§5. SPAZI FUNZIONALI. SPAZI DI FUNZIONI LINEARI E CONTINUE.

1. UNIFORMITÀ E TOPOLOGIA DELLA CONVERGENZA UNIFORME. $\mathfrak{S}$-TOPOLOGIE SU $\mathcal{L}(X,Y)$, CON X,Y SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI. $\mathfrak{S}$-TOPOLOGIE SU X'.

Siano X un insieme e Y uno spazio topologico. La topologia prodotto sull'insieme, Y^X, delle funzioni $f: X \to Y$ è [v. §1, n. 4] la più piccola topologia sull'insieme Y^X tale che, per ogni $x \in X$ sia continua l'applicazione $\pi_x: f \mapsto f(x)$ di Y^X in Y (che chiameremo <u>valutazione in x</u>). La topologia (prodotto) di Y^X dicesi la <u>topologia della convergenza semplice</u> (o puntuale) dato che una rete $(f_\iota)_{\iota\in I}$ in Y^X converge a $f \in Y^X$ per tale topologia se e solo se per ogni $x \in X$ la rete $(f_\iota(x))_{\iota \in I}$ converge a $f_\iota(x)$ in Y.

Sappiamo [v. §2, Teorema 4.4] che se la topologia di Y è uniformizzabile e $\mathcal{P}_Y$ è una famiglia di pseudometriche che la definiscono, allora anche la topologia di Y^X (della convergenza puntuale) è uniformizzabile ed è definita dalla famiglia $\{d_x : d \in \mathcal{P}_Y,\ x \in X\}$ delle pseudometriche d_x, ove

$$d_x = d \circ \pi_x^{(2)}, \qquad \text{cioè} \qquad d_x(f,g) = d(f(x), g(x)), \quad (f,g \in Y^X).$$

Sappiamo anche [v. §2, Corollario 3 della Prop. 6.2] che l'uniformità, diciamola $\mathcal{U}_s$, su Y^X definita dalla famiglia $\{d_x : d \in \mathcal{P}_Y,\ x \in X\}$ è la più piccola uniformità su Y^X tale che, per ogni $x \in X$, la valutazione $\pi_x: Y^X \to Y$ sia uniformemente continua (ove Y è dotato dell'uniformità $\mathcal{U}_Y$ definita dalla famiglia $\mathcal{P}_Y$). $\mathcal{U}_s$ dicesi <u>l'uniformità della convergenza semplice</u> (o puntuale).
Una prebase dell'uniformità $\mathcal{U}_s$ della convergenza semplice è dunque l'insieme delle parti di $Y^X \times Y^X$ del tipo $\{(f,g) \in Y^X \times Y^X : d(f(x), g(x)) \le \varepsilon\}$, con $d \in \mathcal{P}_Y$, $x \in X$ e ε reale positivo; di conseguenza una prebase di $\mathcal{U}_s$ è anche l'insieme delle parti di $Y^X \times Y^X$ del tipo

$$\{(f,g) \in Y^X \times Y^X : (f(x), g(x)) \in U\}, \quad \text{con } U \in \mathcal{U}_Y \text{ e } x \in X.$$

Se H è un sottoinsieme di Y^X e $x \in X$, indicheremo con $H(x)$ il sottoinsieme di Y definito da

$$H(x) = \{f(x) : f \in H\}.$$

PROPOSIZIONE 1.1. <u>Se Y è uno spazio topologico, un sottoinsieme H di Y^X è relativamente compatto in Y^X (per la topologia della convergenza puntuale) se per ogni $x \in X$, $H(x)$ è relativamente compatto in Y. Se Y è di Hausdorff vale anche il viceversa.</u>

Dimostrazione. Poiché ovviamente $H \subseteq \prod_{x\in X} H(x) \subseteq Y^X$, si ha $\overline{H} \subseteq \overline{\prod_{x\in X} H(x)} = \prod_{x \in X} \overline{H(x)}$.

Se, per ogni $x \in X$, $\overline{H(x)}$ è compatto in Y, anche $\prod_{x\in X} \overline{H(x)}$ è compatto in Y^X (per il Teorema 9.2 del §1) e quindi $\overline{H}$, in quanto sottoinsieme chiuso del compatto $\prod_{x\in X} \overline{H(x)}$ di Y^X, è compatto in Y^X.

Viceversa, se Y è di Hausdorff, tale è Y^X e quindi, se $\overline{H}$ è compatto in Y^X, $\overline{H}(x)$ è compatto e chiuso in Y (per il Teorema 9.1 e la Prop. 9.3 del §1, atteso che la valutazione $\pi_x : Y^X \to Y$ è continua); di conseguenza $\overline{H(x)}$ è compatto in Y, perché (essendo $\overline{H}(x)$ chiuso in Y) si ha $\overline{H}(x) = \overline{\overline{H}(x)} \supseteq \overline{H(x)}$. #

PROPOSIZIONE 1.2. Se X è uno spazio vettoriale e Y è uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff, l'insieme $L(X,Y)$ delle applicazioni lineari di X in Y è chiuso in Y^X (per la topologia della convergenza puntuale).

Dimostrazione. Evidentemente si ha $L(X,Y) = \bigcap_{\substack{x,y\in X\\ \alpha,\mu\in \mathbb{C}}} \{f \in Y^X : f(\alpha x+\mu y) - \alpha f(x) - \mu f(y) = 0\}$.

Fissati arbitrariamente x, y in X e α, μ in $\mathbb{C}$, il sottoinsieme $\{f\in Y^X : f(\alpha x+\mu y)-\alpha f(x)-\mu f(y)=0\}$ di Y^X è chiuso in Y^X (per la topologia della convergenza puntuale) perché esso coincide con $\{f \in Y^X : (\pi_{\alpha x+\mu y} - \alpha\pi_x - \mu\pi_y)(f) = 0\}$ e le valutazioni $\pi_{\alpha x+\mu y}$, π_x, π_y sono continue.

Dunque anche $L(X,Y)$ è chiuso in Y^X. #

Siano X un insieme e $(Y, \mathcal{U}_Y)$ uno spazio uniforme. Sia $\mathcal{P}_Y$ una famiglia di pseudometriche limitate definenti l'uniformità $\mathcal{U}_Y$.

Sia $\mathfrak{S}$ una famiglia di parti di X. Sull'insieme Y^X (delle funzioni $f : X \to Y$) consideriamo l'uniformità $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ definita dalla famiglia $\{d_A : A\in\mathfrak{S}, d\in\mathcal{P}_Y\}$ delle pseudometriche d_A definite da

$$(1.1) \qquad d_A(f,g) = \sup_{x\in A} d(f(x), g(x)) \qquad , (f,g\in Y^X)$$

Una prebase dell'uniformità $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ è l'insieme delle parti di $Y^X \times Y^X$ del tipo

$$\{(f,g)\in Y^X\times Y^X : \sup_{x\in A} d(f(x),g(x)) \le \varepsilon\}, \text{ con } A\in\mathfrak{S},\ d\in\mathcal{P}_Y \text{ e } \varepsilon \text{ reale} > 0;$$

si constata facilmente che una prebase di $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ è anche l'insieme delle parti di $Y^X\times Y^X$ del tipo

$$(1.2) \qquad \{(f,g)\in Y^X\times Y^X : (f(x), g(x)) \in U \quad \forall x\in A\}, \text{ ove } A\in\mathfrak{S} \text{ e } U\in\mathcal{U}_Y.$$

Pertanto l'uniformità $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ dipende solo dall'uniformità $\mathcal{U}_Y$ e dalla famiglia $\mathfrak{S}$ di parti di X: essa dicesi l'uniformità della convergenza uniforme su ogni $A\in\mathfrak{S}$ e la topologia che essa definisce dicesi la topologia della convergenza uniforme su ogni $A\in\mathfrak{S}$, o brevemente la $\mathfrak{S}$-topologia

Dalla definizione discende subito che una rete $(f_\iota)_{\iota\in I}$ in Y^X converge a $f\in Y^X$ per la topologia della convergenza uniforme su ogni $A\in\mathfrak{S}$ se e solo se, per ogni $A\in\mathfrak{S}$ e ogni $d\in\mathcal{P}_Y$, si ha $\lim_{\iota\in I}\left(\sup_{x\in A} d(f_\iota(x), f(x))\right)=0$. Questa convergenza è detta, appunto, uniforme su ogni $A\in\mathfrak{S}$.

