\}$; pertanto $\frac{1}{\bar{f}(x)} p(x) \ge 1$, cioè $|\bar{f}(x)| \le p(x)$. #

COROLLARIO 1. Se la topologia di uno SVT X è localmente convessa e M è un sottospazio di X, per ogni forma lineare e continua f su M esiste una forma lineare e continua $\bar{f}$ su X tale che $\bar{f}(x) = f(x)$ $\forall x \in$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}$ una famiglia filtrante di seminorme in X definente la topologia di X. Poichè $f: M \to \mathbb{C}$ è continua esistono (per la Proposizione 5.6) $p \in \mathcal{P}$ e $c > 0$ tali che

$$|f(x)| \leq c\, p(x) \qquad \forall x \in M.$$

Essendo cp una seminorma su X, dal Teorema 8.2 segue l'esistenza di qualche $\bar{f} \in X^*$ tale c $\bar{f}(x) = f(x)$ $\forall x \in M$ e che

$$|\bar{f}(x)| \leq c\, p(x) \qquad \forall x \in X.$$

Per concludere basta osservare che quest'ultima proprietà implica (per la Proposizione 5.6) la continuità di $\bar{f}$. #

COROLLARIO 2. Il duale di uno spazio vettoriale topologico X è non banale (cioè non si riduce all'origine) se e solo se X contiene un sottoinsieme non vuoto, aperto, convesso e diverso da X.

Dimostrazione. Se $f \in X'$, $f \neq 0$, allora $A = \{x \in X : |f(x)| < 1\}$ è un sottoinsieme aperto, convesso e non vuoto di X diverso da X.

Viceversa, se A è un sottoinsieme non vuoto aperto, convesso e diverso da X e $x_0 \notin A$, allora esiste, per il Teorema 8.1, un iperpiano (affine) chiuso di X contenente x_0 e disgiunto da A; di conseguenza esiste, per la Proposizione 8.1 (v. anche §3, n.5), una forma lineare e continua su X non nulla. #

COROLLARIO 3. Se X è uno spazio localmente convesso, per ogni $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, esiste $f \in X'$ tale che $f(x_0) \neq 0$.

Dimostrazione. Poichè X è di Hausdorff e $x_0 \neq 0$, esiste (per la Proposizione 1.5) un intorno dell'origin A in X che non contiene x_0; A può supporsi aperto e convesso, poichè la topologia di X è localmente convessa e quindi per il Teorema 8.1 esiste un iperpiano chiuso di X contenente x_0 e disgiunto da A. Tale iperpiano non contiene l'origine poichè $0 \in A$ e quindi ha un'equazione del tipo $f(x) = \alpha$, con $\alpha \neq 0$ e $f \in X'$. Dunque $f(x_0) = \alpha \neq 0$.

Si osservi che il Corollario 3 può anche dedursi dal Teorema 8.2 (anzichè dal Teorema 8.1) nel modo seguente.

Per il Teorema 3.1, l'applicazione lineare $\lambda x_0 \mapsto \lambda$ del sottospazio $\mathbb{C}x_0$ in $\mathbb{C}$ è continua. Se $f \in X'$ è un sua estensione continua a X (assicurata dal Corollario 1), si ha $f(x_0) = 1$. #

COROLLARIO 4. Se X è uno spazio localmente convesso e $x_1, .., x_n$ sono elementi linearmente indipendenti di X esistono $f_1, ..., f_n \in X'$ tali che $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, ove $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ii} = 1$.

Dimostrazione. Sia M il sottospazio (n-dimensionale) di X generato da $x_1, .., x_n$ e siano $g_1, .., g_n$ le forme lineari su M definite dalle condizioni $g_i(x_j) = \delta_{ij}$. Per il Teorema 3.1 le forme lineari $g_1, .., g_n$ sono continue e quindi, per il Corollario 1, hanno un'estensione continua a X. Se $f_1, .., f_n$ sono estensioni continue a X rispettivamente di $g_1, .., g_n$, si ha $f_i(x_j) = \delta_{ij}$. #

COROLLARIO 5. Sia X uno SVT con topologia localmente convessa. Un sottospazio vettoriale M di X è denso in X se e solo se $f \in X'$, $f_{|M} = 0 \Rightarrow f = 0$.

