§6. LA DUALITÀ NEGLI SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI

1. SISTEMI DUALI. TOPOLOGIE DEBOLI.

Se X, Y sono spazi vettoriali e $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ è una forma bilineare (*) su $X \times Y$ tale che

(6.1) $\langle x,y\rangle = 0 \quad \forall y \in Y \Rightarrow x = 0$

(6.2) $\langle x,y\rangle = 0 \quad \forall x \in X \Rightarrow y = 0$,

si dice che la forma $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ mette in dualità X e Y.

La terna $(X, Y, (x,y) \mapsto \langle x,y\rangle)$ dicesi un sistema duale o dualità.

La locuzione «dualità tra X e Y» viene usata per indicare la sola forma bilineare $(x,y) \mapsto \langle x,y\rangle$ su $X \times Y$ verificante (6.1) e (6.2).

Più sinteticamente tale forma bilineare è indicata con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e il sistema duale con $\langle X, Y\rangle$.

ESEMPI FONDAMENTALI.

a. Siano X uno spazio vettoriale e X^* il suo duale algebrico (cioè lo spazio vettoriale delle forme lineari su X; v. §3, n. 1).

X e X^* sono messi in dualità dalla forma bilineare

(6.3) $\qquad X \times X^* \ni (x, x^*) \mapsto x^*(x) = \langle x, x^*\rangle$;

essa dicesi la dualità naturale tra X e X^*.

Che (6.3) metta in dualità X e X^* è facile da constatare. Essa verifica banalmente (6.2); per convincersi che essa verifica (6.1) cioè che $x^*(x) = 0 \quad \forall x^* \in X^* \Rightarrow x = 0$ basta osservare che, detta $(x_\iota)_{\iota \in I}$ una base di X le proiezioni $p_\iota : x \to \xi_\iota$, ove ξ_ι è la ι-ma coordinata di x rispetto a tale base, sono elementi di X^* e che $p_\iota(x) = 0 \quad \forall \iota \in I \Rightarrow x =$

b. Siano X uno spazio localmente convesso e X' il suo duale topologico, cioè lo spazio vettoriale delle forme lineare e continue su X (v. §4, n. 8).

X e X' sono messi in dualità dalla forma bilineare

(6.4) $\qquad X \times X' \ni (x, x') \mapsto x'(x) = \langle x, x'\rangle$

cioè dalla restrizione di (6.3) a $X \times X'$; diremo che essa è la dualità naturale tra X e X'.

(*) cioè un'applicazione di $X \times Y$ in $\mathbb{C}$ tale che, per ogni $x, x_1, x_2 \in X$, ogni $y, y_1, y_2 \in Y$ e ogni $\alpha_1, \alpha_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ si abbia
$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \alpha_1 \langle x_1, y\rangle + \alpha_2 \langle x_2, y\rangle \quad , \quad \langle x, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2\rangle = \mu_1 \langle x, y_1\rangle + \mu_2 \langle x, y_2\rangle .$$

La forma (6.4) verifica banalmente (6.2); essa verifica (6.1), cioè risulta $x'(x)=0\ \forall x'\in X' \Rightarrow x=0$ perchè (in base al Corollario 3 del Teorema 8.2 di Hahn-Banach) se $x_0\neq 0$ esiste $x'\in X'$ tale che $x'(x_0)\neq 0$.

Sia $\langle X,Y\rangle$ un sistema duale.
Per ogni $y\in Y$ l'applicazione

(6.5) $$\tilde{y}: x\mapsto \langle x,y\rangle$$

è un elemento di X^* e l'applicazione lineare $y\mapsto\tilde{y}$ è iniettiva in virtù di (6.2) e quindi è un isomorfismo di Y in X^*.
Analogamente, per ogni $x\in X$ l'applicazione

(6.6) $$\tilde{x}: y\mapsto\langle x,y\rangle$$

è un elemento di Y^* e l'applicazione lineare $x\mapsto\tilde{x}$ è iniettiva in virtù di (6.1) e quindi è un isomorfismo di X in Y^*.
Pertanto Y può essere identificato con un sottospazio di X^* e X può essere identificato con un sottospazio di Y^*.

DEFINIZIONE. Sia $\langle X,Y\rangle$ un sistema duale. Si chiama topologia debole su X (rispetto alla dualità $\langle X,Y\rangle$) la topologia debole su X rispetto alla famiglia $(\tilde{y})_{y\in Y}$ degli elementi $\tilde{y}$ di X^* definiti in (6.5), cioè [v. § 1, n. 4] la più piccola topologia su X per cui sono continue tutte le forme lineari $\tilde{y}$, $(y\in Y)$; essa viene generalmente indicata con la notazione $\sigma(X,Y)$.
In maniera simmetrica si definisce la topologia debole su Y (rispetto alla dualità $\langle X,Y\rangle$); essa è la topologia debole su Y rispetto alla famiglia $(\tilde{x})_{x\in X}$ degli elementi $\tilde{x}$ di Y^* definiti in (6.6), cioè la più piccola topologia su Y per cui tutte le forme lineari $\tilde{x}$, $(x\in X)$, sono continue e viene indicata con la notazione $\sigma(Y,X)$
In base alla Prop. 1.5 del § 5, le topologie $\sigma(X,Y)$ e $\sigma(Y,X)$ sono localmente convesse: $\sigma(X,Y)$ è definita dalla famiglia delle seminorme $x\mapsto|\langle x,y\rangle|$, $y\in Y$ e $\sigma(Y,X)$ è definita dalla famiglia delle seminorme $y\mapsto|\langle x,y\rangle|$, $x\in E$.
Inoltre $\sigma(X,Y)$ e $\sigma(Y,X)$ sono topologie di Hausdorff a causa rispettivamente di (6.1) e di (6.2): per convincersene basta ricordare (v. Prop. 5.2 del § 4) che la topologia definita su uno spazio vettoriale X da una famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme è di Hausdorff se e solo se $X\ni x\neq 0 \Rightarrow p(x)\neq 0$ per qualche $p\in\mathcal{P}$.
Dunque $(X,\sigma(X,Y))$ e $(Y,\sigma(Y,X))$ sono spazi localmente convessi (v. § 4, n. 5).

OSSERVAZIONE. Siano X uno spazio localmente convesso e X' il duale (topologico) di X. La topologia debole $\sigma(X',X)$ su X' rispetto alla dualità naturale tra X e X' sarà chiamata semplicemente <u>la topologia debole su X'</u>; si noti che $\sigma(X',X)$ altro non è che la topologia debole su X' definita al n.1 del §5, cioè la topologia della convergenza puntuale. Analogamente, la topologia debole $\sigma(X,X')$ su X rispetto alla dualità naturale tra X e X' sarà chiamata semplicemente la <u>topologia debole su</u> X. Porremo

$$X_s = (X, \sigma(X,X')) \quad e \quad X'_s = (X', \sigma(X',X))$$

e (come al al n.1 del §5) diremo che X'_s è il <u>duale debole di</u> X.

La topologia debole $\sigma(X,X')$ su X è meno fine di quella già assegnata su X (che diremo topologia iniziale). An (come segue dalla definizione) $\sigma(X,X')$ è la più piccola topologia su X tale che il duale di X, quando X sia dotat di tale topologia, coincida con X' (cioè con il duale di X quando X sia dotato della topologia iniziale).

Per quanto s'è detto sopra, la topologia debole su X è (al pari di quella iniziale) localmente convessa e di Hausdorff: essa è definita dalla famiglia delle seminorme

$$x \longmapsto |\langle x, x'\rangle| \quad , \quad x' \in X' \quad , \text{ove } \langle x,x'\rangle = x'(x).$$

<u>TEOREMA 1.1. Sia $\langle X,Y\rangle$ un sistema duale. L'applicazione $Y \ni y \longmapsto \tilde{y}$, ove $\tilde{y} \in X^*$ è definito da (6.5), è un isomorfismo di Y su $(X, \sigma(X,Y))'$ e l'applicazione $X \ni x \longmapsto \tilde{x}$, ove $\tilde{x} \in Y^*$ è definito da (6.6), è un isomorfismo di Y su $(Y, \sigma(Y,X))'$.</u>

<u>Pertanto Y può identificarsi con il duale di $(X, \sigma(X,Y))$ e X può identificarsi con il duale di $(Y, \sigma(Y,X))$.</u>

Dimostrazione. Proviamo che $Y \ni y \longmapsto \tilde{y}$ è un isomorfismo di Y sul duale di $(X, \sigma(X,Y))$; in maniera analoga si proverà che $E \ni x \longmapsto \tilde{x}$ è un isomorfismo di E sul duale di $(Y, \sigma(Y,X))$.

Abbiamo già osservato che $y \longmapsto \tilde{y}$ è un isomorfismo di Y in X^*; pertanto ci resta da dimostrare che $\{\tilde{y} : y \in Y\}$ coincide con il duale di $(X, \sigma(X,Y))$, cioè che per ogni forma lineare e continua φ su $(X, \sigma(X,Y))$ esiste $y \in Y$ tale che $\varphi(x) = \langle x, y\rangle \quad \forall x \in X$.

Ricordando che la topologia $\sigma(X,Y)$ su X è definita dalla famiglia $(p_y)_{y\in F}$ delle seminorme p_y, ove $p_y(x) = |\langle x,y\rangle|$, dalla continuità di φ segue (v. Prop. 5.6 del §4) l'esistenza di una parte finita $\{y_1, \dots, y_n\}$ di Y e di un numero $c>0$ tali che

$$|\varphi(x)| \le c \sup_{i=1,\dots,n} |\langle x, y_i\rangle| \qquad \forall x \in X,$$

ossia, posto $\varphi_i(x) = \langle x, y_i\rangle$,

$$|\varphi(x)| \le c \sup_{i=1,\dots,n} |\varphi_i(x)| \qquad \forall x \in X,$$

donde

$$(6.7) \qquad \operatorname{Ker} \varphi \supseteq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} \varphi_i .$$

Per concludere basterà provare che (6.7) implica che φ è combinazione lineare di $\varphi_1, .., \varphi_n$ perchè, se $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i$ con $\alpha_i \in \mathbb{C}$, si ha, per ogni $x \in X$, $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle x, y_i \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i y_i \rangle$, donde, posto $y = \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i y_i$, $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$.

Proviamo dunque che (6.7) implica che φ è combinazione lineare di $\varphi_1, .., \varphi_n$.

A tale scopo, evidentemente, non è restrittivo supporre che $\varphi_1, .., \varphi_n$ siano linearmente indipendenti; allora esistono $x_1, .., x_n \in E$ tali che (*)

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} \quad , \quad \text{ove} \quad \delta_{ij} \begin{cases} = 0 & \text{se } i \neq j \\ = 1 & \text{se } i = j \end{cases} .$$

Allora, chiaramente,

$$\{ x - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) x_j \ : \ x \in X \} \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} \varphi_i ,$$

donde, per (6.7),

$$\{ x - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) x_j \ : \ x \in X \} \subseteq \operatorname{Ker} \varphi \ ;$$

pertanto, per ogni $x \in X$, si ha

$$0 = \varphi(x - \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x) x_j) = \varphi(x) - \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j) \varphi_j(x) = (\varphi - \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j) \varphi_j)(x) ,$$

donde

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j) \varphi_j .$$

#

(*) Proviamo, infatti, che se X è uno spazio vettoriale e $\varphi_1, .., \varphi_n \in X^*$, allora l'applicazione lineare $\Phi = (\varphi_1, .., \varphi_n) : X \to \mathbb{C}^n$ è suriettiva se e solo se $\varphi_1, .., \varphi_n$ sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Se Φ non è suriettiva esiste una forma lineare non nulla Ψ su $\mathbb{C}^n$ tale che $\Psi \circ \Phi = 0$, poichè Ψ è del tipo $\Psi(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$, $(y \in \mathbb{C}^n)$, con $\alpha_i \in \mathbb{C}$, si ha $(\Psi \circ \Phi)(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x) = 0 \quad \forall x \in X$ cioè $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0$.

Viceversa, se Φ è suriettiva, ogni forma lineare Ψ su $\mathbb{C}^n$ tale che $\Psi \circ \Phi = 0$ è nulla; poichè Ψ è del tipo $\Psi(y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$ con $\alpha_i \in \mathbb{C}$, si ha l'implicazione $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. #

2. POLARITÀ.

Sia $\langle X, Y\rangle$ un sistema duale.

Il polare di un sottoinsieme A di X è il sottoinsieme A° di Y così definito:

$$A^\circ = \{y \in Y : \sup_{x \in A} |\langle x, y\rangle| \leq 1\}.$$

PROPOSIZIONE 2.1. A° è convesso, equilibrato e debolmente chiuso (cioè chiuso per la topologia $\sigma(Y, X)$

Dimostrazione. Che A° sia un sottoinsieme convesso ed equilibrato di Y è di immediata constatazione. A° è chiuso in $(Y, \sigma(Y,X))$ perchè $A^\circ = \bigcap_{x \in A} \{y \in Y : |\langle x, y\rangle| \leq 1\}$ e, per ogni $x \in A$, l'insieme $\{y \in Y : |\langle x, y\rangle| \leq 1\}$ è evidentemente chiuso in $(Y, \sigma(Y,X))$. #

E' chiaro che, se A è un sottospazio vettoriale di X, allora $A^\circ = \{y \in Y : \langle x, y\rangle = 0 \quad \forall x \in A\}$ e quindi A° è un sottospazio vettoriale di Y, detto anche l'ortogonale di A in Y.