Nel caso che $\mathfrak{S}=\{\{x\}: x\in X\}$, allora $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ coincide con l'uniformità $\mathcal{U}_s$ della convergenza puntuale. Se invece $\mathfrak{S}=\{X\}$, allora $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ dicesi <u>l'uniformità della convergenza uniforme</u> (su X) e la topologia che essa definisce dicesi <u>la topologia della convergenza uniforme</u> (su X).

* * * * *

Ricordiamo che, se Y è uno spazio vettoriale topologico, l'uniformità canonica compatibile con la sua topologia è individuata dal filtro $\mathcal{F}_Y(0)$ degli intorni dell'origine di Y: una base (invariante per traslazioni) di tale uniformità è $\{\hat{U}: U\in\mathcal{F}_Y(0)\}$, ove $\hat{U}=\{(y_1,y_2)\in Y\times Y: y_1-y_2\in U\}$.

Allora (con riferimento all'uniformità canonica su Y), da (1.2) segue immediatamente che una prebase dell'uniformità $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ su Y^X (della convergenza uniforme su ogni $A\in\mathfrak{S}$) è l'insieme delle parti di $Y^X\times Y^X$ del tipo $\{(f,g)\in Y^X\times Y^X: (f(x),g(x))\in\hat{U}\ \ \forall x\in A\}$, cioè del tipo

$$\{(f,g)\in Y^X\times Y^X: f(x)-g(x)\in U \quad \forall x\in A\}, \quad \text{ove } U\in\mathcal{F}_Y(0) \text{ e } A\in\mathfrak{S}.$$

Di conseguenza una prebase (base se $\mathfrak{S}$ è filtrante) di intorni dell'origine in Y^X per la topologia della convergenza uniforme su ogni $A\in\mathfrak{S}$ è l'insieme delle parti di Y^X del tipo

$$\{f\in Y^X: f(A)\subseteq U\}, \quad \text{ove } A\in\mathfrak{S} \text{ e } U\in\mathcal{F}_Y(0).$$

TEOREMA 1.1. <u>Siano $\mathfrak{S}$ una famiglia di parti di un insieme X, Y uno spazio vettoriale topologico e H un sottospazio vettoriale di Y^X. La topologia su Y^X della convergenza uniforme su ogni $A\in\mathfrak{S}$ induce su H una topologia vettoriale se e solo se</u>

$$(1.3) \qquad \underline{A\in\mathfrak{S},\ f\in H \Rightarrow f(A) \text{ limitato in } Y}.$$

Dimostrazione. Non è restrittivo supporre che $\mathfrak{S}$ sia filtrante: nel caso contrario si può sostituire a $\mathfrak{S}$ la famiglia (filtrante) $\mathfrak{S}'$ delle unioni finite degli elementi di $\mathfrak{S}$, perchè evidentemente $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}'}=\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$.

Una base di intorni dell'origine di H per la topologia indotta da quella su Y^X della convergenza uniforme su ogni $A\in\mathfrak{S}$ è $\mathcal{B}(0)=\{V(A,U): A\in\mathfrak{S},\ U\in\mathcal{F}_Y(0)\}$, ove

$$V(A,U)=\{f\in H: f(A)\subseteq U\}.$$

Si constata senza difficoltà che $\mathcal{B}(0)$ è una base per un filtro su H verificante le condizioni (i), (ii), (iii), (v) del Teorema 1.1 del §4. Pertanto, in virtù del Teorema 1.1 del §4, $\mathcal{B}(0)$ è una base del filtro degli intorni dell'origine in H per una topologia vettoriale se e solo se per ogni $A\in\mathfrak{S}$ e ogni $U\in\mathcal{F}_Y(0)$, $V(A,U)$ è assorbente.

Basterà allora provare che la condizione (1.3) equivale alla condizione

(1.4) $\quad A\in\mathfrak{S},\ U\in\mathcal{J}_Y(0) \Rightarrow V(A,U)$ assorbente.

Le condizioni (1.3) e (1.4) sono equivalenti perchè

$f(A)$ limitato in $Y \iff \forall U\in\mathcal{J}_Y(0)\ \exists d_u>0$ tale che $df(A)\subseteq U \quad \forall |d|\le d_u \iff \forall U\in\mathcal{J}_Y(0)\ \exists d_u>0$ tale che $df\in V(A,U) \quad \forall |d|\le d_u \iff \forall U\in\mathcal{J}_Y(0)\ V(A,U)$ assorbe f. #

COROLLARIO. Siano X,Y spazi vettoriali topologici e $\mathcal{L}(X,Y)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari e continue di X in Y.
Se $\mathfrak{S}$ è una famiglia di parti limitate di X, la topologia su $\mathcal{L}(X,Y)$ della convergenza uniforme su ogni $A\in\mathfrak{S}$ è una topologia vettoriale.
Lo spazio vettoriale $\mathcal{L}(X,Y)$, dotato di tale topologia, sarà indicato con $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(X,Y)$.

Il Corollario discende immediatamente dal Teorema 1.1 poichè sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 1.3. Siano X,Y spazi vettoriali topologici e sia $f\in\mathcal{L}(X,Y)$. Se A è una parte limitata di X, allora $f(A)$ è una parte limitata di Y (cioè, come si suole dire, f è limitata).
Dimostrazione della Prop. 1.3. Sia V un intorno di 0 in Y. Dalla continuità di f segue che $f^{-1}(V)$ è un intorno di 0 in X e quindi, essendo A limitato in X, esiste $d>0$ tale che $A\subseteq d f^{-1}(V)$. Pertanto, ricordando che f è lineare, risulta
$f(A)\subseteq f(d f^{-1}(V)) = d f(f^{-1}(V))\subseteq dV$. Dunque $f(A)$ è limitato in Y se A è limitato in X. #

Se X è metrizzabile la continuità di un'applicazione lineare di X in Y equivale alla sua limitatezza, come segue dalla Prop. 1.3 e dalla seguente

PROPOSIZIONE 1.4. Siano X,Y spazi vettoriali topologici con X metrizzabile e f un'applicazione lineare di X in Y. Se f è limitata (cioè mappa limitati di X in limitati di Y) allora f è continua.
Dimostrazione. Supponiamo che f sia limitata e non continua. Allora esiste un intorno equilibrato V dell'origine in Y tale che $f^{-1}(V)$ non è un intorno dell'origine in X.
Essendo X metrizzabile esiste (v. Teor. 2.2 del §4) una base numerabile $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ di intorni di 0 in X; non è restrittivo supporre $U_1\supseteq U_2\supseteq\dots U_m\supseteq\dots$.
Poichè $f^{-1}(V)$ non è un intorno dell'origine in X, per ogni $m\in\mathbb{N}$ si ha

$$\frac{1}{m}U_m \not\subseteq f^{-1}(V).$$

Pertanto, per ogni $m \in \mathbb{N}$, esiste $x_m \in \frac{1}{m} U_m$ tale che $f(x_m) \notin V$; allora la successione $(m x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge a 0 e quindi è limitata in X. Essendo f limitata, la successione $(m f(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ è limitata in Y e quindi esiste $\lambda > 0$ tale che $m f(x_m) \in \lambda V \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Ricordando che V è equilibrato, si ha allora, per $m \geq \lambda$,

$$f(x_m) \in \lambda/_m V \subseteq V$$

in contraddizione con il fatto che $f(x_m) \notin V \quad \forall m \in \mathbb{N}$. Dunque se f è limitata, essa è continua. #

Ricordiamo che una prebase (una base se $\mathfrak{S}$ è filtrante) di intorni dell'origine in $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ è $\{V(A,U) : A \in \mathfrak{S},\ U \in \mathcal{F}_Y(0)\}$, ove

$$V(A,U) = \{f \in \mathcal{L}(X,Y) : \quad f(A) \subseteq U\}.$$

Si verifica facilmente che dalla convessità di U segue la convessità di $V(A,U)$, qualunque sia $A \in \mathfrak{S}$; pertanto, se Y è localmente convesso anche $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ è localmente convesso.

Supposto Y localmente convesso, sia $\mathcal{P}_Y$ una famiglia di seminorme definente la topologia di Y.