Dimostrazione. Se M è denso in E e $f \in X'$, l'annullarsi di f in M implica ovviamente l'annullarsi di f in X.

Supponiamo che M non sia denso in X. Allora esiste $x_0 \in X$ tale che $x_0 \notin \overline{M}$ e quindi, detta π la proiezione canonica di X sullo spazio localmente convesso (v. Proposizioni 1.5 e 5.5) $X/\overline{M}$, risulta $\pi(x_0) \neq 0$. Allora, per il Corollario 3, esiste $\tilde{f} \in (X/\overline{M})'$ tale che $\tilde{f}(\pi(x_0)) \neq 0$. Ne segue che, posto $f = \tilde{f} \circ \pi$, f è una forma lineare e continua su X che si annulla su M senza essere nulla (in quanto $f(x_0) \neq 0$). #

Il Teorema 8.1 (di Hahn-Banach) è un "teorema di separazione di insiemi convessi" in uno SVT; in effetti esso afferma che, se N e A sono due convessi non vuoti e disgiunti di uno SVT, di cui il primo è un sottospazio affine e il secondo è aperto, esiste un iperpiano reale che li separa.
Dal Teorema 8.1 si ottengono i seguenti due "teoremi di separazione di insiemi convessi", che ci limitiamo ad enunciare.

TEOREMA 8.3. Siano A e B due sottoinsiemi convessi di uno SVT. Se $\mathring{A} \neq \emptyset$ e $\mathring{A} \cap B = \emptyset$ esiste un iperpiano reale chiuso H che separa A e B. Se A e B sono aperti, l'iperpiano H li separa strettamente. [V. §3, n. 5].

TEOREMA 8.4. Siano A e B due sottoinsiemi convessi non vuoti e disgiunti di uno SLC. Se A è chiuso e B è compatto esiste un iperpiano reale chiuso che li separa strettamente.

COROLLARIO 1. In uno SLC la chiusura $\overline{A}$ di un insieme convesso A coincide con l'intersezione dei semispazi chiusi che lo contengono.(*)

Dimostrazione. Basta dimostrare che, se $x \notin \overline{A}$, allora x non appartiene all'intersezione di tutti i semispazi chiusi contenenti A, cioè esiste un iperpiano reale chiuso che separa strettamente $\{x\}$ e A.
Ciò è vero in base al Teorema 8.4 perché $\{x\}$ e $\overline{A}$ sono due convessi disgiunti, di cui il primo è compatto e il secondo è chiuso. #

COROLLARIO 2. Siano $\mathcal{T}_1$ e $\mathcal{T}_2$ due topologie localmente convesse e di Hausdorff su uno spazio vettoriale X tali che $(X,\mathcal{T}_1)' = (X,\mathcal{T}_2)'$. Se A è un sottoinsieme convesso di X, le chiusure di A per $\mathcal{T}_1$ e per $\mathcal{T}_2$ coincidono.

Dimostrazione. Per l'osservazione fatta all'inizio di questo n. 8, da $(X,\mathcal{T}_1)' = (X,\mathcal{T}_2)'$ segue l'insieme delle forme $\mathbb{R}$-lineari continue su $(X,\mathcal{T}_1)$ coincide con l'insieme delle $\mathbb{R}$-forme lineari continue su $(X,\mathcal{T}_2)$.
Il Corollario 2 discende, allora, immediatamente dal Corollario 1 [ricordando le Proposizioni 5.2 e 5.3 del §3 e la Proposizione 8.1]. #

(*) Se E è uno spazio vettoriale, i semispazi di E sono i sottoinsiemi (convessi) di E del tipo $f^{-1}(S)$, ove f è una forma $\mathbb{R}$-lineare su E e S è una semiretta di $\mathbb{R}$. [Cfr. §3, n. 5].
Se E è uno spazio vettoriale topologico, i semispazi chiusi di E sono i sottoinsiemi di E del tipo $f^{-1}(S)$, ove f è una forma $\mathbb{R}$-lineare continua su E e S è una semiretta chiusa di $\mathbb{R}$.