In maniera simmetrica si definisce il polare B° di un sottoinsieme B di Y:

$$B^\circ = \{x \in X : \sup_{y \in B} |\langle x, y\rangle| \leq 1\}.$$

Se A è un sottoinsieme di X il polare di A° dicesi il bipolare di A e si indica con $A^{\circ\circ}$; allora

$$A^{\circ\circ} = \{x \in X : \sup_{y \in A^\circ} |\langle x, y\rangle| \leq 1\}.$$

TEOREMA 2.1. $A^{\circ\circ}$ è l'inviluppo convesso equilibrato e debolmente chiuso di A.

Dimostrazione. Detto A_1 l'inviluppo convesso equilibrato e debolmente chiuso di A, proviamo che $A^{\circ\circ} = A_1$.
Dalla Proposizione 2.1 e dal fatto che (ovviamente) $A^{\circ\circ} \supseteq A$ segue che $A^{\circ\circ} \supseteq A_1$.
Dimostriamo che $A^{\circ\circ} \subseteq A_1$, cioè che $a \notin A_1 \Rightarrow a \notin A^{\circ\circ}$.
Sia $a \notin A_1$. A_1 e $\{a\}$ sono due convessi disgiunti, il primo chiuso e il secondo compatto, dello spazio localmente convesso $(X, \sigma(X,Y))$ e quindi (per il Teorema 8.4 del §4) esiste un iperpiano reale chiuso che li separa strettamente, cioè esiste una forma $\mathbb{R}$-lineare f_0 su X, continua per la topologia $\sigma(X,Y)$, tale che (*)

$$(6.8) \qquad f_0(a) > 1, \qquad f_0(x) < 1 \quad \forall x \in A_1.$$

(*) Si tenga presente che $0 \in A_1$.

Per quanto s'è osservato nel n. 8 del §4, a f_0 è associato un unico elemento $f \in (X, \sigma(X,Y))'$ del quale f_0 è la parte reale; f è definito da $f(x) = f_0(x) - i f_0(ix)$.
In base al Teorema 1.1 esiste (unico) $y \in Y$ tale che $f(x) = \langle x, y\rangle$ $\forall x \in X$ e quindi tale che $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = f_0(x)$ $\forall x \in X$, (ove $\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$ è la parte reale di $\langle x,y\rangle$).
Allora da (6.8) si trae

$$\mathrm{Re}\langle a, y\rangle \geq 1 \;, \quad \mathrm{Re}\langle x, y\rangle < 1 \quad \forall x \in A_1 .$$

$\mathrm{Re}\langle a, y\rangle > 1$ implica

(6.9) $$|\langle a, y\rangle| > 1$$

e $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle < 1$ $\forall x \in A_1$ implica (per la equilibratezza di A_1) (*)

(6.10) $$|\langle x, y\rangle| < 1 \quad \forall x \in A_1 .$$

Da (6.10) segue $y \in A_1^\circ$, da cui $y \in A^\circ$ (perché $A_1^\circ \subseteq A^\circ$).
Allora $a \notin A^{\circ\circ}$, perché se $a \in A^{\circ\circ}$ si avrebbe $|\langle a, y\rangle| \leq 1$, che contraddice (6.9). #

Se X è uno spazio localmente convesso, parlando del polare A° di un sottoinsieme A di X ci si riferisce tacitamente alla dualità naturale tra X e X'; cioè si pone

(6.11) $$A^\circ = \{x' \in X' : \sup_{x \in A} |\langle x, x'\rangle| \leq 1\} \;, \quad \text{ove} \quad \langle x, x'\rangle = x'(x);$$

per simmetria, se B è un sottoinsieme di E', il polare B° di B è definito da

(6.12) $$B^\circ = \{x \in X : \sup_{x' \in B} |\langle x, x'\rangle| \leq 1\} \;, \quad \text{ove} \quad \langle x, x'\rangle = x'(x).$$

PROPOSIZIONE 2.2. Se X è uno spazio vettoriale topologico e $\mathfrak{S}$ è una famiglia filtrante di parti limitate di X con la proprietà:

(6.13) per ogni $A \in \mathfrak{S}$ e ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ esiste $B \in \mathfrak{S}$ tale che $\lambda A \subseteq B$,

allora una base di intorni dell'origine in X' per la $\mathfrak{S}$-topologia è l'insieme $\{\mathring{A} : A \in \mathfrak{S}\}$ ove $\mathring{A}$ è definito da (6.11).

Dimostrazione. Poiché la $\mathfrak{S}$-topologia su X' è definita dalla famiglia $\{p_A : A \in \mathfrak{S}\}$ delle seminorme p_A, ove $p_A(x') = \sup_{x \in A} |\langle x, x'\rangle|$, [v. Prop. 1.5 del §5] se $\mathfrak{S}$ è filtrante una base di intorni dell'origine in X' per la $\mathfrak{S}$-topologia è [v. §4, n.5] l'insieme delle sfere

$$\{x' \in X' : \sup_{x \in A} |\langle x, x'\rangle| \leq \varepsilon\} \;, \quad A \in \mathfrak{S} \text{ e } \varepsilon \text{ reale} > 0 .$$

(*) Infatti, essendo A_1 equilibrato, da $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| \leq 1$, $x \in A_1$ segue $\lambda x \in A_1$; di conseguenza, scritto il numero complesso $\langle x, y\rangle$ nella forma $|\langle x,y\rangle| e^{i\vartheta}$, da $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle < 1$ $\forall x \in A_1$ segue $\mathrm{Re}\langle e^{-i\vartheta} x, y\rangle < 1$ $\forall x \in A_1$ (perché $|e^{-i\vartheta}| = 1$), donde $|\langle x, y\rangle| < 1$ $\forall x \in A_1$, dato che $\mathrm{Re}\langle e^{-i\vartheta} x, y\rangle = \mathrm{Re}\, e^{-i\vartheta}\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}(e^{-i\vartheta} e^{i\vartheta} |\langle x, y\rangle|) = |\langle x, y\rangle|$.

Tenendo presente (6.13) è allora, immediato riconoscere che una base di intorni dell'origine in X' per la $\mathfrak{S}$-topologia è anche l'insieme delle sfere unitarie
$$A^\circ = \{x' \in X' : \sup_{x \in A} |\langle x, x'\rangle| \le 1\} \quad , \quad A \in \mathfrak{S} .$$ #

PROPOSIZIONE 2.3. Sia X uno spazio vettoriale topologico. Un sottoinsieme A di X' è equicontinuo se e solo se A° (definito in (6.11)) è un intorno dell'origine in X.

Dimostrazione. A è equicontinuo se e solo se (v. § 5, n. 3) $A^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\})$ è un intorno dell'origine in X. D'altra parte
$$A^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}) = \bigcap_{x' \in A} (x')^{-1}(\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}) = \bigcap_{x' \in A} \{x \in X : |\langle x, x'\rangle| \le 1\} = A^\circ .$$ #

OSSERVAZIONE. In base al Teorema 1.1, ogni spazio localmente convesso X può identificarsi algebricamente (cioè in quanto spazio vettoriale) con il duale del suo duale debole X'_s: infatti, indicando al solito con $\langle X, X'\rangle$ la dualità naturale tra X e X', il Teorema 1.1 afferma che l'applicazione $E \ni x \mapsto \tilde{x} \in (X'_s)'$, ove $\tilde{x} : x' \mapsto \langle x, x'\rangle$ $\forall x' \in X'$, è un isomorfismo algebrico di X su $(X'_s)'$.

Se X è uno spazio localmente convesso e $\mathfrak{S}$ è un insieme di parti limitate del suo duale debole X'_s, si parla della $\mathfrak{S}$-topologia su X (o della topologia della convergenza uniforme sugli elementi di $\mathfrak{S}$) riguardando X come duale di X'_s: per la Prop. 1.5, tale topologia è localmente convessa e di Hausdorff ed è definita dalla famiglia $\{p_B : B \in \mathfrak{S}\}$ delle seminorme p_B, ove
$$p_B(x) = \sup_{x' \in B} |\langle x, x'\rangle| \quad .$$

PROPOSIZIONE 2.4. La topologia di uno spazio localmente convesso X coincide con la topologia della convergenza uniforme sulle parti equicontinue di X'.

Dimostrazione. Le parti equicontinue di X' sono fortemente limitate (vedi Prop. 3.1) e quindi sono limitate in X'_s. Di conseguenza la topologia della convergenza uniforme sulle parti equicontinue di X' è una topologia vettoriale, anzi localmente convessa e di Hausdorff, su X (v. Prop. 1.5 del §5). Una base di intorni dell'origine di X per tale topologia è (in virtù della Prop. 2.2) l'insieme dei polari delle parti equicontinue di X' e quindi (per la Prop. 2.3) tale topologia è contenuta in quella di X. D'altra parte ogni intorno U di 0 in X contiene un intorno V di 0 convesso, equilibrato e chiuso; poiché (per il Teorema 2.1) $V = (V^\circ)^\circ$, e (per la Prop. 2.3) V° è equicontinuo, V, e quindi U, è un intorno di 0 anche per la topologia della convergenza uniforme sulle parti equicontinue di X'. #

3. TOPOLOGIE COMPATIBILI CON LA DUALITÀ. LA TOPOLOGIA DI MACKEY.

Sia $\langle X,Y\rangle$ un sistema duale.

DEFINIZIONE. Una topologia localmente convessa $\mathcal{T}$ su X dicesi compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$ se il duale di $(X,\mathcal{T})$ coincide con il sottospazio vettoriale $\tilde{Y}=\{\tilde{y}\in X^*: y\in Y\}$ di X^*, ove $\tilde{y}(x)=\langle x,y\rangle \ \forall x\in X$.

Sappiamo (v. n.1) che $\tilde{Y}$ è isomorfo a Y; identificando $\tilde{Y}$ con Y possiamo dire che $\mathcal{T}$ è compatib. con la dualità $\langle X,Y\rangle$ se il duale di $(X,\mathcal{T})$ coincide con Y.

In base al Teorema 1.1, la topologia debole $\sigma(X,Y)$ su X (rispetto alla dualità $\langle X,Y\rangle$) è compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$; essa è la più piccola topologia localmente convessa su X compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$ (come segue dalla sua definizione).

Si osservi che ogni topologia localmente convessa $\mathcal{T}$ su X compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$ è di Hausdorff, in quanto è più fine di $\sigma(X,Y)$ che è di Hausdorff.

Abbiamo appena osservato che l'insieme delle topologie localmente convesse su X compatibili con la dualità $\langle X,Y\rangle$ ha un minimo elemento: il minimo è la topologia debole $\sigma(X,Y)$.

Dal Teorema 3.1 seguente, discende che l'insieme delle topologie localmente convesse su X compatibili con la dualità $\langle X,Y\rangle$ ha un massimo elemento: il massimo è la topologia della convergenza uniforme su ogni parte convessa, equilibrata e compatta di $(Y,\sigma(Y,X))$: essa dicesi la topologia di Mackey su E (rispetto alla dualità $\langle X,Y\rangle$) e viene indicata con $\tau(X,Y)$.

Se X è uno spazio localmente convesso, la topologia di Mackey $\tau(X,X')$ su X rispetto alla dualità naturale tra X ed X' sarà chiamata semplicemente la topologia di Mackey di X.

TEOREMA 3.1 (di Mackey). Sia $\langle X,Y\rangle$ un sistema duale. Una topologia localmente convessa $\mathcal{T}$ su X è compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$ se e solo se $\mathcal{T}$ è la topologia della convergenza uniforme su ogni elemento di un insieme $\mathfrak{S}$ di parti convesse, equilibrate e compatte di $(Y,\sigma(Y,X))$ che ricopre Y.

Dimostrazione. Necessità. Sia $\mathcal{T}$ una topologia localmente convessa (e di Hausdorff) su X compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$ e sia $\mathcal{B}$ l'insieme degli intorni dell'origine di $(X,\mathcal{T})$ convessi, equilibrati e chiusi. $\mathcal{B}$ è una base di intorni dell'origine di $(X,\mathcal{T})$ [v. Prop. 1.2 del § 4]. Si osservi che ogni $V\in\mathcal{B}$, in quanto convesso e chiuso per la topologia $\mathcal{T}$, è chiuso anche per la topologia $\sigma(X,Y)$ su X (v. Prop. 3.2) e quindi $V=V^{\circ\circ\circ}$ (v. Teorema 2.1). Poniamo

$$\mathfrak{S}=\{V^\circ : V\in\mathcal{B}\}.$$

Ogni elemento V° di $\mathfrak{S}$ è convesso, equilibrato e chiuso in $(Y, \sigma(Y,X))$, per la Prop. 2.1; inoltre V° è equicontinuo (come segue dalla Prop. 2.3, dopo avere osservato che, avendosi $V^{\circ\circ}=V$, $V^{\circ\circ}$ è un intorno dell'origine in X per la topologia $\mathcal{T}$) e quindi è compatto in $(Y, \sigma(Y,X))$, per la Prop. 3.4 del §5.
$\mathfrak{S}$ ricopre Y: infatti, se $y \in Y$ e $V_y = \{x \in X : |\langle x, y\rangle| \leq 1\}$, risulta $y \in V_y^\circ$ e V_y è un intorno dell'origine in X per la topologia $\mathcal{T}$, perchè (essendo $\mathcal{T}$ compatibile con la dualità $\langle X, Y\rangle$) la forma lineare $\tilde{y} : x \mapsto \langle x, y\rangle$ su X è continua per la topologia $\mathcal{T}$.