Se $p \in \mathcal{P}_Y$ e $A \in \mathfrak{S}$, poniamo $\forall f \in \mathcal{L}(X,Y)$,

$$(1.5) \qquad p_A(f) = \sup_{x \in A} p(f(x)) \quad .$$

Per la Prop. 1.3 $f(A)$ è limitato in Y e quindi $p_A(f) < +\infty$.

p_A è chiaramente una seminorma su $\mathcal{L}(X,Y)$ e la pseudometrica d_A ad essa associata è definita da $d_A(f,g) = \sup_{x\in A} d_p(f(x), g(x))$, ove d_p è la pseudometrica associata a p. Pertanto, ricordando la definizione di $\mathfrak{S}$-topologia, sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 1.5. <u>Siano X, Y spazi vettoriali topologici e $\mathfrak{S}$ una famiglia di parti limitate di X che ricopr. Se Y è localmente convesso, tale è $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(X,Y)$; inoltre, se $\mathcal{P}_Y$ è una famiglia di seminorme definente la topologia di Y, la topologia di $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(X,Y)$ è definita dalla famiglia $\{p_A : p \in \mathcal{P}_Y,\ A \in \mathfrak{S}\}$ delle seminorme p_A definite da (1.5).</u>

Le più importanti $\mathfrak{S}$-topologie su $\mathcal{L}(X,Y)$, (X, Y spazi vettoriali topologici) sono le seguenti.

(a) La <u>topologia della convergenza semplice (o puntuale)</u>: si ha quando $\mathfrak{S}$ è la famiglia di tutte le parti finite di X

(b) La <u>topologia della convergenza convessa, equilibrata, compatta</u>: si ha quando $\mathfrak{S}$ è la famiglia di tutte le parti convesse, equilibrate e compatte di X.

(c) La <u>topologia della convergenza compatta</u>: si ha quando $\mathfrak{S}$ è la famiglia di tutte le parti compatte di X.

(d) La <u>topologia della convergenza limitata</u>: si ha quando $\mathfrak{S}$ è la famiglia di tutte le parti limitate di X.

PROPOSIZIONE 1.6. Se X, Y sono spazi seminormabili, è seminormabile anche la topologia della convergenza limitata su $\mathcal{L}(X,Y)$: anzi è normabile se Y è normabile (e X seminormabile). Se p_X è una seminorma su X definente la topologia di E e p_Y è una seminorma su Y definente la topologia di Y, allora la topologia della convergenza limitata su $\mathcal{L}(X,Y)$ è definita dalla seminorma [norma se p_Y è una norma]

$$(1.6) \qquad f \mapsto \sup_{p_X(x)\le 1} p_Y(f(x)) .$$

Dimostrazione. La topologia della convergenza limitata su $\mathcal{L}(X,Y)$ è definita dalla famiglia $\{p_A : A \text{ limitato in } X\}$ delle seminorme p_A, ove

$$p_A(f) = \sup_{x\in A} p_Y(f(x)) \qquad , \quad f\in \mathcal{L}(X,Y).$$

Posto $S(1) = \{x\in X : p_X(x) \le 1\}$, $S(1)$ è limitato in X e la seminorma (1.6) altro non è che $p_{S(1)}$. Per provare che la topologia definita dalla famiglia $\{p_A : A \text{ limitato in } X\}$ coincide con la topologia definita dall'unica seminorma $p_{S(1)}$ basta verificare (in base alla Prop. 4.2 del §4) che per ogni A limitato in X esiste un numero positivo c_A tale che $p_A \le c_A\, p_{S(1)}$.
Ciò è vero perchè, essendo A limitato, esiste $c_A > 0$ tale che $A \subseteq \{x\in X : p_X(x) \le c_A\} = c_A S(1)$ e quindi, $\forall f \in \mathcal{L}(X,Y)$

$$p_A(f) = \sup_{x\in A} p_Y(f(x)) \le \sup_{x\in c_A S_1} p_Y(f(x)) = c_A \sup_{x\in S(1)} p_Y(f(x)) = c_A\, p_{S(1)}(f) .$$

E' chiaro, infine, che, se p_Y è una norma, anche (1.6) è una norma. #

Dalla Prop. 1.5 segue che il duale(*) X' di uno spazio vettoriale topologico X, dotato di una $\mathfrak{S}$-topologia, ove $\mathfrak{S}$ è una famiglia di parti limitate di X, è uno spazio (vettoriale topologico) localmente convesso. La topologia della convergenza semplice su X' è detta anche la topologia debole su X' (in effetti essa è la topologia debole rispetto alla famiglia $\{\pi_x : x\in X\}$ delle valutazioni $\pi_x : x' \mapsto x'(x)$) e lo spazio X' dotato di tale topologia è detto il duale debole di X e viene indicato con X'_s. La topologia della convergenza limitata su X' è detta anche la topologia forte su X' e lo spazio X' dotato di tale topologia è detto il duale forte di X ed è indicato(+) con X'_b.
Per dire che un sottoinsieme di X' è limitato, compatto ecc. in X'_s (risp. in X'_b) si usa dire che esso è debolmente (risp. fortemente) limitato, compatto, ecc. Analogamente, si usa dire che una rete o una successione in X' converge debolmente (risp. fortemente) se essa converge in X'_s (risp. in X'_b).
Dalla Prop. 1.5 segue che la topologia di X'_s è definita dalla famiglia delle seminorme

$$x' \mapsto |x'(x)| \qquad , \quad x\in X.$$

(*) Ricordiamo (v. § 4, n. 8) che $X' = \mathcal{L}(X,\mathbb{C})$, cioè che X' è lo spazio vettoriale delle forme lineari e continue su X.
(+) Nelle notazioni X'_s e X'_b, la lettera s sta evidentemente per "semplice" e la lettera b sta per "borné" o "bounded" (cioè per limitato).

e che la topologia di X'_b è definita dalla famiglia $\{p_A : A \text{ limitato di } X\}$ delle seminorme p_A, ove
$$p_A(x') = \sup_{x\in A} |x'(x)| \qquad , x' \in X'.$$

Se X è seminormabile, dalla Prop. 1.6 segue che il suo duale forte X'_b è normabile e che, se p è una seminorma definente la topologia di X, la topologia di X'_b è definita dalla norma
$$x' \mapsto \sup_{p(x)\le 1} |x'(x)| \qquad , x' \in X'.$$

* * * * *

Torniamo al caso generale in cui X è un insieme, $(Y, \mathcal{U}_Y)$ uno spazio uniforme e $\mathfrak{S}$ una famiglia di parti di X.

PROPOSIZIONE 1.7. Se Y è di Hausdorff e $\mathfrak{S}$ è un ricoprimento di X [cioè $\bigcup\mathfrak{S} = X$], allora la $\mathfrak{S}$-topologia su Y^X è di Hausdorff.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}_Y$ una famiglia di pseudometriche definente $\mathcal{U}_Y$. Si tratta di provare (v. §2, n.3) che, essendo Y di Hausdorff e $\mathfrak{S}$ un ricoprimento di X, si ha
$$f, g \in Y^X,\ f \ne g \Longrightarrow d_A(f,g) \ne 0 \text{ per qualche } d \in \mathcal{P}_Y \text{ e qualche } A \in \mathfrak{S}.$$
Ciò è vero perchè, se $f \ne g$, esiste $x \in X$ tale che $f(x) \ne g(x)$ e quindi (essendo Y di Hausdorff) esiste $d \in \mathcal{P}_Y$ tale che $d(f(x), g(x)) \ne 0$, donde $d_A(f,g) = \sup_{x\in A} d(f(x), g(x)) \ne 0$ per ogni $A \in \mathfrak{S}$ contenente x (certamente esistente perchè $\mathfrak{S}$ è un ricoprimento di X). #

PROPOSIZIONE 1.8. Se $\mathfrak{S}$ ricopre X, una rete $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ in Y^X converge a $f \in Y^X$ uniformemente su ogni $A \in \mathfrak{S}$ se e solo se essa è di Cauchy per $\mathcal{U}_\mathfrak{S}$ e converge puntualmente a f [cioè $(f_\alpha(x))_{\alpha\in A}$ converge a $f(x)$ in Y per ogni $x \in X$].

Dimostrazione. In un senso l'affermazione è ovvia. Supponiamo che $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ sia di Cauchy per l'uniformità $\mathcal{U}_\mathfrak{S}$ e converga puntualmente a f e proviamo che allora essa converge a f uniformemente su ogni $A \in \mathfrak{S}$. Sia $\mathcal{P}_Y$ una famiglia di pseudometriche definenti $\mathcal{U}_Y$.
Poichè $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ è di Cauchy per l'uniformità $\mathcal{U}_\mathfrak{S}$, per ogni $d \in \mathcal{P}_Y$, ogni $A \in \mathfrak{S}$ e ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\alpha_0 \in A$ tale che $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \ge \alpha_0$, $\beta \ge \alpha_0 \Longrightarrow \sup_{x\in A} d(f_\alpha(x), f_\beta(x)) \le \varepsilon$.
Da ciò segue immediatamente – ricordando che $d(f_\alpha(x), f(x)) \le d(f_\alpha(x), f_\beta(x)) + d(f_\beta(x), f(x))$ e che $\forall x \in X$ $(f_\beta(x))_{\beta\in A}$ converge a $f(x)$ – che
$$\alpha \ge \alpha_0 \Longrightarrow \sup_{x\in A} d(f_\alpha(x), f(x)) \le \varepsilon.$$
#

COROLLARIO. Se $(Y, \mathcal{U}_Y)$ è completo e $\mathfrak{S}$ ricopre X, allora Y^X è completo rispetto all'uniformità della convergenza uniforme su ogni $A \in \mathfrak{S}$ (oltre che rispetto all'uniformità prodotto, cioè all'uniformità della convergenza semplice).