9. TEOREMI DEL GRAFICO CHIUSO E DELLA MAPPA APERTA.

Uno spazio topologico X dicesi uno spazio di Baire se ogni suo sottoinsieme aperto non vuoto è di seconda categoria in X, cioè (v. §2, n. 11) non è unione numerabile di insiemi con la chiusura priva di punti interni.

Si osservi che uno spazio vettoriale topologico X è uno spazio di Baire se (e solo se) X è di seconda categoria in sé: infatti se un aperto non vuoto A di X è di prima categoria in X, cioè è unione numerabile di insiemi con la chiusura priva di punti interni, traslando eventualmente A si ottiene un intorno U dell'origine di prima categoria in X; di conseguenza X è di prima categoria in sé perché, essendo U assorbente, si ha $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} nU$.

Dal Teorema (di Baire) 11.1 del §2 segue il seguente

TEOREMA 9.1. Ogni spazio vettoriale topologico pseudometrizzabile e completo è di Baire.

Si noti che in uno SVT di Baire la chiusura di un sottoinsieme assorbente ha l'interno non vuoto perché, se A è un sottoinsieme assorbente di uno SVT X, si ha $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\bar{A}$ e quindi se $\mathring{\bar{A}} = \phi$ X non è di Baire (in quanto $\mathring{\bar{A}} = \phi \Rightarrow n\mathring{\bar{A}} = \phi$).

LEMMA 9.1. Siano X, Y spazi vettoriali topologici, $f: X \to Y$ un'applicazione lineare, $\mathcal{F}_X(0)$ e $\mathcal{F}_Y(0)$ il filtro degli intorni dell'origine rispettivamente in X e in Y. Allora, se X è di Baire, $U \in \mathcal{F}_Y(0) \Rightarrow \overline{f^{-1}(U)} \in \mathcal{F}_X(0)$.

Dimostrazione. Dato $U = \mathcal{F}_Y(0)$, sia $V \in \mathcal{F}_Y(0)$ tale che $V - V \subseteq U$. Si ha

$$(9.1) \qquad \overline{f^{-1}(V)} - \overline{f^{-1}(V)} \subseteq \overline{f^{-1}(V) - f^{-1}(V)} \subseteq \overline{f^{-1}(V-V)} \subseteq \overline{f^{-1}(U)}.$$

Essendo V assorbente e f lineare, anche $f^{-1}(V)$ è assorbente e quindi, se X è di Baire, si ha

$$\mathring{\overline{f^{-1}(V)}} \neq \phi.$$

Se $x \in \mathring{\overline{f^{-1}(V)}}$, allora $0 \in \mathring{\overline{f^{-1}(V)}} - x$ e quindi $\mathring{\overline{f^{-1}(V)}} - x \in \mathcal{F}_X(0)$ [perché $\mathring{\overline{f^{-1}(V)}} - x$ è un aperto contenente l'origine]. Ne segue che $\overline{f^{-1}(V)} - \overline{f^{-1}(V)} \in \mathcal{F}_X(0)$, donde, per (8.1), $\overline{f^{-1}(U)} \in \mathcal{F}_X(0)$. #

TEOREMA 9.2 (del grafico chiuso). Siano X, Y spazi vettoriali topologici con Y metrizzabile e completo. Un'applicazione lineare $f: X \to Y$ è continua se (e solo se) sussistono le seguenti condizioni:

(a) il grafico di f è chiuso in $X \times Y$

(b) $U \in \mathcal{F}_Y(0) \Rightarrow \overline{f^{-1}(U)} \in \mathcal{F}_X(0)$.