Si osservi che $\mathfrak{S}$ è filtrante, perchè (come si verifica immediatamente) $V_1^\circ \cup V_2^\circ \subseteq (V_1 \cap V_2)^\circ$. Inoltre per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ e ogni $V^\circ \in \mathfrak{S}$ esiste $W^\circ \in \mathfrak{S}$ tale che $\alpha V^\circ \subseteq W^\circ$; infatti ciò è ovvio se $\alpha = 0$, mentre se $\alpha \neq 0$ basta prendere $W = \frac{1}{\alpha} V$, perchè (ricordando che V° è equilibrato) si ha immediatamente $\alpha V^\circ \subseteq |\alpha| V^\circ = (\frac{1}{\alpha} V)^\circ$.

Pertanto, in virtù della Prop. 2.2, una base di intorni dell'origine di X per la topologia della convergenza uniforme su ogni elemento di $\mathfrak{S}$ è $\{V^{\circ\circ} : V \text{ intorno dell'origine di } X \text{ per la topologia } \mathcal{T}\}$ e quindi tale topologia coincide con $\mathcal{T}$, perchè $V = V^{\circ\circ}$.

<u>Sufficienza</u>. Sia $\mathfrak{S}$ una famiglia di parti convesse, equilibrate e compatte di $(Y, \sigma(Y,X))$ che ricopre Y. Indichiamo con $X_{\mathfrak{S}}$ lo spazio vettoriale X dotato della topologia (vettoriale, localmente convessa e di Hausdorff) della convergenza uniforme su ogni elemento di $\mathfrak{S}$. Proviamo che tale topologia è compatibile con la dualità $\langle X, Y\rangle$, cioè che $(X_{\mathfrak{S}})' = \{\tilde{y} : y \in Y\}$, ove, al solito, $\tilde{y} : x \mapsto \langle x, y\rangle$. Osserviamo che (come si può facilmente constatare) si può supporre senza mutare la $\mathfrak{S}$-topologia, che le immagini omotetiche degli elementi di $\mathfrak{S}$ siano elementi di $\mathfrak{S}$, al pari degli inviluppi convessi equilibrati di ogni unione finita di elementi di $\mathfrak{S}$ (si noti che, per la Proposizione 1.13 del §4, tali inviluppi sono compatti per la topologia $\sigma(Y,X)$). Si ha $(X_{\mathfrak{S}})' \supseteq \{\tilde{y} : y \in Y\}$; per convincersene basta pensare che $\{\tilde{y} : y \in Y\} = (X, \sigma(X,Y))'$ e che la $\mathfrak{S}$-topologia su X è più fine della topologia $\sigma(X,Y)$ perchè ogni parte finita di Y è contenuta in qualche elemento di $\mathfrak{S}$. Proviamo che $(X_{\mathfrak{S}})' \subseteq \{\tilde{y} : y \in Y\}$. Sia $x^* \in (X_{\mathfrak{S}})'$. L'insieme $\{x \in X : |x^*(x)| \leq 1\}$ è un intorno dell'origine in X per la $\mathfrak{S}$-topologia e quindi (per la Proposizione 2.2) esistono $A \in \mathfrak{S}$ e $\varepsilon > 0$ tali che $\{x \in X : |x^*(x)| \leq 1\} \supseteq \{x \in X : \sup_{y \in A} |\langle x, y\rangle| \leq \varepsilon\}$, cioè tali che $\{x \in X : |x^*(x)| \leq 1\} \supseteq \frac{1}{\varepsilon} A^\circ$; di conseguenza $x^* \in \{\tilde{y} : y \in (\frac{1}{\varepsilon} A^\circ)^\circ\}$, donde $x^* \in \{\tilde{y} : y \in \varepsilon A\}$ perchè $(\frac{1}{\varepsilon} A^\circ)^\circ = \varepsilon A^{\circ\circ}$ e $A^{\circ\circ} = A$ (per il Teorema 2.1) essendo A convesso e chiuso per la topologia $\sigma(Y,X)$; dunque $x^* \in \{\tilde{y} : y \in Y\}$. #

Diremo che uno spazio localmente convesso X è uno <u>Spazio di Mackey</u> se la sua topologia coincide con la topologia di Mackey $\tau(X, X')$ di X.

PROPOSIZIONE 3.1. Sia X uno spazio vettoriale e siano Y_1, Y_2 sottospazi vettoriali di X^* tali che la dualità naturale tra X e X^* induca una dualità tra X e Y_1 e tra X e Y_2. Allora

$$Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow \sigma(X,Y_1) \subseteq \sigma(X,Y_2), \quad \tau(X,Y_1) \subseteq \tau(X,Y_2).$$

Dimostrazione. L'implicazione $Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow \sigma(X,Y_1) \subseteq \sigma(X,Y_2)$ è del tutto ovvia.
Proviamo l'implicazione $Y_1 \subseteq Y_2 \Rightarrow \tau(X,Y_1) \subseteq \tau(X,Y_2)$. Si osservi che, se $Y_1 \subseteq Y_2$, la topologia debole $\sigma(Y_2,X)$ di Y_2 induce su Y_1 la topologia debole $\sigma(Y_1,X)$, in quanto le topologie $\sigma(Y_1,X)$ su Y_1 e $\sigma(Y_2,X)$ su Y_2 sono entrambe indotte dalla topologia debole $\sigma(X^*,X)$ di X^*; infatti $\sigma(X^*,X)$ è definita dalla famiglia delle seminorme $x^* \mapsto |\langle x, x^*\rangle|$, $x \in X$, e le topologie $\sigma(Y_1,X)$ e $\sigma(Y_2,X)$ sono definite dalla famiglia delle restrizioni, rispettivamente a Y_1 e a Y_2, di queste stesse seminorme.
Pertanto, se $Y_1 \subseteq Y_2$, ogni parte convessa, equilibrata e compatta di $(Y_1, \sigma(Y_1,X))$ è anche una parte convessa equilibrata e compatta di $(Y_2, \sigma(Y_2,X))$ e quindi (in base alla definizione di topologia di Mackey) $\tau(X,Y_1) \subseteq \tau(X,Y_2)$. #

PROPOSIZIONE 3.2. Sia $\langle X,Y\rangle$ un sistema duale. La chiusura di un sottoinsieme convesso A di X è la stessa per ogni topologia localmente convessa su X compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$.

Dimostrazione. La Prop. 3.2 è una conseguenza immediata del Corollario 2 del Teorema 8.4 del § 4.

I seguenti due lemmi serviranno a dimostrare il Teorema 3.2.

OSSERVAZIONE 3.1. Sia $\langle X,Y\rangle$ un sistema duale. Un sottoinsieme A di X è limitato per la topologia debole $\sigma(X,Y)$ se e solo se A° è assorbente.

Dimostrazione. A è limitato per la topologia $\sigma(X,Y)$ se e solo se per ogni $y \in Y$ esiste $\lambda > 0$ tale che $\sup_{x \in A} |\langle x,y\rangle| \le \lambda$, cioè se e solo se per ogni $y \in Y$ esiste $\lambda > 0$ tale che $\lambda y \in A^\circ$, cioè se e solo se A° è assorbente. #

LEMMA 3.1 In uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff un barile (cioè un sottoinsieme chiuso convesso, equilibrato e assorbente) assorbe ogni sottoinsieme convesso, equilibrato, limitato e completo (e quindi assorbe, in particolare, ogni sottoinsieme convesso, equilibrato e compatto).

Dimostrazione. Siano X uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff, B un barile di X e K un sottoinsieme di X convesso, equilibrato, limitato e completo. Proviamo che B assorbe K, cioè (v. § 3, n. 6) che esiste un numero positivo ϱ tale che $K \subseteq \varrho B$.

Ciò è banalmente vero se X è barilato, perchè in tale caso B è un intorno dell'origine e quindi assorbe ogni sottoinsieme limitato K di X; l'avere supposto K convesso, equilibrato e complet (oltre che limitato) ci consente, come vedremo, di ricondurci al caso di uno SVT barilato, anzi al caso di uno spazio di Banach.

Sia, infatti, X_K il sottospazio vettoriale di X generato da K. Si constata facilmente che K, essendo convesso ed equilibrato, è un sottoinsieme assorbente di X_K (non di X, in generale); pertanto ha senso considerare in X_K il funzionale di Minkowky p_K relativo a K (v. § 3, n. 6) definito (per ogni $x \in X_K$) da

(3.1) $$p_K(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0,\ x \in \lambda K\}.$$

Per la Prop. 6.1 del § 3, p_K è una seminorma su X_K: si osservi che una base di intorni dell'origine di X_K per la topologia definita da p_K è $\{\varepsilon K : \varepsilon \text{ reale} > 0\}$, perchè $K = \{x \in X_K : p_K(x) \leq 1\}$.

L'identità dello spazio seminormato (X_K, p_K) in X è continua e quindi (essendo X di Hausdorff) p_K è una norma su X_K: infatti (essendo K limitato in X) per ogni intorno V dell'origine in X esiste un numero positivo ϱ tale che $K \subseteq \varrho V$, cioè tale che $\frac{1}{\varrho} V \subseteq V \cap X_K$ e ciò significa che la topologia su X_K definita da p_K è più fine della topologia indotta su X_K da quella di X, cioè che l'identità di (X_K, p_K) in X è continua.

Proviamo che, essendo K completo, (X_K, p_K) è completo, cioè è uno spazio di Banach.

Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in (X_K, p_K); non è restrittivo supporre che $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abbia la proprietà seguente

(3.2) $$n \geq m \implies p_K(x_n - x_m) \leq 1/n,$$

perchè (come si riconosce facilmente procedendo per induzione) ogni successione di Cauchy in uno spazio normato ammette delle sottosuccessioni aventi la proprietà suddetta.

Poichè l'insieme $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato in (X_K, p_K), esso è contenuto in ϱK per qualche $\varrho > 0$, di conseguenza, essendo ϱK (al pari di K) un sottoinsieme completo di X la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge verso un limite $x \in \varrho K (\subseteq X_K)$ per la topologia indotta da quella di X.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge verso x anche per la topologia definita dalla norma p_K: infatti da (3.2) segue

$$m \geq n \implies x_n - x_m \in \frac{1}{n} K,$$

donde (passando al limite per $m \to \infty$ e ricordando che $\frac{1}{n} K$ è completo e quindi chiuso in X) si ha $x_n - x \in \frac{1}{n} K$. Dunque (X_K, p_K) è completo.

A questo punto è immediato provare che B assorbe K. Infatti, poichè B è un barile di X e l'identità di (X_K, p_K) in X è continua, $B \cap X_K$ è un barile dello spazio barilato (X_K, p_K) e quindi è un intorno dell'origine in (X_K, p_K); di conseguenza esiste $\varrho > 0$ tale che $\varrho K \subseteq B \cap X_K (\subseteq B)$. #

TEOREMA 3.2 (di Mackey). Sia $\langle X,Y\rangle$ un sistema duale. I sottoinsiemi limitati di E sono gli stessi per ogni topologia localmente convessa su E compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$.

Dimostrazione. Se un sottoinsieme di X è limitato per la topologia di Mackey $\tau(X,Y)$, esso è limitato per ogni altra topologia localmente convessa compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$, perché ogni tale topologia è più piccola di $\tau(X,Y)$.
Pertanto, per dimostrare il Teorema 3.2 basta provare che se un sottoinsieme di X è limitato per la topologia $\sigma(E,F)$ esso è limitato anche per la topologia $\tau(X,Y)$.
Sia A un sottoinsieme di X limitato per la topologia $\sigma(X,Y)$. Per l'Osservazione 3.1, A° è un barile di $(Y,\sigma(Y,X))$ e quindi, per il Lemma 3.1, A° assorbe ogni parte convessa, equilibrata e compatta K di $(Y,\sigma(Y,X))$, cioè per ogni tale K esiste un numero $\rho_K>0$ tale che $K\subseteq \rho_K A^\circ$, donde $K^\circ \supseteq (\rho_K A^\circ)^\circ = \frac{1}{\rho_K} A^{\circ\circ} \supseteq \frac{1}{\rho_K} A$. Dunque A è assorbito dal polare di ogni parte convessa, equilibrata e compatta di $(Y,\sigma(Y,X))$ e quindi A è limitato per la topologia $\tau(X,Y)$, perché (v. Prop. 2.2) l'insieme dei polari delle parti convesse, equilibrate e compatte di $(Y,\sigma(Y,X))$ è una base di intorni dell'origine di X per la topologia $\tau(X,Y)$. #

PROPOSIZIONE 3.3. Ogni spazio localmente convesso che sia barilato, oppure metrizzabile, è uno spazio di Mackey.