Dimostrazione. Se $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ è una rete di Cauchy in Y^X rispetto all'uniformità $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$, con $\mathfrak{S}$ che ricopre X, essa è ovviamente di Cauchy anche rispetto all'uniformità della convergenza semplice e quindi converge puntualmente, perchè, essendo $(Y, \mathcal{U}_Y)$ completo, Y^X è completo rispetto all'uniformità della convergenza semplice (in quanto il prodotto di spazi uniformi completi è completo). Detto f un limite puntuale di $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$, la rete $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge a f anche uniformemente su ogni $A \in \mathfrak{S}$, in base alla Proposizione precedente. #

TEOREMA 1.2. Siano X uno spazio topologico e Y uno spazio uniforme. L'insieme $C(X,Y)$ delle funzioni continue di X in Y è chiuso in Y^X dotato della topologia della convergenza uniforme e quindi completo per l'uniformità della convergenza uniforme se Y è completo.

Dimostrazione. Dobbiamo provare (v. Prop. 6.4 del §1) che se $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ è una rete in $C(X,Y)$ che converge uniformemente a $f \in Y^X$, allora $f \in C(X,Y)$.

Sia $\mathcal{P}_Y$ una famiglia di pseudometriche su Y definente l'uniformità di Y (e la topologia ad essa associata). Poichè $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ converge uniformemente a f, dati arbitrariamente $d \in \mathcal{P}_Y$ e un numero $\varepsilon > 0$, esiste $\bar{\alpha} \in A$ tale che $A \ni \alpha \geq \bar{\alpha} \Longrightarrow \sup_{x \in X} d(f_\alpha(x), f(x)) \leq \varepsilon/3$; in particolare

$$(1.7) \qquad \sup_{x \in X} d(f_{\bar{\alpha}}(x), f(x)) \leq \varepsilon/3 .$$

Sia $x_0 \in X$. Dalla continuità di $f_{\bar{\alpha}}$ segue l'esistenza di un intorno $V_{\bar{\alpha}}$ di x_0 tale che

$$(1.8) \qquad d(f_{\bar{\alpha}}(x), f_{\bar{\alpha}}(x_0)) \leq \varepsilon/3 .$$

Avendosi $d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_{\bar{\alpha}}(x)) + d(f_{\bar{\alpha}}(x), f_{\bar{\alpha}}(x_0)) + d(f_{\bar{\alpha}}(x_0), f(x_0))$, da (1.7), (1.8) segue $d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon \quad \forall x \in V_{\bar{\alpha}}$. Dunque f è continua in x_0. Poichè lo stesso ragionamento può farsi per ogni $x_0 \in X$, se ne deduce la continuità di f. #

Procedendo in maniera analoga [il lettore può facilmente convincersene] si ottiene il seguente

TEOREMA 1.3. Siano X uno spazio topologico, $\mathfrak{S}$ un insieme di parti di X che ricopre X e Y uno spazio uniforme. L'insieme delle funzioni di X in Y continue su ogni $A \in \mathfrak{S}$ è chiuso nell'insieme Y^X di tutte le funzioni di X in Y dotato della topologia della convergenza uniforme su ogni $A \in \mathfrak{S}$ e quindi completo rispetto all'uniformità $\mathcal{U}_{\mathfrak{S}}$ se Y è completo.

Si noti che, se $\mathfrak{S} = \{\{x\} : x \in X\}$, l'insieme delle funzioni di X in Y continue su ogni elemento di $\mathfrak{S}$ è l'insieme di tutte le funzioni di X in Y.

PROPOSIZIONE 1.9. Siano X, Y spazi vettoriali topologici. Se X è seminormabile e Y è di Hausdorff e completo allora $\mathcal{L}(X,Y)$, con l'uniformità della convergenza limitata, è completo.

Dimostrazione. Essendo Y completo, Y^X è completo per l'uniformità della convergenza limitata (v. Corollario della Prop. 1.8). Pertanto (in base alla Prop. 8.4 del §2) per dimostrare la Prop. 1.9 basta provare che, se X è seminormabile, allora $\mathcal{L}(X,Y)$ è chiuso in Y^X rispetto alla topologia della convergenza limitata. Ciò è vero. Sia, infatti, $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ una rete in $\mathcal{L}(X,Y)$ convergente a $f \in Y^X$ uniformemente su ogni limitato di X. Allora f è lineare (in virtù della Prop. 1.2) e la restrizione di f a ogni parte limitata di X è continua (per il Teorema 1.3); di conseguenza, se X è seminormabile, $f \in \mathcal{L}(X,Y)$, (perchè, in tale ipotesi, ogni punto di X ha un intorno limitato); donde la conclusione in virtù della Prop. 6.4 del §1. #

Dalla Proposizione 1.9, ricordando il Corollario della Prop. 1.6, seguono i seguenti due corollari:

COROLLARIO 1. Se X è uno SVT seminormabile e Y è uno SVT normabile e completo, allora $\mathcal{L}(X,Y)$, con la topologia della convergenza limitata, è uno SVT normabile e completo.

COROLLARIO 2. Il duale forte X'_b di uno SVT seminormabile X è uno SVT normabile e completo

2. EQUICONTINUITÀ. IL TEOREMA DI ASCOLI.

Siano X uno spazio topologico e $(Y, \mathcal{U}_Y)$ uno spazio uniforme.
Un sottoinsieme H dell'insieme Y^X (delle funzioni di X in Y) dicesi **equicontinuo in $x_0 \in X$** se per ogni $U \in \mathcal{U}_Y$ esiste un intorno V_{x_0} di x_0 in X tale che

$$x \in V_{x_0} \Rightarrow (f(x), f(x_0)) \in U \qquad \forall f \in H,$$

cioè tale che $x \in V_{x_0} \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0)) \quad \forall f \in H$, ove al solito (v. § 2, n. 3), $U(f(x_0)) = \{y \in Y : (y, f(x_0)) \in U\}$. H dicesi **equicontinuo** se è equicontinuo in ogni $x_0 \in X$.
È chiaro che, se H è equicontinuo, ogni elemento di H è una funzione continua di X in Y.
Se $\mathcal{P}_Y$ è una famiglia di pseudometriche definenti l'uniformità $\mathcal{U}_Y$, dalla definizione segue immediatamente che H è equicontinuo in x_0 se e solo se per ogni $d \in \mathcal{P}_Y$ e ogni numero $\varepsilon > 0$ esiste un intorno V_{x_0} di x_0 tale che $\sup_{x \in V_{x_0}} d(f(x), f(x_0)) \le \varepsilon \quad \forall f \in H$.

PROPOSIZIONE 2.1. Se il sottoinsieme H di Y^X è equicontinuo in $x_0 \in X$, anche la chiusura puntuale di H (cioè la chiusura di H nello spazio prodotto Y^X) è equicontinua in x_0.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}_Y$ una famiglia di pseudometriche definenti l'uniformità di Y.
Siano $d \in \mathcal{P}_Y$ e ε un numero > 0. Poichè H è equicontinuo in x_0 esiste un intorno V_{x_0} di x_0 in X tale che $x \in V_{x_0} \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) \le \varepsilon/3 \quad \forall f \in H$.
Sia $\bar{f}$ un elemento della chiusura (puntuale) di H nello spazio prodotto Y^X; allora, per ogni prefissato $x \in X$, esiste $f \in H$ tale che $d(\bar{f}(x), f(x)) \le \varepsilon/3$, $d(\bar{f}(x_0), f(x_0)) \le \varepsilon/3$. Pertanto, tenendo presente che $d(\bar{f}(x), \bar{f}(x_0)) \le d(\bar{f}(x), f(x)) + d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), \bar{f}(x_0))$, si ha $d(\bar{f}(x), \bar{f}(x_0)) \le \varepsilon$ per ogni $x \in V_{x_0}$ e per ogni $\bar{f}$ appartenente alla chiusura puntuale di H.
Dunque la chiusura puntuale di H è un sottoinsieme equicontinuo di Y^X. #

PROPOSIZIONE 2.2. Se un sottoinsieme H di Y^X è equicontinuo, su H l'uniformità della convergenza compatta coincide con l'uniformità della convergenza semplice.