Di conseguenza (v. Lemma 9.1), se X è di Baire e Y è metrizzabile e completo, allora $f: X \to Y$ è continua se (e solo se) il suo grafico è chiuso in $X \times Y$.

Dimostrazione. La necessità di (b) è evidente; per la necessità di (a) cfr. il Corollario 2 della Proposizione 7.1 del §1.

Dimostriamo che, sussistendo (a) e (b), f è continua, cioè $U \in \mathcal{F}_Y(0) \Rightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{F}_X(0)$.

Poiché $\forall U \in \mathcal{F}_Y(0)$ $\exists V \in \mathcal{F}_E(0)$ tale che $V + V \subseteq U$, sarà sufficiente provare che, sussistendo (a) e (b), risulta, $\forall V \in \mathcal{F}_Y(0)$,

$$(9.2) \qquad \overline{f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(V+V).$$

Dato $V \in \mathcal{J}_Y(0)$, sia $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base di intorni chiusi ed equilibrati dell'origine in Y tali che

$$V_1 + V_1 \subseteq V\,, \qquad V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n$$

Poichè $\overline{f^{-1}(V_1)} \in \mathcal{J}_X(0)$, si ha

$$\overline{f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(V) + \overline{f^{-1}(V_1)}\,.$$

Analogamente, essendo $\overline{f^{-1}(V_n)} \in \mathcal{J}_X(0)$, si ha

$$\overline{f^{-1}(V_n)} \subseteq f^{-1}(V_n) + \overline{f^{-1}(V_{n+1})}$$

Pertanto, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$, risulta

$$\overline{f^{-1}(V)} \subseteq f^{-1}(V) + f^{-1}(V_1) + \dots + f^{-1}(V_n) + \overline{f^{-1}(V_{n+1})}\,. \tag{9.3}$$

Sia $x \in \overline{f^{-1}(V)}$. Tenendo presente (9.3) e ragionando per induzione, si riconosce l'esistenza di una successione $x_0, x_1, \dots x_n, \dots$ in Y tale che $f(x_0) \in V$, $f(x_n) \in V_n$, $(n \in \mathbb{N})$ e

$$x \in x_0 + x_1 + \dots + x_n + \overline{f^{-1}(V_{n+1})} \tag{9.4}$$

Posto $s_n = x_0 + x_1 + \dots + s_n$, risulta, per $n, k \in \mathbb{N}$,

$$f(s_{n+k}) - f(s_n) = [f(s_{n+k}) - f(s_{n+k-1})] + \dots + [f(s_{n+1}) - f(s_n)] = f(x_{n+k}) + \dots + f(x_{n+1}) \in V_{n+k} + \dots + V_{n+1} \subseteq V_{n+1} + V_{n+1} \subseteq V_n,$$

donde

$$f(s_{n+k}) \in f(s_n) + V_n \qquad \forall\, n, k \in \mathbb{N}. \tag{9.5}$$

(9.5) mostra che la successione $(f(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in Y. Detto y il limite in Y (esistente perchè Y è completo) di tale successione, da (9.5) e dal fatto che V_n è chiuso segue

$$y \in f(s_n) + V_n \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{9.6}$$

In particolare si ha $y \in f(x_0) + V \subseteq V + V$. Per provare (9.2) ci basterà allora verificare che $f(x) = y$, perchè se così è si ha $f(x) \in V + V$, donde $x \in f^{-1}(V+V)$.

Verifichiamo dunque che $f(x) = y$, cioè che $(x, y) \in \gamma(f)$, essendo $\gamma(f)$ il grafico di f.

Poichè $\gamma(f) = \overline{\gamma(f)}$, trattasi di constatare che $(x,y) \in \overline{\gamma(f)}$, cioè che per ogni intorno W di x in E e ogni intorno U di y in Y si ha $(W \times U) \cap \gamma(f) \neq \emptyset$.