Dimostrazione. Sia X uno spazio localmente convesso e sia $\mathcal{T}$ la sua topologia.
Poiché (ovviamente) $\mathcal{T}$ è compatibile con la dualità naturale tra X ed E', si ha $\mathcal{T}\subseteq\tau(X,X')$.
Mostriamo che, se X è barilato oppure metrizzabile, risulta $\tau(X,X')\subseteq\mathcal{T}$.
Sia X barilato. Allora una parte di X' è equicontinua se e solo se è debolmente limitata (v. Teorema 3.2 del §5) e quindi, ricordando che $\mathcal{T}$ coincide con la topologia della convergenza uniforme su ogni parte equicontinua di X' (v. Prop. 2.4) e che $\tau(X,X')$ è la topologia della convergenza uniforme su ogni parte convessa, equilibrata e debolmente compatta di X', si deduce che $\tau(X,X')\subseteq\mathcal{T}$.
Sia X metrizzabile; allora esiste una base numerabile decrescente $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di intorni equilibrati dell'origine in X (v. Teorema 2.2 del §4). Sia V un intorno dell'origine in $(X,\tau(X,X'))$; proviamo che V è un intorno dell'origine in X (per la topologia $\mathcal{T}$). Se così non fosse, per ogni $n\in\mathbb{N}$ esisterebbe $x_n\in\frac{1}{n}V_n$ tale che $x_n\notin V$; ciò non è possibile perché da $x_n\in\frac{1}{n}V_n$ segue la convergenza a zero, e quindi la limitatezza, della successione $(nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per la topologia $\mathcal{T}$; donde la limitatezza della successione $(nx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per la topologia $\tau(X,X')$ (v. Teorema 3.2), donde infine l'esistenza di un numero $d>0$ tale che $nx_n\in dV$ $\forall n\in\mathbb{N}$; ciò è in contraddizione con il fatto che $x_n\notin V$ $\forall n\in\mathbb{N}$. #

OSSERVAZIONE. Sia $\langle X,Y\rangle$ un sistema duale. Al n.3 è stata data la definizione di topologia localmente convessa su E compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$. Scambiando il ruolo di X con quello di Y in tale definizione, si ottiene la definizione di topologia localmente convessa su Y compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$. Precisamente:
una <u>topologia localmente convessa $\mathcal{T}$ su Y</u> dicesi <u>compatibile con la dualità</u> $\langle X,Y\rangle$ se $(Y,\mathcal{T})' = \{\tilde{x}\in Y^*: x\in X\}$, ove al solito $\tilde{x}$ è definito ponendo $\tilde{x}(y)=\langle x,y\rangle$ $\forall y\in Y$.
Previa identificazione di $\{\tilde{x}\in Y^*: x\in X\}$ con X si può dire che $\mathcal{T}$ è compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$ se il duale di $(Y,\mathcal{T})$ coincide con X.
In base al Teorema 1.1, la topologia debole $\sigma(Y,X)$ su Y (rispetto alla dualità $\langle X,Y\rangle$) è compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$; anzi $\sigma(Y,X)$ è la minima topologia localmente convessa su Y compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$.
Poichè $\sigma(Y,X)$ è di Hausdorff, ogni topologia localmente convessa su Y compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$ è di Hausdorff.
Scambiando il ruolo di X con quello di Y nel Teorema 3.1 si ottiene una caratterizzazione delle topologie localmente convesse su Y compatibili con la dualità $\langle X,Y\rangle$; in particolare segue che l'insieme delle topologie localmente convesse su Y compatibili con la dualità $\langle X,Y\rangle$ ha un massimo elemento e che il massimo elemento è la topologia della convergenza uniforme su ogni parte convessa, equilibrata e compatta di $(X,\sigma(X,Y))$: essa dicesi <u>la topologia di Mackey su</u> Y (rispetto alla dualità $\langle X,Y\rangle$) e viene indicata con $\tau(Y,X)$.
Ovviamente anche la Prop. 3.2 e il Teorema 3.2 possono enunciarsi scambiando il ruolo di X con quello di Y.

* * * *

Il teorema seguente caratterizza gli spazi barilati nell'ambito di quelli localmente convessi

TEOREMA 3.3. <u>Uno spazio localmente convesso X è barilato se e solo se ogni sottoinsieme debolmente limitato di X' è equicontinuo.</u>

Dimostrazione. Se X è barilato sappiamo (v. Prop. 3.3 del §5) che i sottoinsiemi debolmente limitati di X' sono equicontinui. Viceversa, supponiamo che ogni sottoinsieme debolmente limitato di X' sia equicontinuo e proviamo che, allora, X è barilato, cioè che ogni barile B di X è un intorno dell'origine in X.
B è convesso e chiuso in X e quindi è debolmente chiuso (per la Prop. 3.2); poichè B è anche equilibrato, esso coincide con l'inviluppo convesso equilibrato e debolmente chiuso di sè stesso, cioè con B^{oo}.
Essendo B assorbente, il suo polare B^o è debolmente limitato (per il Lemma 3.1) e quindi è un sottoinsieme equicontinuo di X' (per ipotesi); di conseguenza il polare di B^o - cioè B - è un intorno dell'origine in X (per la Prop. 2.3). #

4. TOPOLOGIE FORTI. SEMIRIFLESSIVITÀ E RIFLESSIVITÀ.

DEFINIZIONE. Sia $\langle X,Y\rangle$ un sistema duale. Si chiama topologia forte su X (rispetto alla dualità $\langle X,Y\rangle$ la topologia su X della convergenza uniforme su ogni parte limitata di $(Y,\sigma(Y,X))$ [riguardando X come il duale di $(Y,\sigma(Y,X))$] e si indica con la notazione $\beta(X,Y)$.
Per simmetria, si chiama topologia forte su Y (rispetto alla dualità $\langle X,Y\rangle$) la topologia su Y della convergenza uniforme su ogni parte limitata di $(X,\sigma(X,Y))$ e si indica con $\beta(Y,X)$.
In base alla Prop. 1.5 del §5, le topologie $\beta(X,Y)$ e $\beta(Y,X)$ sono localmente convesse e di Hausdorff; $\beta(X,Y)$ è definita dalla famiglia delle seminorme

$$x \mapsto \sup_{y\in B} |\langle x,y\rangle| \ , \qquad B \text{ limitato di } (Y,\sigma(Y,X))$$

e $\beta(Y,X)$ è definita dalla famiglia delle seminorme

$$y \mapsto \sup_{x\in A} |\langle x,y\rangle| \ , \qquad A \text{ limitato di } (X,\sigma(X,Y)).$$

Avendosi, evidentemente,

$$\tau(X,Y) \subseteq \beta(X,Y) \quad \text{e} \quad \tau(Y,X) \subseteq \beta(Y,X);$$

la topologia forte $\beta(X,Y)$ su X è compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$ se e solo se $\beta(X,Y)=\tau(X,Y)$ e la topologia forte $\beta(Y,X)$ su Y è compatibile con la dualità $\langle X,Y\rangle$ se e solo se $\beta(Y,X)=\tau(Y,X)$.
In generale le topologie $\beta(X,Y)$ su X e $\beta(Y,X)$ su Y non sono compatibili con la dualità $\langle X,Y\rangle$, perchè (in generale) in $(Y,\sigma(Y,X))$ e in $(X,\sigma(X,Y))$ i sottoinsiemi limitati non sono relativamente compatti.

OSSERVAZIONE. Se X è uno spazio localmente convesso le topologie forti $\beta(X,X')$ su X e $\beta(X',X)$ su X' rispetto alla dualità naturale tra X e X' saranno chiamate rispettivamente la topologia forte su X e la topologia forte su X'. Si noti che $\beta(X',X)$ altro non è che la topologia forte su X' definita al n.1 del §5, perchè (in base al Teorema 3.2) un sottoinsieme di X è limitato se e solo se è debolmente limitato. Porremo

$$X_b=(X,\beta(X,X')) \quad ; \quad X'_b=(X',\beta(X',X))$$

e (come al n.1 del §5) diremo che X'_b è il duale forte di X. Porremo anche

$$X''=(X'_b)' \ , \quad X''_b=(X'_b)'_b \ , \quad X''_s=(X'_b)'_s \ .$$

e diremo che X'' è il biduale di X, che X''_b è il biduale forte di X e che X''_s è il biduale debole di

PROPOSIZIONE 4.1. Sia X uno spazio localmente convesso. La topologia forte $\beta(X,X')$ su X è compatibile con la dualità se e solo se $(X,\tau(X,X'))$ è barilato. Per simmetria la topologia forte $\beta(X',X)$ su X' è compatibile con la dualità se e solo se $(X',\tau(X',X))$ è barilato.

Dimostrazione. Se $(X,\tau(X,X'))$ è barilato, i sottoinsiemi debolmente limitati di $E'=(E,\tau(E,E'))'$ sono equicontinui rispetto alla topologia $\tau(X,X')$ su X e viceversa (per il Teorema di Banach-Steinhaus); pertanto la topologia forte su X, cioè la topologia della convergenza uniforme su ogni parte debolmente limitata di X', coincide con la topologia della convergenza uniforme su ogni parte equicontinua di X' rispetto alla topologia $\tau(X,X')$ su X, cioè (v. Prop. 2.4) con la topologia $\tau(X,X')$ e quindi è compatibile con la dualità.
Viceversa, supponiamo che la topologia forte $\beta(X,X')$ su X sia compatibile con la dualità, cioè che $\beta(X,X')=\tau(X,X')$ e proviamo che $(X,\tau(X,X'))$ è barilato, cioè (v. Teorema 3.3) che ogni parte debolmente limitata di $X'=(X,\tau(X,X'))'$ è equicontinua rispetto alla topologia $\tau(X,X')$ su X. In effetti, se A è un sottoinsieme debolmente limitato di X', allora A° è un intorno dell'origine in $(X,\beta(X,X'))$ e quindi (v. Prop. 2.3) A è equicontinuo rispetto alla topologia $\beta(X,X')=\tau(X,X')$ su X. #

COROLLARIO. Sia X uno spazio localmente convesso. Se X è barilato allora la topologia forte $\beta(X,X')$ su X è compatibile con la dualità. Se la topologia forte $\beta(X',X)$ su X' è compatibile con la dualità allora X'_b è barilato.

Dimostrazione. Se X è barilato, allora (v. Prop. 3.3) la sua topologia coincide con $\tau(E,E')$ e quindi $(X,\tau(X,X'))$ è barilato; dalla Prop. 4.1 segue allora che $\beta(X,X')$ è compatibile con la dualità. Se $\beta(X',X)$ è compatibile con la dualità, allora $\beta(X',X)=\tau(X',X)$ e quindi X'_b è barilato per la Prop. 4.1. #

Uno spazio localmente convesso X dicesi semiriflessivo se la topologia forte $\beta(X',X)$ su X' è compatibile con la dualità naturale $\langle X,X'\rangle$, cioè se $(X'_b)'=(X'_s)'$. Si osservi che (evidentemente) la condizione $(X'_b)'=(X'_s)'$ equivale alla condizione $\beta(X',X)=\tau(X',X)$.
Sia X uno spazio localmente convesso. Ad ogni $x\in X$ associamo l'elemento $\tilde{x}$ di $(X'_s)'$ definito da $\tilde{x}(x')=\langle x,x'\rangle$ $(=x'(x))$ $\forall x'\in X'$. Poichè $(X'_s)'\subseteq X''$, $x\mapsto\tilde{x}$ è una applicazione (lineare) di X in X''; essa dicesi l'immersione canonica (o la mappa di valutazione) di X in X''.
Ricordando che (per il Teorema 1.1) la mappa $x\mapsto\tilde{x}$ è un isomorfismo algebrico di X su $(X'_s)'$, si può affermare che X è semiriflessivo se e solo se l'immersione canonica di X in X'' è suriettiva (e quindi è un isomorfismo algebrico di X su X'').
Dunque uno SLC semiriflessivo può identificarsi algebricamente con il suo biduale.

Si osservi che la semiriflessività di uno spazio localmente convesso X è una proprietà che dipende solo dalla dualità $\langle X, X' \rangle$ e quindi se è soddisfatta per una topologia localmente convessa su X compatibile con la dualità $\langle X, X' \rangle$ essa è soddisfatta per ogni altra topologia localmente convessa su X compatibile con la dualità $\langle X, X' \rangle$.

Uno spazio localmente convesso X dicesi riflessivo se è semiriflessivo e la sua topologia coincide con la topologia forte $\beta(X, X')$.

Evidentemente X è riflessivo se e solo se la mappa di valutazione $x \mapsto \hat{x}$ è un isomorfismo (per le strutture di spazio vettoriale topologico) di X sul suo biduale forte $X_b'' = (X_b')_b'$. Dunque uno SLC riflessivo può identificarsi (in quanto spazio vettoriale topologico) con il suo biduale forte.