Dimostrazione. Poichè l'uniformità della convergenza compatta contiene l'uniformità della convergenza puntuale, si tratta di mostrare che, detta $\mathcal{P}_Y$ una famiglia di pseudometriche definenti l'uniformità di Y, per ogni $d \in \mathcal{P}_Y$, ogni compatto K di X e ogni numero $\varepsilon > 0$ esistono una pseudometrica $d' \in \mathcal{P}_Y$, una parte finita F di X e un numero $\delta > 0$ tali che per ogni $f, g \in H$ si abbia

$$\sup_{x \in F} d'(f(x), g(x)) \le \delta \Longrightarrow \sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) \le \varepsilon. \tag{2.1}$$

Proviamo che vale (2.1) con $d' = d$ e $\delta = \varepsilon/3$.

Essendo H equicontinuo, ad ogni $x \in X$ possiamo associare un suo intorno aperto V_x in X tale che

$$y \in V_x \Rightarrow d(f(y), f(x)) \leq \varepsilon/3 \qquad \forall f \in H.$$

$(V_x \cap K)_{x \in K}$ è un ricoprimento aperto del compatto K di X e quindi esiste una parte finita F di K tale che $K \subseteq \bigcup_{x \in F} V_x$.

Sia $x \in K$; allora $x \in V_{\bar{x}}$ per qualche $\bar{x} \in F$ e quindi

$$d(f(x), f(\bar{x})) \leq \varepsilon/3 \qquad \forall f \in H.$$

Pertanto, essendo $d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(\bar{x})) + d(f(\bar{x}), g(\bar{x})) + d(g(\bar{x}), g(x))$, da $\sup_{x \in F} d(f(x), g(x)) \leq \varepsilon/3$ $(f, g \in H)$, segue $\sup_{x \in K} d(f(x), g(x)) \leq \varepsilon$. #

TEOREMA 2.1 (di Ascoli). Siano X uno spazio topologico e Y uno spazio uniforme. Un sottoinsieme equicontinuo H di Y^X è relativamente compatto per la topologia della convergenza uniforme sui compatti di X [e quindi per la topologia della convergenza uniforme su X se X è compatto] se per ogni $x \in X$ l'insieme $H(x) = \{f(x) \in Y : f \in H\}$ è relativamente compatto in Y.

Dimostrazione. Il Teorema 2.1 è una conseguenza immediata delle Proposizioni 2.1 e 2.2.
Infatti, poiché, per ogni $x \in X$, $H(x)$ è relativamente compatto in Y, allora (v. Prop. 1.1) H è relativamente compatto nello spazio prodotto Y^X (cioè per la topologia della convergenza semplice); d'altra parte, essendo H equicontinuo, anche la sua chiusura puntuale è equicontinua (per la Prop. 2.1) e quindi su tale chiusura la topologia della convergenza semplice coincide con quella della convergenza uniforme sui compatti di X (per la Prop. 2.2); dunque H è relativamente compatto anche per la topologia della convergenza uniforme sui compatti di X. #

PROPOSIZIONE 2.3. Siano X uno spazio topologico, Y uno spazio uniforme di Hausdorff e H un sottoinsieme di $C(X,Y)$. Se H è relativamente compatto rispetto alla topologia della convergenza uniforme, allora H è equicontinuo e, per ogni $x \in X$, $H(x)$ è relativamente compatto in Y.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}_Y$ una famiglia di pseudometriche su Y definente l'uniformità di Y.
Poiché H è relativamente compatto rispetto all'uniformità della convergenza uniforme, esso è totalmente limitato rispetto a tale uniformità (v. §2, n. 12) e quindi per ogni $d \in \mathcal{P}_Y$ e ogni numero $\varepsilon > 0$ esiste un sottoinsieme finito $\{f_1, .., f_m\}$ di H tale che

$$(2.2) \qquad H = \bigcup_{i=1}^{m} \{f \in H : \sup_{x \in X} d(f(x), f_i(x)) \leq \varepsilon/3\}.$$

Fissato (arbitrariamente) $x_0 \in X$, l'insieme

$$V = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in X : d(f_i(x), f_i(x_0)) \leq \varepsilon/3\}$$

è un intorno di x_0 in X (perchè f_i è continua) e risulta

$$\sup_{x\in V} d(f(x), f(x_0)) \le \varepsilon \qquad \forall f\in H.$$

Infatti, data $f\in H$, per (2.2) si ha

$$\sup_{x\in X} d(f(x), f_i(x)) \le \varepsilon/3 \qquad \text{per qualche } i\in\{1,..,m\}$$

e quindi

$$\sup_{x\in V} d(f(x), f(x_0)) \le \sup_{x\in V} d(f(x), f_i(x)) + \sup_{x\in V} d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), f(x_0)) \le \varepsilon.$$

Dunque H è equicontinuo in x_0.

Infine, essendo H relativamente compatto per la topologia della convergenza uniforme, H è relativamente compatto per la topologia della convergenza semplice e quindi, per la Prop. 1.1, $H(x)$ è relativamente compatto in Y, per ogni $x\in X$. #

Dal Teorema 2.1 e dalla Prop. 2.3 discende immediatamente il seguente

TEOREMA 2.2. Siano X uno spazio topologico compatto, Y uno spazio uniforme di Hausdorff e H un insieme di funzioni continue di X in Y. H è relativamente compatto per la topologia della convergenza uniforme se e solo se H è equicontinuo e, per ogni $x\in X$, $H(x)$ è relativamente compatto in Y.

Si osservi che dal Teorema 2.1 segue immediatamente il seguente

COROLLARIO. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni complesse definite in uno spazio topologico compatto X. Se l'insieme delle funzioni f_n, $n\in\mathbb{N}$, è equicontinuo ed equilimitato (cioè esiste un numero $M>0$ tale che $|f_n(x)|\le M$ $\forall x\in X$ e $\forall n\in\mathbb{N}$), allora qualche sottosuccessione di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente (verso una funzione continua di X in $\mathbb{C}$).

3. SOTTOINSIEMI EQUICONTINUI DI $\mathcal{L}(X,Y)$, CON X,Y SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI. SPAZI BARILATI. IL TEOREMA DI BANACH-STEINHAUS.

Siano X, Y spazi vettoriali topologici. Indicheremo, al solito, con $\mathcal{F}_X(0)$ il filtro degli intorni dell'origine in X e con $\mathcal{F}_Y(0)$ il filtro degli intorni dell'origine in Y.

Ad X e Y si penserà associata la loro struttura uniforme canonica (v. § 4, n. 2).

Dalla definizione segue immediatamente che <u>un insieme H di funzioni di X in Y è equicontinuo in $x_0 \in X$ se e solo se per ogni $U \in \mathcal{F}_Y(0)$ esiste $V \in \mathcal{F}_X(0)$ tale che</u>

$$x \in x_0 + V \implies f(x) \in f(x_0) + U \qquad \forall f \in H.$$

Ne segue che [indicando, al solito, con $L(X,Y)$ l'insieme delle funzioni lineari di X in Y] un sottoinsieme H di $L(X,Y)$ è equicontinuo se e solo se per ogni $U \in \mathcal{F}_Y(0)$ esiste $V \in \mathcal{F}_X(0)$ tale che $f(V) \subseteq U \quad \forall f \in H$, o, equivalentemente se e solo se $U \in \mathcal{F}_Y(0) \Rightarrow \overset{-1}{f}(U) \in \mathcal{F}_X(0)$ $\forall f \in H$.

Per motivi di compattezza delle notazioni, conviene porre

$$H(V) = \bigcup_{f \in H} f(V), \qquad \overset{-1}{H}(U) = \bigcap_{f \in H} \overset{-1}{f}(U).$$

Allora possiamo affermare che <u>un sottoinsieme H di $L(X,Y)$ è equicontinuo se e solo se per ogni $U \in \mathcal{F}_Y(0)$ esiste $V \in \mathcal{F}_X(0)$ tale che</u>

$$H(V) \subseteq U,$$

<u>oppure</u>, equivalentemente, <u>se e solo se</u>

$$U \in \mathcal{F}_Y(0) \implies \overset{-1}{H}(U) \in \mathcal{F}_X(0).$$

Ricordiamo che, se X, Y sono spazi vettoriali topologici, $\mathcal{L}(X,Y)$ denota lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari e continue di X in Y.