Si noti che da (9.4) segue $x \in s_n + \overline{f^{-1}(V_{n+1})} = \overline{s_n + f^{-1}(V_{n+1})}$, donde

$$W \cap [s_n + f^{-1}(V_{n+1})] \neq \emptyset\,, \tag{9.7}$$

mentre da (9.6) segue $y \in f(s_n) + V_n$, donde $f(s_n) \in y + V_n$, da cui $f(s_n) + V_n \subseteq y + V_n + V_n$; se n è sufficientemente grande si ha $y + V_n + V_n \subseteq U$ e quindi $f(s_n) + V_n \subseteq U$, donde

$$s_n + f^{-1}(V_n) \subseteq f^{-1}(U). \tag{9.8}$$

Da (9.7), (9.8) discende $W \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$ e ciò implica $(W \times U) \cap \gamma(f) \neq \emptyset$, perchè se $z \in W \cap f^{-1}(U)$ si ha $z \in W$ e $f(z) \in U$. #

Dai Teoremi 9.1 e 9.2 segue immediatamente il seguente

COROLLARIO. Se X, Y sono SVT metrizzabili e completi, un'applicazione lineare $f: X \to Y$ è continua se e solo se il suo grafico è chiuso in $X \times Y$.

Ricordiamo che, se X, Y sono spazi topologici, un'applicazione $f: X \to Y$ dicesi (relativamente) aperta se, per ogni aperto A di X, $f(A)$ è aperto in $f(X)$ per la topologia relativa su $f(X)$ (cioè per la topologia indotta su $f(X)$ da quella di Y).
E' ovvio che se f è una biiezione, dire che f è aperta equivale a dire che $f^{-1}: F \to E$ è continua.
Se X, Y sono spazi vettoriali topologici, un'applicazione $f: X \to Y$ è (relativamente) aperta se e solo se, per ogni intorno U dell'origine in X, $f(U)$ è un intorno dell'origine nel sottospazio $f(X)$ di Y.

Dal Teorema 9.2 segue il seguente

TEOREMA 9.3 (della mappa aperta, o dell'omomorfismo). Siano X, Y spazi vettoriali topologici di Hausdorff. Se X è metrizzabile e completo allora un'applicazione lineare e continua f di X su Y è aperta (cioè è un omomorfismo) se (e solo se)

$$(9.9) \qquad U \in \mathcal{J}_X(0) \Rightarrow \overline{f(U)} \in \mathcal{J}_Y(0)$$

Di conseguenza (per il Lemma 9.1), se X è metrizzabile e completo e Y è di Baire, allora ogni applicazione lineare e continua di X su Y è aperta.

Dimostrazione. La condizione (9.9) è necessaria affinchè f sia aperta, perchè f è aperta se e solo se $U \in \mathcal{J}_X(0) \Rightarrow f(U) \in \mathcal{J}_Y(0)$.
Sufficienza della condizione (9.9). Sia $\bar{f}: X/_{\mathrm{Ker} f} \to Y$ la biiezione associata a f (v. n. 1). Se f è continua $\mathrm{Ker} f$ è chiuso in X e quindi, essendo X metrizzabile e completo, anche $X/_{\mathrm{Ker} f}$ è metrizzabile e completo (v. Proposizione 2.3); inoltre $\bar{f}$ è continua (v. Proposizione 1.9) e quindi $\gamma(\bar{f})$ è chiuso in $X/_{\mathrm{Ker} f} \times Y$; di conseguenza $\gamma(\bar{f}^{-1})$ è chiuso in $Y \times X/_{\mathrm{Ker} f}$. Allora, poichè (9.9) è l'analoga della condizione (b) del Teorema 9.2 per l'applicazione $\bar{f}^{-1}$, dal Teorema 9.2 segue che, sussistendo (9.9), $\bar{f}^{-1}$ è continua, cioè f è aperta.

Dai Teoremi 9.1 e 9.3 discende immediatamente il seguente

COROLLARIO. Se X, Y sono SVT metrizzabili e completi, allora ogni applicazione lineare e continua di X su Y è aperta (cioè è un omomorfismo); in particolare ogni biiezione lineare e continua di X su Y è un isomorfismo.