TEOREMA 4.1. Uno spazio localmente convesso X è semiriflessivo se e solo se in X_s ogni sottoinsieme chiuso e limitato è compatto.

Dimostrazione. Sia X semiriflessivo. Allora (per il Corollario della Prop. 4.1) X_b' è barilato e quindi in $(X_b')_s'$ i sottoinsiemi chiusi e limitati sono compatti (v. Teorema 3.2 del §5); ne segue che anche in X_s i sottoinsiemi chiusi e limitati sono compatti, perché X_s è isomorfo (come SVT) a $(X_b')_s'$. Viceversa, se in X_s ogni sottoinsieme chiuso e limitato è compatto, allora la topologia $\tau(X', X)$ su X' (della convergenza uniforme su ogni convesso, equilibrato e compatto di X_s) coincide con la topologia della convergenza uniforme su ogni convesso, equilibrato, chiuso e limitato di X_s; d'altra parte quest'ultima topologia coincide con la topologia $\beta(X', X)$ (della convergenza uniforme su ogni limitato di X_s) perché (per il Teorema 2.1) il polare di un sottoinsieme A di X contiene il polare dell'inviluppo convesso, equilibrato e debolmente chiuso di A (*); dunque X è semiriflessivo. #

TEOREMA 4.2. Uno spazio localmente convesso semiriflessivo è riflessivo se e solo se è barilato.

Dimostrazione. Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio localmente convesso semiriflessivo. Se $(X, \mathcal{T})$ è riflessivo, allora $\mathcal{T} = \beta(X, X') = \tau(X, X')$ e quindi (per la Prop. 4.1) $(X, \tau(X, X'))$ è barilato, cioè $(X, \mathcal{T})$ è barilato. Viceversa, sia $(X, \mathcal{T})$ barilato. Allora $(X, \mathcal{T})$ è di Mackey (v. Prop. 3.3) e quindi $\mathcal{T} = \tau(X, X')$; d'altra parte (per il Corollario della Prop. 4.1) $\beta(X, X')$ è compatibile con la dualità, cioè $\beta(X, X') = \tau(X, X')$; dunque $\mathcal{T} = \beta(X, X')$ e quindi $(X, \mathcal{T})$ è riflessivo. #

COROLLARIO. Sia X uno spazio localmente convesso. Se X è riflessivo anche X_b' è riflessivo.

Dimostrazione. Se X è riflessivo, allora X_b' è barilato (per il Corollario della Prop. 4.1) ed è (evidentemente) semiriflessivo; dunque X_b' è riflessivo. #

(*) Si tenga presente che una base di intorni dell'origine in $(X', \beta(X', X))$ è l'insieme dei polari delle parti limitate di X_s.

5. SPAZI NORMATI RIFLESSIVI.

Il più semplice esempio di spazio normato riflessivo è $\mathbb{C}^n$, (n intero ≥ 1): si osservi che (in base al Teorema 3.1 del §4) la topologia usuale di $\mathbb{C}^n$ è l'unica topologia vettoriale di Hausdorff su $\mathbb{C}^n$ e quindi su $\mathbb{C}^n$ la topologia debole e quella forte coincidono con quella usuale. $\mathbb{C}^n$ è riflessivo perchè è barilato e in esso i sottoinsiemi chiusi e limitati sono compatti (si veda il Teorema 10.2 del §1 e si ricordi che $\mathbb{C}^n$, in quanto SVT, è identico a $\mathbb{R}^{2n}$).

Più in generale, ogni spazio vettoriale topologico di Hausdorff E di dimensione finita è uno spazio localmente convesso riflessivo, perchè isomorfo a $\mathbb{C}^n$ ove n è la dimensione di E.

Gli esempi più importanti di spazi normati riflessivi sono gli spazi di Hilbert (che studieremo nel §7), gli spazi L^p e gli spazi di Sobolev $W^{m,p}$ (che studieremo nel §3 della Parte II^a).

Esponiamo, ora, alcuni fatti generali riguardanti la riflessività nell'ambito degli spazi normati.

Sia X uno spazio normato e sia $\|\cdot\|$ la sua norma.

Sappiamo (v. Corollario 2 del Prop. 1.9 del §5) che il duale forte X'_b di X è (uno SLC) normabile e completo e che una norma definente la topologia di X'_b è la seguente:

$$(5.1) \qquad x' \mapsto \|x'\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x, x'\rangle| \qquad , \text{ove } \langle x, x'\rangle = x'(x).$$

Parlando del duale forte X'_b dello spazio normato X ci riferiremo allo spazio X' dotato della proprio della norma (5.1); pertanto potremo dire che il duale forte di uno spazio normato è uno spazio di Banach.

OSSERVAZIONE 1. Se lo spazio normato X è di dimensione infinita, la topologia forte $\beta(E';E)$ su X' è strettamente più fine della topologia debole $\sigma(X';X)$: infatti l'origine di X' appartiene alla chiusura debole dei sottoinsiemi $\{x'\in X' : \|x'\| = r\}$ di X' e quindi tali sottoinsiemi (che sono chiusi in X'_b) non sono chiusi in X'_s. Per convincersene si ricordi che una base di intorni dell'origine in X'_s è l'insieme delle intersezioni finite delle parti di X' del tipo $\{x'\in X' : |\langle a, x'\rangle| \leq \varepsilon\}$, con $a\in X$ e ε reale >0 e che per ogni famiglia finita $(a_i)_{i=1,..,n}$ di punti di X esiste $x'\in X'$ tale che $x'\neq 0$ e $x'(a_i)=0$ $\forall i=1,..,n$. L'ultima affermazione discende dal Teorema di Hahn-Banach (v. Corollario 5 del Teorema 8.2 del §4), dopo avere osservato che (per il Teorema 3.1 del §4) il sottospazio vettoriale di X generato da $\{a_1,.., a_n\}$ è chiuso in X e diverso da X.

OSSERVAZIONE 2. Da (5.1) segue subito
$$\|x'\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|\langle x, x'\rangle|}{\|x\|},$$
donde

(5.2) $$|\langle x, x'\rangle| \leq \|x\|\,\|x'\| \qquad \forall\,(x,x')\in X\times X';$$

di conseguenza la forma bilineare $(x,x')\mapsto\langle x,x'\rangle$ è continua(*) su $X\times X'_b$.

OSSERVAZIONE 3. Da (5.1) si deduce immediatamente

(5.3) $$\{x\in X : \|x\|\leq 1\}^{\circ} = \{x'\in X' : \|x'\|\leq 1\}, \qquad \{x\in E : \|x\|\leq 1\} = \{x\in X : \|x\|\leq 1\}^{\circ\circ}.$$

PROPOSIZIONE 5.1. Sia X uno spazio normato. Le sfere chiuse $\{x'\in X' : \|x'\|\leq r\}$ di X'_b sono compatte per la topologia debole $\sigma(X',X)$.

Dimostrazione. Basta, evidentemente, dimostrare la compattezza debole della sfera $\{x'\in X' : \|x'\|\leq 1\}$. Da (5.3) segue (per le Prop. 2.3 e 2.1) che $\{x'\in X' : \|x'\|\leq 1\}$ è un sottoinsieme equicontinuo e debolmente chiuso di X'; quindi (per la Prop. 3.4 del §5) $\{x\in X' : \|x'\|\leq 1\}$ è compatto in X'_s. #

TEOREMA 5.1. Un sottoinsieme di uno spazio normato X è debolmente compatto se e solo se è debolmente compatto per successioni (cioè se e solo se ogni successione in esso ammette qualche sottosuccessione debolmente convergente).

Dimostrazione. Sia $B=\{x'\in X' : \|x'\|\leq 1\}$. Se $x\in X$, indichiamo al solito con $\tilde{x}$ l'elemento di $(X'_s)'$ definito ponendo $\tilde{x}(x')=\langle x,x'\rangle \quad \forall x'\in X'$. Ricordiamo che (per il Teorema 1.1) la mappa $x\mapsto\tilde{x}$ è un isomorfismo di X_s su $(X'_s)'_s$.

Per ogni $\tilde{x}\in(X'_s)'$ sia $r(\tilde{x})$ la restrizione a B di $\tilde{x}$.

E' facile verificare che r è un isomorfismo di $(X'_s)'_s$ nello spazio $C(B,\mathbb{C})$ delle funzioni continue di B in $\mathbb{C}$ dotato della topologia della convergenza puntuale.

Di conseguenza un sottoinsieme H di $(X'_s)'_s$ è debolmente compatto (risp. debolmente compatto per successioni) se e solo se $r(H)$ è debolmente compatto (risp. debolmente compatto per successioni) in $C(B,\mathbb{C})$; donde la tesi in virtù del Teorema 4.1 del §5, essendo B compatto in X'_s per la Prop. 5.1. #

Dalla Prop. 5.1 segue, in virtù del Teorema 5.1, che, se X è uno spazio normato, ogni successione limitata in X'_b ammette una sottosuccessione debolmente convergente.

(*) Per convincersene basta osservare che, sussistendo (5.2), si ha
$$|\langle x,x'\rangle - \langle x_0,x'_0\rangle| = |\langle x-x_0,x'\rangle + \langle x_0,x'_0-x'\rangle| \leq \|x-x_0\|\,\|x'\| + \|x_0\|\,\|x'_0-x'\|.$$

PROPOSIZIONE 5.2. *Se X è uno spazio normato si ha per ogni $x \in X$*

$$(5.4) \qquad \|x\| = \sup_{\|x'\| \le 1} |\langle x, x' \rangle| \quad \left(= \sup_{x' \neq 0} \frac{|\langle x, x' \rangle|}{\|x'\|} \right)$$

e quindi l'immersione canonica $x \mapsto \tilde{x}$ di X in X'' (v. n. 4) è una isometria (lineare) di X in X''_b.

Dimostrazione. Da (5.2) segue immediatamente $\sup_{x' \neq 0} \frac{|\langle x, x' \rangle|}{\|x'\|} \le \|x\|$. Si ha anche $\|x\| \le \sup_{x' \neq 0} \frac{|\langle x, x' \rangle|}{\|x'\|}$ perchè (come conseguenza del Teorema di Hahn-Banach) per ogni $x \in X$ $x \neq 0$, esiste $x' \in X'$ tale che $\langle x, x' \rangle = \|x\| \|x'\|$: un tale x' si ottiene prolungando a X (v. Corollario 1 del Teorema 8.2 del §4) la forma lineare (e continua) f sul sottospazio $\mathbb{K}x$ di X definita da $f(\lambda x) = \lambda$, come si riconosce facilmente.

Essendo X'_b uno spazio normato, anche il suo duale forte X''_b è uno spazio normato con norma

$$x'' \mapsto \|x''\| = \sup_{\|x'\| \le 1} |\langle x', x'' \rangle| \quad \left(= \sup_{x' \neq 0} \frac{|\langle x', x'' \rangle|}{\|x'\|} \right), \text{ ove } \langle x', x'' \rangle = x''(x'),$$

allora, ricordando che $\tilde{x}$ è l'elemento di X'' definito da $\tilde{x}(x') = \langle x, x' \rangle$, da (5.4) segue subito $\|x\| = \|\tilde{x}\|$. #

Dalla Prop. 5.2 e dal fatto che il duale forte di uno spazio normato è completo discende il seguente

COROLLARIO. *Uno spazio normato semiriflessivo è uno spazio di Banach riflessivo.*

TEOREMA 5.2. *Uno spazio normato X è riflessivo se e solo se le sfere chiuse $\{x \in X : \|x\| \le r\}$ di X sono debolmente compatte.*

Di conseguenza (per il Teorema 5.1), ogni successione limitata in uno spazio normato riflessivo ha qualche sottosuccessione debolmente convergente.

Dimostrazione. Le sfere $\{x \in X : \|x\| \le r\}$, essendo chiuse in X, sono chiuse anche in X_s, perchè (v. Prop. 3.2) la chiusura di un sottoinsieme convesso di X è la stessa per ogni topologia localmente convessa su X compatibile con la dualità $\langle X, X' \rangle$. Inoltre tali sfere sono limitate in X e quindi in X_s. Pertanto, se X è riflessivo, tali sfere sono compatte in X_s in base al Teorema 4.1.

Viceversa, se le sfere $\{x \in X : \|x\| \le r\}$ di X sono debolmente compatte, allora $\tau(X', X) = \beta(X', X)$, cioè X è semiriflessivo e quindi riflessivo. Per convincersene basta pensare che $\tau(X', X) \subseteq \beta(X', X)$ e che una base di intorni dell'origine in $(X', \beta(X', X))$ è l'insieme delle sfere $\{x' \in X' : \|x'\| \le r\}$, ($r$ reale > 0), mentre una base di intorni dell'origine in $(X', \tau(X', X))$ è $\{A^\circ : A \text{ convesso, equilibrato e compatto di } X_s\}$, donde $\beta(X', X) \subseteq \tau(X', X)$ perchè le sfere $\{x \in X : \|x\| \le r\}$ sono sottoinsiemi convessi, equilibrati e compatti di X_s. #

6. SPAZI DI MONTEL.

Una classe molto importante di spazi riflessivi è quella degli spazi di Montel.
Dicesi spazio di Montel uno spazio localmente convesso barilato nel quale ogni sottoinsieme chiuso e limitato è compatto.
$\mathbb{C}^n$ è uno spazio di Montel (in base al Teorema 10.2 del §1) e quindi ogni spazio vettoriale topologico di Hausdorff di dimensione finita è uno spazio di Montel (perchè isomorfo a $\mathbb{C}^n$, ove n è la dimensione dello spazio).