PROPOSIZIONE 3.1. <u>Ogni sottoinsieme equicontinuo di $\mathcal{L}(X,Y)$ è limitato per la topologia della convergenza limitata</u>.

Dimostrazione. Sia H un sottoinsieme equicontinuo di $\mathcal{L}(X,Y)$. Proviamo che H è limitato per la topologia della convergenza limitata, cioè che per ogni parte limitata A di X e ogni intorno dell'origine U in Y esiste un numero $\lambda > 0$ tale che $\lambda H \subseteq \{f \in \mathcal{L}(X,Y) : f(A) \subseteq U\}$. Fissiamo dunque A e U. Poiché H è equicontinuo esiste un intorno W dell'origine in X tale che $H(W) \subseteq U$. Poiché A è limitato in X esiste un numero $\lambda > 0$ tale che $\lambda A \subseteq W$, donde $\lambda H(A) \subseteq H(W) \subseteq U$, ossia $(\lambda f)(A) \subseteq U$ $\forall f \in H$, ossia $\lambda H \subseteq \{f \in \mathcal{L}(X,Y) : f(A) \subseteq U\}$. #

* * * * *

Se X è uno spazio vettoriale topologico, chiameremo <u>barile</u> di X (in inglese barrel; in francese tonneau) ogni parte di X convessa, equilibrata, assorbente e chiusa.
Diremo che uno spazio vettoriale topologico è <u>barilato</u> (in inglese barreled; in francese tonnelé) se ogni barile di X è un intorno dell'origine in X.
Gli spazi vettoriali topologici di uso più frequente sono barilati, come segue dalla seguente

PROPOSIZIONE 3.2. <u>Ogni spazio vettoriale topologico di Baire è barilato</u>.
Dimostrazione. Ricordiamo che uno SVT è di Baire se e solo se non è unione numerabile di insiemi con la chiusura priva di punti interni (v. § 4, n. 9).
Sia X uno spazio di Baire e B un barile di X. Poichè B è assorbente si ha $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB$.
Da ciò segue $\mathring{B} \neq \emptyset$ perchè, se fosse $\mathring{B} = \emptyset$, X sarebbe unione numerabile di chiusi (in quanto nB è chiuso, tale essendo B) con l'interno vuoto e quindi non sarebbe di Baire.
Sia $x \in \mathring{B}$. Se $x = 0$ la Proposizione è dimostrata. Se $x \neq 0$ si ha $-x \in -\mathring{B} = \mathring{B}$ (perchè $-B = B$ essendo B equilibrato), donde $0 = \frac{x - x}{2} \in \mathring{B}$ (perchè $\mathring{B}$ è convesso, tale essendo B). #

COROLLARIO 1. <u>Ogni SVT pseudometrizzabile e completo è barilato</u>. <u>In particolare è barilato ogni spazio di Fréchet</u>.
Dimostrazione. Basta ricordare che ogni SVT pseudometrizzabile e completo è di Baire (v. Teorema 11.1 del § 2).
COROLLARIO 2. <u>Ogni spazio localmente convesso che sia limite induttivo stretto di una successione di spazi di Fréchet è barilato</u>. <u>In particolare sono barilati gli spazi $C^m(\Omega)$, $C^m_c(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ considerati al n. 6 del § 4</u>.
Dimostrazione. Sia X limite induttivo stretto della successione $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di spazi di Fréchet e sia B un barile di X. Poichè la topologia indotta da quella di X su ogni X_n coincide la topologia di X_n, $B \cap X_n$ è un barile di X_n $\forall n \in \mathbb{N}$ e quindi (essendo X_n barilato) $B \cap X_n$ è un intorno dell'origine in X_n. Ne segue (v. § 4, n. 7) che B è un intorno dell'origine in X. Pertanto X è barilato. #

PROPOSIZIONE 3.3. <u>Siano X uno spazio vettoriale topologico barilato e Y uno spazio localmente convesso. Ogni sottoinsieme puntualmente limitato di $\mathcal{L}(X, Y)$ è equicontinuo</u>.
Dimostrazione. Sia H un sottoinsieme di $\mathcal{L}(X, Y)$ limitato per la topologia della convergenza puntuale. Poichè Y (in quanto localmente convesso) ha una base di intorni dell'origine costituita di barili (v. § 4, n. [illegible] e Prop. 1.1 del § 4), per provare che H è equicontinuo basta evidentemente provare che, per ogni intorno dell'origine B in Y che sia un barile, $H^{-1}(B)$ è un intorno dell'origine in X.

A tale scopo osserviamo che se B è un barile di Y, $f^{-1}(B)$ è convesso equilibrato e chiuso (perché f è lineare e continua) e quindi anche $H^{-1}(B)$ è un sottoinsieme convesso equilibrato e chiuso di X. Se proviamo che $H^{-1}(B)$ è anche assorbente, esso è un barile di X e quindi un intorno dell'origine in X (perché, per ipotesi, X è barilato). Mostriamo, pertanto, che $H^{-1}(B)$ è assorbente. Sia $x \in X$. Per la limitatezza puntuale di H, esiste $\lambda > 0$ tale che $H \subseteq \lambda V(\{x\}, B) = \{\lambda f \in \mathcal{L}(X,Y) : f(x) \in B\} = \{f \in \mathcal{L}(X,Y) : f(x) \in \lambda B\}$; ciò significa che $x \in f^{-1}(\lambda B)$ $\forall f \in H$, cioè che $x \in H^{-1}(\lambda B) = \lambda H^{-1}(B)$; dunque $H^{-1}(B)$ è assorbente. #

La Proposizione 3.3 è molto importante. Una sua conseguenza è il seguente

TEOREMA 3.1 (di Banach-Steinhaus). Se X è uno spazio vettoriale topologico barilato, Y uno spazio localmente convesso e H un sottoinsieme di $\mathcal{L}(X,Y)$, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) H è limitato per la topologia della convergenza puntuale;

(ii) H è limitato per la topologia della convergenza limitata;

(iii) H è equicontinuo.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (iii) per la Prop. 3.3; (iii) $\Rightarrow$ (ii) per la Prop. 3.1; (ii) $\Rightarrow$ (i) banalmente. #

COROLLARIO 1. Siano (Y, p_X), (Y, p_Y) spazi seminormati di cui il primo completo e H un sottoinsieme di $\mathcal{L}(X,Y)$. Allora

$$\sup_{f\in H} p_Y(f(x)) < +\infty \quad \forall x \in X \implies \sup_{f\in H}\left(\sup_{p_X(x)\le 1} |p_Y(f(x))|\right) < +\infty$$

Dimostrazione. Il Corollario segue immediatamente dall'implicazione (i) $\Rightarrow$ (ii) e dalla Prop. 1.6. #

COROLLARIO 2. Siano X uno SVT barilato, Y uno spazio localmente convesso, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{L}(X,Y)$ e f una funzione di X in Y. Se, per ogni $x \in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$ in Y, allora $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f uniformemente su ogni compatto di X

Dimostrazione. Dalla Prop. 1.2 segue innanzitutto che f è lineare. Poiché $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge nella topologia della convergenza puntuale, essa è limitata per tale topologia e quindi (per il Teorema 3.1) il sottoinsieme $H = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ di $\mathcal{L}(X,Y)$ è equicontinuo. Allora (per la Prop. 2.1) anche la chiusura di H rispetto alla topologia della convergenza puntuale è (un sottoinsieme di $L(X,Y)$) equicontinuo. Poiché f appartiene a tale chiusura, si deduce che f è continua e quindi che $f \in \mathcal{L}(X,Y)$. Infine, la convergenza di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a f è uniforme su ogni compatto perché (in base alla Prop. 2.2) su un sottoinsieme equicontinuo di Y^X la topologia della convergenza semplice coincide con quella della convergenza compatta. #

COROLLARIO 3. Se X è uno SVT barilato, X'_s è completo per successioni, nel senso che ogni successione di Cauchy in X'_s è convergente.

Dimostrazione. Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in X'_s. Allora, $\forall x \in E$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $\mathbb{C}$ e quindi converge. Detto $f(x)$ il suo limite in $\mathbb{C}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f in $\mathbb{C}^X$ e, per il Corollario precedente, $f \in X'$. #

PROPOSIZIONE 3.4. Siano X uno spazio vettoriale topologico e H un sottoinsieme del duale X' di X. Se H è equicontinuo, allora H è debolmente relativamente compatto (cioè relativamente compatto in X'_s).

Dimostrazione. Sia H equicontinuo; allora H è limitato in X'_s. Dunque, per ogni $x \in X$, $H(x)$ è limitato, cioè relativamente compatto in $\mathbb{C}$. Allora (per la Prop. 1.1) H è relativamente compatto in $\mathbb{C}^X$ e quindi in X'_s, perchè (per le Prop. 1.2 e 2.1) la chiusura di H in $\mathbb{C}^X$ è un sottoinsieme equicontinuo di $L(X,\mathbb{C})$ e quindi di X'. #

Dal Teorema 3.1 e dalla Proposizione 3.4 discende immediatamente il seguente

TEOREMA 3.2. Se X è uno spazio vettoriale topologico barilato e H è un sottoinsieme del duale X' di X, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) H è debolmente limitato (cioè limitato in X'_s)

(ii) H è fortemente limitato (cioè limitato in X'_b)

(iii) H è equicontinuo;

(iiii) H è debolmente relativamente compatto (cioè relativamente compatto in X'_s).

OSSERVAZIONE. La Proposizione 3.3 afferma, tra l'altro, che gli spazi vettoriali topologici barilati hanno la proprietà che una parte del duale è equicontinua se e solo se è debolmente limitata. Proveremo più avanti (v. Teorema 3.3 del §6) che, nell'ambito degli spazi localmente convessi, tale proprietà è caratteristica di quelli barilati, cioè che uno SLC è barilato se e solo se una parte del suo duale è equicontinua se (e solo se) è debolmente limitata.

* * * * *

TEOREMA 3.3. Sia H un sottoinsieme equicontinuo di $\mathcal{L}(X,Y)$, con X e Y spazi vettoriali topologici. Se X è separabile e Y metrizzabile, allora la topologia della convergenza puntuale induce su H una topologia metrizzabile. Se inoltre Y è separabile allora H, con la topologia della convergenza puntuale, è separabile.

Dimostrazione. Essendo Y uno spazio vettoriale topologico metrizzabile, per il Teorema 2.2 del §4 la sua topologia è definita da una pseudo-norma p.

Allora la topologia della convergenza puntuale su $\mathcal{L}(X,Y)$ è definita dalla famiglia $(p_x)_{x\in E}$ delle pseudo-seminorme p_x definite $\forall f\in\mathcal{L}(X,Y)$ da $p_x(f)=p(f(x))$.
Poichè X è separabile, esiste un sottoinsieme numerabile A di X denso in X.
Verifichiamo che per definire la topologia indotta su H da quella della convergenza puntuale è sufficiente la famiglia (numerabile) $(p_a)_{a\in A}$ di pseudo-seminorme, donde la metrizzabilità di tale topologia (v. Prop. 5.3 del §4).
A tale scopo basta constatare che $\forall x\in X$ e $\forall \varepsilon>0$ esistono $a\in A$ e $\delta>0$ tali che

$$\{f\in H : p_a(f)\leq\delta\}\subseteq\{f\in H : p_x(f)\leq\varepsilon\}. \qquad (3.1)$$

Poichè H è equicontinuo $\forall\varepsilon>0$ esiste un intorno equilibrato V dell'origine in X tale che

$$y\in V \Rightarrow p_y(f)\leq \varepsilon/2 \qquad \forall f\in H. \qquad (3.2)$$

Dato $x\in X$, sia $a\in(x+V)\cap A$. Avendosi $x-a\in -V\subseteq V$, da (3.2) segue $p_{x-a}(f)\leq\frac{\varepsilon}{2}$ $\forall f\in H$ e quindi, osservando che $p_x(f)\leq p_{x-a}(f)+p_a(f)$, sussiste l'implicazione $p_a(f)\leq\varepsilon/2 \Rightarrow p_x(f)\leq\varepsilon$ $\forall f\in H$, donde (3.1) con $\delta=\varepsilon/2$.
Il fatto che la topologia indotta su H da quella della convergenza puntuale sia definita dalla famiglia $(p_a)_{a\in A}$ di pseudo-seminorme implica evidentemente che l'applicazione

$$f\longmapsto (f(a))_{a\in A}$$

di H in Y^A è un omeomorfismo di H (dotato della topologia della convergenza puntuale) in Y^A (dotato della topologia prodotto).
Ora, se Y è separabile, si constata facilmente (ricordando che A è numerabile) che la topologia di Y^A ha una base numerabile; di conseguenza anche la topologia indotta su H da quella della convergenza puntuale ha una base numerabile (oltre ad essere metrizzabile) e quindi H, con tale topologia, è separabile, in virtù della Prop. 4.1 del §2. #

Dal Teorema 3.3 discende immediatamente il seguente

COROLLARIO 1. <u>Se X è uno spazio vettoriale topologico separabile, ogni parte equicontinua di X', con la topologia indotta da quella di X'_s</u> è (uno spazio topologico) <u>metrizzabile e separabile.</u>

Mettiamo in evidenza anche il seguente

COROLLARIO 2. <u>Se X è uno spazio vettoriale topologico barilato e separabile, ogni successione in X' debolmente limitata ammette una sottosuccessione debolmente convergente.</u>

Dimostrazione. Sia $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata in X'_s.

L' insieme $H=\{x_n' : n\in\mathbb{N}\}$, essendo limitato in X_s' è equicontinuo (v. Prop. 3.3); di conseguenza la sua chiusura puntuale è un sottoinsieme equicontinuo di X' (v. Prop. 1.2 e 2.1) e quindi (v. Prop. 3.4 e Corollario 1 del Teorema 3.3) è, con la topologia indotta da quella di X_s', uno spazio topologico metrizzabile e compatto; pertanto dalla successione $(x_n')_{n\in\mathbb{N}}$ si può estrarre una successione debolmente convergente (in base al Teorema 12.2 del § 2). #

4. COMPATTEZZA E COMPATTEZZA PER SUCCESSIONI. UN TEOREMA DI EBERLEIN.

Diremo che uno spazio topologico è compatto per successioni se ogni successione in esso ha qualche sottosuccessione convergente.
Ricordiamo che uno spazio topologico metrizzabile è compatto se e solo se è compatto per successioni (v. Teorema 12.2 del § 2).
Se lo spazio topologico non è metrizzabile in generale la compattezza non implica la compattezza per successioni né la compattezza per successioni implica la compattezza, come risulta dai seguenti due esempi.

ESEMPIO 4.1. Se C è un insieme avente la cardinalità del continuo, lo spazio $[0,1]^C$ (delle funzioni di C in $[0,1]$, dotato della topologia prodotto, cioè della topologia della convergenza puntuale) è compatto ma non è compatto per successioni.
Dimostrazione. L'insieme S delle successioni $s: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescenti ha la cardinalità del continuo (perché c'è una biiezione di S sull'insieme delle parti infinite di $\mathbb{N}$ e quindi esiste una biiezione di S su C. Basterà pertanto provare che lo spazio $[0,1]^S$ il quale è compatto (perché prodotto di spazi compatti: v. Teorema del § 1), non è compatto per successioni.
Per ogni $s \in S$, sia $a_s : \mathbb{N} \to [0,1]$ una successione in $[0,1]$ tale che la sua sottosuccessione $a_s \circ s$ non converge (basta, ad esempio, porre $a_s(n)=0$ se $n \notin s(\mathbb{N})$ e $a_s(n) = \frac{1-(-1)^{s^{-1}(n)}}{2}$ se $n \in s(\mathbb{N})$).
Definiamo ora una successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,1]^S$ ponendo $f_n(s) = a_s(n)$. Nessuna sua sottosuccessione è convergente, perché, qualunque sia $s \in S$, la sottosuccessione $(f_{s(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ di $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non converge nel punto s di S, avendosi $f_{s(m)}(s) = a_s(s(m)) = (a_s \circ s)(m)$. #
Si osservi che la stessa argomentazione mostra, evidentemente che, se X è uno spazio di Hausdorff contenente almeno due punti distinti, X^C non è compatto per successioni.

ESEMPIO 4.2. Se C è un insieme avente la cardinalità del continuo, il sottospazio di $[0,1]^C$ costituito delle funzioni $f: C \to [0,1]$ tali che $\{x \in C : f(x) \neq 0\}$ è al più numerabile è compatto per successioni ma non è compatto.
Tale sottospazio non è compatto perché è denso in $[0,1]^C$; che esso sia compatto per successioni si riconosce senza difficoltà (ricordando che l'unione numerabile di insiemi al più numerabili è un insieme numerabile).