Si osservi che in uno spazio vettoriale topologico normabile X i sottoinsiemi chiusi e limitati sono compatti (se e) solo se X è di dimensione finita: infatti, se X è normabile e in esso i sottoinsiemi chiusi e limitati sono compatti, X è localmente compatto e quindi di dimensione finita (per il Teorema 3.2 del § 4).
Proveremo tra poco (v. Teoremi 6.1 e 6.2) che, se Ω è un aperto di $\mathbb{R}^n$, gli spazi $C^\infty(\Omega)$ e $C_c^\infty(\Omega)$, definiti al n. 6 del § 4, sono spazi di Montel.

PROPOSIZIONE 6.1. *Ogni spazio di Montel è riflessivo.*

Dimostrazione. Sia E uno spazio di Montel. E è semiriflessivo, in virtù del Teorema 4.1, perchè in E_s i sottoinsiemi chiusi e limitati sono compatti: infatti, se B è un sottoinsieme chiuso e limitato di E_s, esso è (ovviamente) chiuso anche in E ed è limitato in E per il Teorema 3.2 di Mackey; quindi B è compatto in E (perchè E è di Montel) e di conseguenza è compatto anche in E_s.
Poichè, inoltre, E è barilato (in quanto spazio di Montel) esso è riflessivo in base al Teorema 4.2. #

PROPOSIZIONE 6.2. *Sia X uno spazio di Montel. Sulle parti limitate di X la topologia di X coincide con quella di X_s e sulle parti limitate di X_b' la topologia forte coincide con quella debole.*

Dimostrazione. Se B è un sottoinsieme limitato di X, $\overline{B}$ è compatto in X e quindi su $\overline{B}$ la topologia di X coincide con quella di X_s, in base al Corollario 2 del Teorema 9.1 del §1.

Se B' è un sottoinsieme limitato di X'_b, B' è equicontinuo (per il Teorema 3.1 di Banach-Steinhaus) essendo X barilato; perciò (v. Prop. 2.2 del §5) su B' la topologia debole coincide con la topologia della convergenza uniforme sui compatti di X, che, a sua volta, coincide con la topologia forte, perchè (essendo X di Montel) un sottoinsieme di X è compatto se e solo se è chiuso e limitato. #

COROLLARIO. <u>Sia X uno spazio di Montel. Una successione in X è convergente se (e solo se) è debolmente convergente; una successione in X' è fortemente convergente se (e solo se) è debolmente convergente.</u>

Dimostrazione. Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in X convergente debolmente a $x\in X$. La successione, in quanto debolmente convergente, è debolmente limitata, cioè limitata (per il Teorema 3.2 di Mackey); poichè (per la Prop. 6.2) sull'insieme limitato $\{x, x_1, x_2, \dots\}$ la topologia di X coincide con quella di X_s, la successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x nella topologia di X.
La seconda parte dell'enunciato si prova in maniera del tutto analoga. #

Ricordiamo (v. Teorema 3.2 del §5) che, se X è uno spazio barilato (in particolare di Montel), in X'_s le parti chiuse e limitate sono compatte. Se X è uno spazio di Montel, anche in X'_b le parti chiuse e limitate sono compatte, come afferma la seguente

PROPOSIZIONE 6.3. <u>Nel duale forte di uno spazio di Montel i sottoinsiemi chiusi e limitati sono compatti.</u>

Dimostrazione. Sia X uno spazio di Montel e sia B' un sottoinsieme chiuso e limitato di X'_b. B' è equicontinuo, in quanto limitato (v. Prop. 3.3 del §5). La chiusura debole di B' è equicontinua (v. Prop. 1.2 e 2.1 del §5) e quindi debolmente compatta (v. Teorema 3.2 del §5). Per la Prop. 6.2 sulla chiusura debole di B' la topologia di X'_s coincide con quella di X'_b e quindi la chiusura debole di B' è fortemente compatta e coincide con la chiusura forte di B', cioè con B'. #

COROLLARIO. <u>Il duale forte X'_b di uno spazio di Montel E è uno spazio di Montel.</u>

Dimostrazione. Il corollario segue immediatamente dalla Prop. 6.3 e dal fatto che, essendo X riflessivo (v. Prop. 6.1), anche X'_b è riflessivo (per il Corollario del Teorema 4.2) e quindi barilato. #

TEOREMA 6.1. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Lo spazio $C^\infty(\Omega)$, definito al n. 6 del § 4, è uno spazio di Montel.

Dimostrazione. $C^\infty(\Omega)$ è uno spazio localmente convesso barilato (v. Coroll. 2 della Prop. 3.2 del § 5). Si tratta di provare che ogni parte chiusa e limitata di $C^\infty(\Omega)$ è compatta (cioè che ogni parte limitata è relativamente compatta); essendo $C^\infty(\Omega)$ metrizzabile basterà provare che in $C^\infty(\Omega)$ ogni successione limitata ammette qualche sottosuccessione convergente.
La dimostrazione si articolerà in tre passi.

1° passo (Teorema di Arzelà). Sia K un sottoinsieme compatto di Ω. La mappa di restrizione $f \mapsto f_{|K}$ (che a ogni funzione $f: \Omega \to \mathbb{C}$ associa la sua restrizione a K) manda i limitati di $C^1(\bar\Omega)$ in sottoinsiemi relativamente compatti di $C^0(K)$.
Sia, infatti, $j: C^1(\bar\Omega) \to C^0(K)$ la mappa (lineare) di restrizione a K e sia B un sottoinsieme limitato di $C^1(\bar\Omega)$. Proviamo che $j(B)$ è un sottoinsieme relativamente compatto di $C^0(K)$, cioè (in base al Teorema 2.2 del § 5) che $j(B)$ è un sottoinsieme limitato ed equicontinuo di $C^0(K)$.
Che $j(B)$ sia limitato in $C^0(K)$ è ovvio. Usando la formula di Taylor si riconosce subito che, se $f \in C^1(\bar\Omega)$, per ogni $x_0 \in \Omega$ esiste un numero $\rho(x_0) > 0$ tale che

$$|x - x_0| \le \rho(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le \sup_{y \in \Omega} \left(\sup_{j=1,\dots,n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(y) \right| \right) |x - x_0| \le \|f\|_1 \, |x - x_0| .$$

Perciò ogni sfera (di raggio finito) con centro nell'origine in $C^1(\bar\Omega)$ è equicontinua in ogni $x_0 \in \Omega$. Ne segue che l'insieme limitato B è equicontinuo in Ω; di conseguenza $j(B)$ è equicontinuo in K.

2° passo. Siano Ω_1 e Ω_2 aperti relativamente compatti di $\mathbb{R}^n$ tali che $\bar\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ e sia k un intero ≥ 0. La mappa $C^{k+1}(\bar\Omega_2) \ni f \mapsto f_{|\bar\Omega_1}$ manda i limitati di $C^{k+1}(\bar\Omega_2)$ in sottoinsiemi relativamente compatti di $C^k(\bar\Omega_1)$.
Si tratta di dimostrare che ogni successione $s = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $C^{k+1}(\bar\Omega_2)$ limitata ammette una sottosuccessione $s_1 = (f_{n_t})_{t \in \mathbb{N}}$ convergente in $C^k(\bar\Omega_1)$ nel senso che la successione $(f_{n_t}|_{\bar\Omega_1})_{t \in \mathbb{N}}$ è convergente in $C^k(\bar\Omega_1)$.
Essendo s è limitata in $C^{k+1}(\bar\Omega_2)$, per ogni multiindice p tale che $|p| \le k$ la successione $D^p s = (D^p f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata in $C^1(\bar\Omega_2)$ e quindi, per il Teorema di Arzelà, esiste una sottosuccessione s_1 di s tale che $D^p s_1$ converge in $C^0(\bar\Omega_1)$: detto f_p il suo limite, si ha (in base a (4.15) del § 4) $f_p = D^p f_0$ e quindi s_1 converge a f_0 in $C^k(\bar\Omega_1)$.

<u>3° passo. Ogni parte limitata in $C^{k+1}(\Omega)$ è relativamente compatta in $C^k(\Omega)$</u>, (k intero ≥ 0.
Si tratta di dimostrare che ogni successione limitata in $C^{k+1}(\Omega)$ ammette una sottosuccessione convergente in $C^k(\Omega)$.
Sia $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di aperti di Ω tale che $\overline{\Omega}_j$ sia compatto in Ω_{j+1} e $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j$.
Sia s una successione in $C^{k+1}(\Omega)$ limitata. Poichè s è limitata in $C^{k+1}(\overline{\Omega}_2)$, esiste (in base al 2° passo) una sottosuccessione s_1 di s convergente in $C^k(\overline{\Omega}_1)$. Dalla limitatezza in $C^{k+1}(\Omega)$ di s_1 segue (sempre in virtù del 2° passo) l'esistenza di una sottosuccessione s_2 di s convergente in $C^k(\overline{\Omega}_2)$. Procedendo per induzione si ottiene una successione totalmente ordinata di successioni

$$s = s_0 \supseteq s_1 \supseteq \dots \supseteq s_j \supseteq \dots$$

tale che s_j converge in $C^k(\overline{\Omega}_{j-1})$. Sia f_j il limite di s_j in $C^k(\overline{\Omega}_{j-1})$.
Detto $\overline{f}_j$ un elemento di s_j tale che

$$\| \overline{f}_j|_{\overline{\Omega}_{j-1}} - f_j|_{\overline{\Omega}_{j-1}} \|_{C^k(\overline{\Omega}_{j-1})} \leq \frac{1}{j} ,$$

la successione $(\overline{f}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di s e converge in $C^k(\Omega)$ alla funzione f di cui la restrizione a Ω_j è f_j $\forall j \in \mathbb{N}$.

<u>4° passo. In $C^\infty(\Omega)$ le parti limitate sono relativamente compatte.</u>
Sia s una successione limitata in $C^\infty(\Omega)$. Qualunque sia l'intero positivo k, s è limitata in $C^k(\Omega)$ e quindi (per il 3° passo) s ammette una sottosuccessione convergente in $C^{k-1}(\Omega)$. Sia s_0 una sottosuccessione di s convergente in $C^0(\Omega)$; sia poi s_1 una sottosuccessione di s_0 convergente (necessariamente a f) in $C^1(\Omega)$; sia s_2 una sottosuccessione di s_1 convergente (a f) in $C^2(\Omega)$. Procedendo per induzione si ottiene una successione di successioni

$$s = s_0 \supseteq s_1 \supseteq s_2 \supseteq \dots \supseteq s_k \supseteq \dots$$

tali che s_k converge a f in $C^k(\Omega)$ $\forall k \geq 1$. Allora $f \in C^\infty(\Omega)$ e, detto g_k un elemento di s_k tale che

$$\| g_k - f \|_{C^k(\overline{\Omega}_k)} \leq 1/k ,$$

$(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è (evidentemente) una sottosuccessione di s che converge a f in $C^\infty(\Omega)$. #

TEOREMA 6.2. Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^n$. Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$, definito al n. 6 del §4, è uno spazio di Montel.

Dimostrazione. $\mathcal{D}(\Omega)$ è uno spazio localmente convesso barilato (v. Coroll. 2 della Prop. 3.2 del §5). Perciò basta provare che in $\mathcal{D}(\Omega)$ ogni parte chiusa e limitata è compatta.
Sia $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di aperti di Ω tale che $\overline{\Omega}_j$ è compatto in Ω_{j+1} e $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} \Omega_j$.
Sia B una parte chiusa e limitata di $\mathcal{D}(\Omega)$. Per il Teorema 7.2 del §4, esiste $j_0 \in \mathbb{N}$ tale che B è un sottoinsieme chiuso e limitato di $C_c^\infty(\overline{\Omega}_{j_0})$.
Allora (avendo $C_c^\infty(\overline{\Omega}_{j_0})$ la topologia indottavi da quella di $C^\infty(\Omega)$), in base al teorema precedente, B è un sottoinsieme compatto di $C_c^\infty(\overline{\Omega}_{j_0})$; di conseguenza B è compatto in $\mathcal{D}(\Omega)$ perché la topologia di $C_c^\infty(\overline{\Omega}_{j_0})$ è quella indotta dalla topologia di $\mathcal{D}(\Omega)$. #

Detti $\mathcal{E}'_b(\Omega)$ il duale forte di $C^\infty(\Omega)$ e $\mathcal{D}'_b(\Omega)$ il duale forte di $\mathcal{D}(\Omega)$, dai Teoremi 6.1 e 6.2 segue, in base al Corollario della Prop. 6.3, che anche $\mathcal{E}'_b(\Omega)$ e $\mathcal{D}'_b(\Omega)$ sono spazi di Montel.

COROLLARIO. Sia $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Se, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la successione $(u_k(\varphi))_{k\in\mathbb{N}}$ è convergente in $\mathbb{C}$, allora, posto, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$u(\varphi) = \lim_{k\to\infty} u_k(\varphi),$$

$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge fortemente a u.

Dimostrazione. Per ipotesi, la successione $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge puntualmente alla funzione $u: \varphi \mapsto u(\varphi)$ di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathbb{C}$. Per il Coroll. 2 del Teorema 3.1 (di Banach-Steinhaus) la funzione u è lineare e continua, cioè $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
Allora, in base al Corollario della Prop. 6.2, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge a u fortemente. #

7. TRASPOSTA DI UNA APPLICAZIONE LINEARE E CONTINUA.

Se X, Y sono spazi vettoriali (su $\mathbb{C}$) e u è un'applicazione lineare di X in Y, la <u>trasposta</u> (<u>algebrica</u>) di u è l'applicazione lineare $u^*: Y^* \to X^*$ definita $\forall y^* \in Y$ da

$$\langle x, u^*(y^*)\rangle = \langle u(x), y^*\rangle \qquad , (x \in X),$$

ove $\langle \cdot , \cdot \rangle$ denota, a destra, la dualità naturale tra X e X^* e, a sinistra, quella tra Y e Y^*.

Se X, Y sono spazi vettoriali topologici e u è un'applicazione lineare e continua di X in Y, u^* induce evidentemente un'applicazione $u': Y' \to X'$ che diremo la <u>trasposta</u> di u. Dunque la trasposta di $u: X \to Y$ è l'applicazione lineare $u': Y' \to X'$ definita, per ogni $y' \in Y'$, da

$$u'(y') = y' \circ u$$

ossia da

$$\langle x, u'(y')\rangle = \langle u(x), y'\rangle \qquad , (x \in X).$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "y' \circ u"'] & Y \arrow[d, "y'"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

PROPOSIZIONE 7.1. <u>Siano X, Y spazi vettoriali topologici e $u: X \to Y$ un'applicazione lineare e continua. Siano $\mathfrak{S}_X$ un insieme di parti limitate di X e $\mathfrak{S}_Y$ un insieme di parti limitate di Y. Se per ogni $A \in \mathfrak{S}_X$ esiste $B \in \mathfrak{S}_Y$ tale che $u(A) \subseteq B$, allora la trasposta $u': Y' \to X'$ di u è continua quando X' e Y' sono dotati della topologia della convergenza uniforme rispettivamente sugli elementi di $\mathfrak{S}_X$ e sugli elementi di $\mathfrak{S}_Y$.</u>
<u>In particolare $u': Y' \to X'$ è continua se X' e Y' sono dotati entrambi della topologia debole, oppure della topologia di Mackey, oppure della topologia forte.</u>

Dimostrazione. Ricordiamo (v. Prop. 1.5 del §5) che la topologia su X' della convergenza uniforme sugli elementi di $\mathfrak{S}_X$ è definita dalla famiglia delle seminorme p_A, $A \in \mathfrak{S}_X$, ove $p_A(x') = \sup_{x \in A} |\langle x, x'\rangle|$ $\forall x' \in X'$ e la topologia su Y' della convergenza uniforme sugli elementi di $\mathfrak{S}_Y$ è definita dalla famiglia delle seminorme p_B, $B \in \mathfrak{S}_Y$, ove $p_B(y') = \sup_{y \in B} |\langle y, y'\rangle|$ $\forall y' \in Y'$.

Per ipotesi, per ogni $A \in \mathfrak{S}_X$ esiste $B \in \mathfrak{S}_Y$ tale che $u(A) \subseteq B$. Da $u(A) \subseteq B$ segue, $\forall y' \in Y'$,

$$p_A(u'(y')) = p_A(y' \circ u) = \sup_{x \in A} |\langle u(x), y'\rangle| \leq \sup_{y \in B} |\langle y, y'\rangle| = p_B(y').$$

Pertanto, per ogni $A \in \mathfrak{S}_X$ esiste $B \in \mathfrak{S}_Y$ tale che

$$p_A(u'(y')) \le p_B(y') \qquad \forall y' \in Y'$$

e quindi $u' : F' \to E'$ è continua per la $\mathfrak{S}_X$-topologia su X' e la $\mathfrak{S}_Y$-topologia su Y', in virtù della Prop. 5.6 del § 4.

La seconda parte dell'enunciato della Prop. 7.1 è una conseguenza del fatto che l'applicazione lineare e continua $u : X \to Y$ mappa le parti finite di X in parti finite di Y, le parti convesse e compatte di X in parti convesse e compatte di Y (v. Teorema 9.1 del § 1) e le parti limitate di X in parti limitate di Y (v. Prop. 1.3). #

E' immediato constatare che, se X, Y sono spazi localmente convessi e $u : X \to Y$ è un'applicazione lineare e continua, si ha

$$(7.1) \qquad \operatorname{Ker} u' = (u(X))^\circ, \qquad \operatorname{Ker} u = (u'(Y'))^\circ,$$

ove $(u(X))^\circ = \{y' \in \ : \langle y, y' \rangle = 0 \ \ \forall y \in u(X)\}$ è il polare di $u(X)$ e $(u'(F'))^\circ = \{x \in X : \langle x, x' \rangle = 0 \ \ \forall x' \in u'(Y')\}$ è il polare di $u'(Y')$. (V. n. 2).

Ricordando che il bipolare di un sottoinsieme di uno spazio localmente convesso coincide con l'inviluppo convesso, equilibrato e debolmente chiuso dell'insieme stesso (v. Teorema 2.1), da (7.1) segue immediatamente la seguente

PROPOSIZIONE 7.2. <u>Siano X, Y spazi localmente convessi e $u : X \to Y$ un'applicazione lineare e continua. Allora $(\operatorname{Ker} u')^\circ$ è la chiusura di $u(X)$ in Y e $(\operatorname{Ker} u)^\circ$ è la chiusura debole di $u'(Y')$ in X'; di conseguenza $u(X)$ è denso in Y se e solo se $u' : Y' \to X'$ è iniettiva e $u'(Y')$ è denso in X'_s se e solo se $u : X \to Y$ è iniettiva.</u>

PROPOSIZIONE 7.3. <u>Siano X uno spazio localmente convesso e M un sottospazio di X. Allora M' è isomorfo (algebricamente) a X'/M° e la trasposta π' della proiezione canonica $\pi : X \to X/M$ è un isomorfismo (algebrico) di $(X/M)'$ su M°.</u>

Dimostrazione. La trasposta i' dell'immersione canonica $i : M \to X$ è un'applicazione lineare di X' <u>su</u> M', per il Teorema di Hahn-Banach.

Poiché $\operatorname{Ker} i' = (i(M))^\circ = M^\circ$, M' è isomorfo (algebricamente) a X'/M°.

La trasposta $\pi' : (X/M)' \to X'$ di $\pi : X \to X/M$ è iniettiva perché π è suriettiva (v. Prop. 7.2).

Proviamo che $\pi'((X/M)') = M^\circ$. Innanzitutto $\pi'((X/M)') \subseteq M^\circ$ perchè, se $\varphi \in (X/M)'$, si ha $\pi'(\varphi) = \varphi \circ \pi$ è evidentemente un elemento di X' che si annulla su M.

Viceversa, se $x' \in M^o$, ha senso considerare l'applicazione $\varphi: \pi(x) \mapsto \langle x, x' \rangle$ di $X/_M$ in $\mathbb{C}$ e risulta $\varphi \circ \pi = x'$. L'applicazione lineare $\varphi: X/_M \to \mathbb{C}$ è continua (in base alla Prop. 1.9 del §4) perchè $\varphi \circ \pi: X \to \mathbb{C}$ è continua; quindi $\varphi \in (X/_M)'$. Dunque, per ogni $x' \in M^o$ esiste $\varphi \in (X/_M)'$ tale che $\varphi \circ \pi = x'$, cioè tale che $\pi'(\varphi) = x'$.

8. TOPOLOGIA DEBOLE E TOPOLOGIA DI MACKEY DI UN SOTTOSPAZIO E DI UNO SPAZIO QUOZIENTE.

PROPOSIZIONE 8.1. Siano X uno spazio localmente convesso e M un sottospazio di X. La topologia debole $\sigma(X, X')$ di X induce su M la topologia debole $\sigma(M, M')$ di M e la topologia di Mackey $\tau(X, X')$ di X induce su M una topologia compatibile con la dualità $\langle M, M' \rangle$ ma più debole della topologia di Mackey $\tau(M, M')$ di M.

Dimostrazione. Una prebase di intorni dell'origine in M per la topologia che $\sigma(X, X')$ induce su M è $\{M \cap \{x'\}^o : x' \in X'\}$, ove $\{x'\}^o = \{z \in X : |\langle x, x' \rangle| \le 1\}$ e una prebase di intorni dell'origine in M per la topologia debole $\sigma(M, M')$ è $\{\{y'\}^o : y' \in M'\}$, ove $\{y'\}^o = \{y \in M : \langle y, y' \rangle = 0\}$. Per convincersi che la topologia $\sigma(X, X')$ induce su M la topologia $\sigma(M, M')$ basta osservare che $M \cap \{x'\}^o = \{x \in M : |\langle x, x' \rangle| \le 1\}$ e ricordare che (per il Teorema di Hahn-Banach) ogni forma lineare e continua su M è la restrizione a M di una forma lineare e continua su X.

Una prebase di intorni dell'origine in M per la topologia che $\tau(X, X')$ induce su M è l'insieme delle parti di M del tipo $V(A) = \{x \in M : \sup_{x' \in A} |\langle x, x' \rangle| \le 1\}$, ove A è un sottoinsieme convesso, equilibrato e compatto di X'_s, mentre una prebase di intorni dell'origine di $(M, \tau(M, M'))$ è l'insieme delle parti di M del tipo $U(B) = \{x \in M : \sup_{y' \in B} |\langle x, y' \rangle| \le 1\}$, ove B è un sottoinsieme convesso, equilibrato e compatto di $M'_s = (M', \sigma(M, M'))$. Ricordando che la trasposta i' dell'iniezione canonica $i: M \to X$ è un'applicazione lineare e continua di X'_s in M'_s, se A è un sottoinsieme convesso, equilibrato e compatto di X'_s, allora $i'(A)$ è un sottoinsieme convesso, equilibrato e compatto di M'_s e risulta

$$V(A) = \{x \in M : \sup_{y' \in i'(A)} |\langle x, y' \rangle| \le 1\};$$

dunque $V(A)$ è un intorno dell'origine in M anche per la topologia $\tau(M, M')$.
La topologia su M indottavi da $\tau(M, M')$ è compatibile con la dualità $\langle M, M' \rangle$ perchè è più debole di $\tau(M, M')$ ed è (evidentemente) più fine di $\sigma(M, M')$. #

PROPOSIZIONE 8.2. *Siano X uno spazio localmente convesso e M un sottospazio chiuso di X. La topologia debole $\sigma(X/M, (X/M)')$ di X/M coincide con la topologia quoziente su M della topologia debole $\sigma(X,X')$ di X.*
La topologia di Mackey $\tau(X/M, (X/M)')$ di X/M coincide con la topologia quoziente su M della topologia di Mackey $\tau(X,X')$ di X. Di conseguenza, se X è uno spazio di Mackey, anche lo spazio quoziente X/M è di Mackey.