Il seguente teorema, che ci limitiamo ad enunciare (per la dimostrazione v. H.H. SCHAEFE[R] Topological Vector Spaces, Springer-Verlag 1970, Th. 11.1), fornisce un esempio molto importante di uno spazio topologico non metrizzabile per il quale la compattezza equivale alla compattezza per successioni.

TEOREMA 4.1. Siano X uno spazio topologico compatto, Y uno spazio topologico localmente compatto a base numerabile e $C^0(X,Y)$ lo spazio delle funzioni continue di X in Y. Per la topologia della convergenza puntuale un sottoinsieme di $C^0(X,Y)$ è compatto se e solo se esso è compatto per successioni.

5. APPLICAZIONI BILINEARI.

Se X, Y, Z sono spazi vettoriali, un'applicazione $f: X\times Y \to Z$ dicesi bilineare se per ogni $x\in X$ e ogni $y\in Y$ le applicazioni (parziali) $f_x: y\mapsto f(x,y)$ e $f_y: x\mapsto f(x,y)$ sono lineari. Un'applicazione bilineare di $X\times Y$ in $\mathbb{C}$ dicesi una forma bilineare su $X\times Y$.

PROPOSIZIONE 5.1. Siano X, Y, Z spazi vettoriali topologici. Un insieme H di applicazioni bilineari di $X\times Y$ in Z è equicontinuo se (e solo se) H è equicontinuo in $(0,0)$ e quindi, in particolare, un'applicazione bilineare $f: X\times Y\to Z$ è continua se (e solo se) f è continua in $(0,0)$.

Dimostrazione. Per ogni applicazione bilineare $f: X\times Y\to Z$ sussiste, ovviamente, l'identità

$$(5.1)\qquad f(x+x_0, y+y_0) - f(x_0,y_0) = f(x,y) + f(x,y_0) + f(x_0,y).$$

Sia U un intorno dell'origine in Z e sia U_1 un intorno equilibrato dell'origine in Z tale che $U_1+U_1+U_1\subseteq U$.

Supponiamo H equicontinuo in $(0,0)$ e proviamo che, allora, H è equicontinuo in ogni $(x_0,y_0)\in X\times$
Essendo H equicontinuo in $(0,0)$ esistono un intorno V dell'origine in X e un intorno W dell'origine in Y tali che

$$(5.2)\qquad (x,y)\in V\times W \Rightarrow f(x,y)\in U_1 \quad \forall f\in H.$$

Poiché V e W sono assorbenti esiste un numero reale λ positivo e minore di 1 tale che $\lambda x_0\in V$ e $\lambda y_0\in W$. Allora, ricordando (5.2), sussistono le implicazioni

$$x/\lambda \in V \Rightarrow f(x,y_0) = f(x/\lambda, \lambda y_0)\in U_1 \quad \forall f\in H$$
$$y/\lambda \in W \Rightarrow f(x_0,y) = f(\lambda x_0, y/\lambda)\in U_1 \quad \forall f\in H.$$

Pertanto, avendo presente (5.1), si ha

$$(x,y)\in \lambda V\times\lambda W \Rightarrow f(x+x_0, y+y_0) - f(x_0,y_0)\in U_1+U_1+U_1\subseteq U \quad \forall f\in H,$$

donde, ricordando che $\lambda V\subseteq V$ e $\lambda W\subseteq W$ (perché V e W sono equilibrati e $0<\lambda<1$),

$$(x,y)\in\lambda V\times\lambda W \Rightarrow f(x+x_0, y+y_0) - f(x_0,y_0)\in U \quad \forall f\in H,$$

ossia

$$(x+x_0, y+y_0)\in (x_0+\lambda V)\times(y_0+\lambda W) \Rightarrow f(x+x_0,y+y_0) - f(x_0,y_0)\in U \quad \forall f\in H.$$

Dunque H è equicontinuo in (x_0,y_0). #

Un'applicazione bilineare $f: X\times Y\to Z$ dicesi separatamente continua se per ogni $x\in X$ e ogni $y\in Y$ le applicazioni lineari parziali f_x e f_y sono continue; un insieme H di applicazioni bilineari di $X\times Y$ in Z dicesi separatamente equicontinuo se per ogni $x\in X$ e ogni $y\in Y$ gli insiemi $\{f_x : f\in H\}$ e $\{f_y : f\in H\}$ sono equicontinui.

E' evidente che una applicazione bilineare continua è separatamente continua e che un insieme equicontinuo di applicazioni bilineari è separatamente equicontinuo.

TEOREMA 5.1. Siano X, Y spazi vettoriali topologici metrizzabili e Z uno spazio localmente convesso. Se X è barilato ogni insieme separatamente equicontinuo di applicazioni bilineari di $X\times Y$ in Z è equicontinuo e quindi ogni applicazione bilineare separatamente continua di $X\times Y$ in Z è continua.

Dimostrazione. Sia H un insieme separatamente equicontinuo di applicazioni bilineari di $X\times Y$ in Z. Proviamo che, se X è barilato, H è equicontinuo in $(0,0)$ e quindi (per la Prop. 5.1) in ogni punto di $X\times Y$. Siano $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base decrescente di intorni di 0 in X e $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base decrescente di intorni di 0 in Y (si ricordi che X e Y sono metrizzabili); allora $(V_n\times W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una base di intorni di $(0,0)$ in $X\times Y$.

Supponiamo che H non sia equicontinuo in $(0,0)$. Allora esiste un intorno U di 0 in Z tale che per ogni $n\in\mathbb{N}$ esistono $f_n\in H$ e $(x_n, y_n)\in V_n\times W_n$ con $f_n(x_n,y_n)\notin U$.

Poichè H è separatamente equicontinuo, per ogni $x\in X$ l'insieme $M_x=\{f_x : f\in H\}$ è un sottoinsieme equicontinuo di $\mathcal{L}(Y,Z)$ e quindi è limitato in $\mathcal{L}(Y,Z)$ per la topologia della convergenza limitata (v. Prop. 3.1). Ne segue facilmente (osservando che $\{y_n : n\in\mathbb{N}\}$ è un sottoinsieme limitato di Y) che l'insieme $\{f_x(y_n) : n\in\mathbb{N}, f\in H\} = M_x(\{y_n : n\in\mathbb{N}\})$ è limitat in Z. In particolare è limitato in Z, per ogni $x\in X$, l'insieme $\{f_n(x,y_n) : n\in\mathbb{N}\}$ e ciò significa che è puntualmente limitato in $\mathcal{L}(X,Z)$ l'insieme delle funzioni $x\mapsto f_n(x,y_n)$, $n\in$
Se X è barilato, tale insieme di funzioni è equicontinuo (per la Prop. 3.3) e quindi esiste un intorno V di 0 in X tale che $f_n(x,y_n)\in U$ $\forall x\in V$ e $\forall n\in\mathbb{N}$; ciò contraddice l'assunzione $f_n(x_n,y_n)\notin U$ dato che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0 per costruzione. #

PROPOSIZIONE 5.2. Siano $(X,\|\cdot\|_X)$, $(Y,\|\cdot\|_Y)$, $(Z,\|\cdot\|_Z)$ spazi normati. Un'applicazione bilineare $f: X\times Y\to Z$ è continua se e solo se esiste un numero $c>0$ tale che

$$(5.3)\qquad \|f(x,y)\|_Z \le c\,\|x\|_X\,\|y\|_Y \qquad \forall (x,y)\in X\times Y.$$

Dimostrazione. Se vale (5.3) f è, evidentemente continua in $(0,0)$ e quindi (per la Prop. 5.1) in ogni $(x,y)\in X\times Y$. Viceversa, se f è continua in $(0,0)$, esiste $r>0$ tale che (v. Prop. 4.6 del §4)

$$(5.4)\qquad \max(\|x\|_X, \|y\|_Y)\le r \implies \|f(x,y)\|_Z\le 1,$$

che implica (5.3) con $c=1/r^2$; per convincersene si osservi che, se $x=0$ oppure $y=0$, si ha $f(x,y)=$ e che, se $x\neq 0$ e $y\neq 0$, risulta $\left\|r\frac{x}{\|x\|_X}\right\|_X=\left\|r\frac{y}{\|y\|_Y}\right\|_Y=r$ e quindi, per (5.4), si ha $\left\|f\left(r\frac{x}{\|x\|}, r\frac{y}{\|y\|_Y}\right)\right\|_Z\le 1$, donde (5.3) con $c=1/r^2$. #