Dimostrazione. Sia $\pi: X \to X/M$ la proiezione canonica di X su X/M. Una prebase di intorni dell'origine in X_s/M è l'insieme $\{\pi(V(x')) : x' \in X'\}$, ove

$$V(x') = \{x \in X : |\langle x, x'\rangle| \le 1\}.$$

Sia $x' \notin M^\circ = \{x' \in X : \langle y, x'\rangle = 0 \ \ \forall y \in M\}$ e sia $\bar{x} \in M$ tale che $\langle \bar{x}, x'\rangle \ne 0$.
Se, per ogni $x \in X$ si pone $y = \dfrac{\langle x, x'\rangle}{\langle \bar{x}, x'\rangle}\bar{x}$, si ha $\langle x, x'\rangle = \langle y, x'\rangle$; perciò $\forall x \in X$ esiste $y \in M$ tale che $\langle x, x'\rangle = \langle y, x'\rangle$, cioè tale che $\langle x+y, x'\rangle = 0$, che implica $x + y \in V(x')$. Avendosi $\pi(x+y) = \pi(x)$, risulta $\pi(x) \in \pi(V(x'))$ $\forall x' \in X'$; donde $\pi(E) = \pi(V(x'))$, cioè $X/M = \pi(V(x'))$. Dunque se $x' \notin M^\circ$ si ha $\pi(V(x')) = X/M$.
Pertanto una base di intorni dell'origine di X_s/M è anche $\{\pi(V(x')) : x' \in M^\circ\}$; ma quest'ultima è anche una base di intorni dell'origine di $(X/M, \sigma(X/M, (X/M)'))$, dato che, essendo (v. Prop. 7.3) π' un isomorfismo (algebrico) di $(X/M)'$ su M°, per ogni $\varphi \in (X/M)'$ si ha $\langle \pi(x), \varphi\rangle = \langle x, \pi'(\varphi)\rangle$, con $\pi'(\varphi) \in M^\circ$.
Proviamo ora che la topologia quoziente su M di $\tau(X,X')$ coincide con $\tau(X/M, (X/M)')$. Poniamo $X_\tau = (X, \tau(X,X'))$ e osserviamo che

$$(X/M)' = (X_\tau/M)'.$$

Per convincersene basta osservare che $X' = (X_\tau)'$ e che, detta $\mathcal{T}$ una topologia vettoriale su X, una forma lineare φ su $(X,\mathcal{T})/M$ è continua se e solo se la forma lineare $\varphi \circ \pi$ su $(X,\mathcal{T})$ è continua.
Ne segue che la topologia di Mackey $\tau(X/M, (X/M)')$ di X/M è più fine della topologia quoziente su M della topologia di Mackey $\tau(X,X')$ di X. Ci resta da verificare che quest'ultima è più fine di $\tau(X/M, (X/M)')$. Ciò è vero perché una prebase di intorni dell'origine di $(X/M, \tau(X/M, (X/M)'))$ è $\{V(A) : A$ sottoinsieme convesso, equilibrato e debolmente compatto di $(X/M)'\}$, ove $V(A) = \{\pi(x) : x \in X, \ \sup_{\varphi \in A} |\langle \pi(x), \varphi\rangle| \le 1\}$ e perché $V(A)$ è un intorno dell'origine in X/M anche per la topologia quoziente su M di $\tau(X,X')$, avendosi $V(A) = \{\pi(x) : x \in X, \ \sup_{\varphi \in A} |\langle x, \pi'(\varphi)\rangle| \le 1\} = \{\pi(x) : x \in X, \ \sup_{x' \in \pi'(A)} |\langle x, x'\rangle| \le 1\}$ ed essendo $\pi'(A)$ un sottoinsieme convesso, equilibrato e compatto di X'_s. [Si ricordi (v. Prop. 7.1) che $\pi' : (X/M)' \to X'$ è continua per le topologie deboli di $(X/M)'$ e di X']. #

9. DUE TEOREMI GENERALI DI ESISTENZA IN ANALISI LINEARE.

Siano L uno spazio vettoriale (su $\mathbb{C}$), X_1 e X_2 due spazi localmente convessi, $\mathcal{P}_1$ un insieme di seminorme su X_1 definente la topologia di X_1 e $\mathcal{P}_2$ un insieme filtrante di seminorme su X_2 definente la topologia di X_2.
Siano $u_1 : L \to X_1$, $u_2 : L \to X_2$ applicazioni lineari. Dimostriamo il seguente

TEOREMA 9.1. Se il sottospazio $u_2(L)$ di X_2 è di Mackey [il che accade, per esempio se X_2 è metrizzabile] le seguenti affermazioni sono tra loro equivalenti.

(a_1) Per ogni $x_1' \in X_1'$ esiste $x_2' \in X_2'$ tale che (*)

$$\langle u_1(x), x_1' \rangle = \langle u_2(x), x_2' \rangle \qquad \forall x \in L. \tag{9.1}$$

(b_1) Risulta $\operatorname{Ker} u_2 \subseteq \operatorname{Ker} u_1$ e l'applicazione $\varphi : u_2(x) \mapsto u_1(x)$, del sottospazio $u_2(L)$ di X_2 in X_1 è continua.

(c_1) Per ogni seminorma $p_1 \in \mathcal{P}_1$ esistono una seminorma $p_2 \in \mathcal{P}_2$ e un numero $c > 0$ tali che

$$p_1(u_1(x)) \le c\, p_2(u_2(x)) \qquad \forall x \in L. \tag{9.2}$$

Dimostrazione. Si osservi innanzitutto che la condizione $\operatorname{Ker} u_2 \subseteq \operatorname{Ker} u_1$ è chiaramente (se si ha presente il Teorema di Hahn-Banach) necessaria affinché sussista (a_1) e che, se $\operatorname{Ker} u_2 \subseteq \operatorname{Ker} u_1$, ha senso considerare l'applicazione $\varphi : u_2(x) \mapsto u_1(x)$ di $u_2(L)$ in X_1.
Si osservi, poi, che (a_1) equivale all'affermazione $(a_1)'$ seguente.

$(a_1)'$: Risulta $\operatorname{Ker} u_2 \subseteq \operatorname{Ker} u_1$ e sussiste l'implicazione

$$x_1' \in (u_1(L))' \Rightarrow x_1' \circ \varphi \in (u_2(L))'. \tag{9.3}$$

Infatti (a_1) afferma che, per ogni $x_1' \in E_1'$, la forma lineare $u_2(x) \mapsto \langle u_1(x), x_1' \rangle$, ($x \in L$) è la restrizione a $u_2(L)$ di qualche $x_2' \in X_2'$; d'altra parte, se $\operatorname{Ker} u_2 \subseteq \operatorname{Ker} u_1$, si ha $x_1' \circ \varphi : u_2(x) \mapsto \langle u_1(x), x_1' \rangle$, donde la conclusione in virtù del Teorema di Hahn-Banach.
E' ovvio che $(b_1) \Rightarrow (a_1')$. Mostriamo che $(a_1') \Rightarrow (b_1)$, cioè che φ è continua se vale (9.3).
Siano $\mathcal{T}_1$ la topologia del sottospazio $u_1(L)$ di X_1 e $\mathcal{T}_\varphi$ la massima topologia localmente convessa sullo spazio vettoriale $u_1(L)$ per cui φ è continua. E' evidente che, se x_1' è una forma lineare su $u_1(L)$, si ha

$$x_1' \in (u_1(L), \mathcal{T}_\varphi)' \Longleftrightarrow x_1' \circ \varphi \in (u_2(L))'.$$

(*) $\langle \cdot , \cdot \rangle$ indica la dualità naturale tra uno spazio localmente convesso e il suo duale.

Pertanto (9.3) equivale all'implicazione $x_1' \in (u_1(L), \mathcal{T}_1)' \Rightarrow x_1' \in (u_1(L), \mathcal{T}_\varphi)'$, cioè all'inclusione

$$(9.4) \qquad (u_1(L), \mathcal{T}_1)' \subseteq (u_1(L), \mathcal{T}_\varphi)'.$$

Poiché, per ipotesi, $u_2(L)$ (con la topologia indottavi da quella di X_2) è uno spazio di Mackey tale è lo spazio quoziente $u_2(L)/_{\mathrm{Ker}\,\varphi}$ (v. Prop. 8.2); di conseguenza anche $(u_1(L), \mathcal{T}_\varphi)$ è uno spazio di Mackey, perché isomorfo (come spazio vettoriale topologico) a $u_2(L)/_{\mathrm{Ker}\,\varphi}$. Perciò da (9.4) segue $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_\varphi$, donde la continuità di $\varphi : u_2(L) \to X_1$.
Infine (b_1) e (c_1) sono equivalenti, perché (9.2) implica $\mathrm{Ker}\, u_2 \subseteq \mathrm{Ker}\, u_1$ e la condizione (c_1) è (v. Prop. 5.6 del §4) necessaria e sufficiente per la continuità di φ. #

Si noti che da (9.1) segue $u_1(\mathrm{Ker}\, u_2) \subseteq \mathrm{Ker}\, x_1'$, cioè

$$(9.5) \qquad \langle u_1(x), x_1' \rangle = 0 \qquad \forall x \in \mathrm{Ker}\, u_2$$

e che (9.5) è soddisfatta qualunque sia $x_1' \in E_1'$ se e solo se $\mathrm{Ker}\, u_2 \subseteq \mathrm{Ker}\, u_1$.
Se, invece, $\mathrm{Ker}\, u_2 \not\subseteq \mathrm{Ker}\, u_1$, (9.5) è una condizione di compatibilità sul dato $x_1' \in X_1'$ per l'equazione (9.1).
Detta π la proiezione canonica di E_1 sullo spazio (localmente convesso) $\tilde{X}_1 = X_1/_{u_1(\mathrm{Ker}\, u_2)}$, poniamo

$$\tilde{u}_1 = \pi \circ u_1 .$$

Ricordando che la topologia di $\tilde{X}_1$ è definita dall'insieme delle seminorme $\tilde{p}_1$, $(p_1 \in \mathcal{P}_1)$, ove

$$\tilde{p}_1(\pi(x_1)) = \inf_{y \in \mathrm{Ker}\, u_2} p_1(x_1 + u_1(y)), \qquad (x_1 \in X_1),$$

è immediato constatare che, se $x_1' \in X_1'$ verifica (9.5), la forma lineare $\tilde{x}_1$ su $\tilde{X}_1$ definita da (*)

$$(9.6) \qquad \langle \pi(x_1), \tilde{x}_1' \rangle = \langle x_1, x_1' \rangle \qquad , (x_1 \in X_1),$$

è continua e che, viceversa, se $\tilde{x}_1' \in (\tilde{X}_1)'$, la forma lineare x_1' su X_1 definita da (9.6), cioè la forma lineare $X_1 \ni x_1 \mapsto \langle \pi(x_1), \tilde{x}_1' \rangle$, è continua e verifica (9.5).
Pertanto l'affermazione: per ogni $x_1' \in X_1'$ verificante (9.5) esiste $x_2' \in E_2'$ tale che valga (9.1), equivale all'affermazione: per ogni $\tilde{x}_1' \in (\tilde{X}_1)'$ esiste $x_2' \in X_2'$ tale che

$$\langle \tilde{u}_1(x), \tilde{x}_1' \rangle = \langle u_2(x), x_2' \rangle \qquad \forall x \in L .$$

In base a queste considerazioni e al fatto che, evidentemente, $\mathrm{Ker}\, u_2 \subseteq \mathrm{Ker}\, \tilde{u}_1$, dal Teorema 9.1 segue immediatamente il seguente Teorema 9.2 (del quale, d'altra parte, il Teorema 9.1 è un caso particolare).

(*) Si noti che, se $x_1' \in X_1'$ verifica (9.5), allora da $x_1, y_1 \in X_1$, $\pi(x_1) = \pi(y_1)$ segue $\langle x_1, x_1' \rangle = \langle y_1, x_1' \rangle$ e quindi ha senso considerare l'applicazione $\tilde{x}_1' : \pi(x_1) \mapsto \langle x_1, x_1' \rangle$, $(x_1 \in X_1)$, di $\tilde{X}_1$ in $\mathbb{C}$.

TEOREMA 9.2. Se il sottospazio $u_2(L)$ è di Mackey [il che accade, per esempio, se X_2 è metrizzabile] le seguenti affermazioni sono tra loro equivalenti:

(a_2) Per ogni $x_1' \in X_1'$ verificante (9.5) esiste $x_2' \in X_2'$ tale che valga (9.1).

(b_2) L'applicazione $u_2(x) \mapsto \tilde{u}_1(x)$, del sottospazio $u_2(L)$ di X_2 in $X_1 / u_1(\operatorname{Ker} u_2)$ è continua

(c_2) Per ogni seminorma $p_1 \in \mathcal{P}_1$ esistono una seminorma $p_2 \in \mathcal{P}_2$ e un numero $c > 0$ tali che

$$\inf_{y \in \operatorname{Ker} u_2} p_1(u_1(x) + u_1(y)) \leq c\, p_2(u_2(x)) \qquad \forall x \in L.$$

Il Teorema 9.1 (o il Teorema 9.2), nel caso che X_1 e X_2 siano spazi di Banach, è noto come il Principio di esistenza di G. Fichera.

* * * * *

Mettiamo ora in evidenza alcune immediate conseguenze dei Teoremi 9.1 e 9.2.

Assumendo, nell'enunciato del Teorema 9.2, $L = X_1 = X$, $X_2 = Y$, $u_1 =$ identità di X in sé, si ha il seguente

COROLLARIO 1. Siano X, Y spazi localmente convessi e $u : X \to Y$ un'applicazione lineare e continua. Se Y è metrizzabile allora u è relativamente aperta [cioè mappa gli aperti di X in aperti del sottospazio $u(X)$ di Y] se e solo se $u'(Y') = (\operatorname{Ker} u)^\circ$, cioè (v. Prop. 7.2) se e solo se $u'(Y')$ è debolmente chiuso in X'.

Tenendo presente, poi, che (v. Prop. 7.2) u' è iniettiva se e solo se $u(X)$ è denso in Y e ricordando il Teorema della mappa aperta (Teorema 9.3 del §4), dal Corollario 1 segue immediatamente il seguente

COROLLARIO 2 (noto come Teorema di suriezione tra spazi di Fréchet). Se X, Y sono spazi di Fréchet (v. n. 5 e 6 del §4), un'applicazione lineare e continua $u : X \to Y$ è suriettiva se e solo se la sua trasposta $u' : Y' \to X'$ è iniettiva e $u'(Y)$ è debolmente chiuso in X'.

Questo risultato è importante nella teoria degli operatori differenziali lineari.