# § 7. SPAZI DI HILBERT. PROPRIETÀ GENERALI.

## 1. FORME SESQUILINEARI E FORME HERMITIANE.

Sia $X$ uno spazio vettoriale (su $\mathbb{C}$).

Un'applicazione $a: X\times X \to \mathbb{C}$ dicesi una <u>forma sesquilineare</u> su $X$ se è lineare nella prima variabile e semilineare nella seconda variabile, nel senso che risulta

$$(1.1)\ \begin{cases} a(x_1+x_2, y) = a(x_1,y)+a(x_2,y) \\ a(\lambda x, y) = \lambda\, a(x,y) \end{cases} \quad , \qquad (1.2)\ \begin{cases} a(x, y_1+y_2) = a(x,y_1)+a(x,y_2) \\ a(x, \lambda y) = \bar\lambda\, a(x,y) \end{cases}$$

per ogni $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$; $\bar\lambda$ è il numero complesso coniugato di $\lambda$.

<u>Una forma sesquilineare su $X$ è individuata dalla sua restrizione alla diagonale di $X\times X$,</u> perchè (come si verifica immediatamente), se $a: X\times X\to\mathbb{C}$ è sesquilineare sussiste l'identità

$$(1.3)\qquad 4a(x,y) = [a(x+y, x+y) - a(x-y, x-y)] + i\,[a(x+iy, x+iy) - a(x-iy, x-iy)].$$

Una <u>forma hermitiana</u> su $X$ è un'applicazione $a: X\times X\to\mathbb{C}$ verificante (1.1) e

$$(1.4)\qquad a(x,y) = \overline{a(y,x)}\,.$$

<u>Una forma hermitiana su $X$ è una forma sesquilineare $a$ su $X$ tale che $a(x,x)$ è reale per ogni $x\in X$.</u> Infatti, se $a: X\times X\to\mathbb{C}$ è una forma hermitiana, allora $a$ è una forma sesquilineare su $X$ (perchè (1.1) e (1.4) implicano (1.2)) e $a(x,x)$ è reale (perchè da (1.4) segue $a(x,x) = \overline{a(x,x)}$); viceversa, se $a: X\times X\to\mathbb{C}$ è una forma sesquilineare tale che $a(x,x)\in\mathbb{R}$ $\forall x\in X$, allora da (1.3) segue immediatamente (1.4) (tenendo presente che $y+ix = i(x-iy)$, $y-ix = -i(x+iy)$) e quindi $a$ è una forma hermitiana.

ESEMPIO. Sia $X$ uno spazio vettoriale di dimensione (finita) $n$ e sia $(e_h)_{h=1,\dots,n}$ una base di $X$.

Se $a$ è una forma sesquilineare su $X$ risulta, per ogni $x = \sum_{h=1}^{n} x_h e_h$ e $y = \sum_{h=1}^{n} y_h e_h$ di $X$,

$$a(x,y) = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}\, x_h\, \bar y_k \quad , \quad \text{ove} \quad a_{hk} = a(e_h, e_k);$$

se $a$ è hermitiana si ha $a_{hk} = \bar a_{kh}$.

Una <u>forma sesquilineare</u> $a$ su $X$ tale che $a(x,x)\geq 0$ $\forall x\in X$ dicesi <u>non negativa</u>; $a$ dicesi <u>positiva</u> se $a(x,x)>0$ $\forall x\in X$, $x\neq 0$. Per quanto si è detto sopra, le forme sesquilineari non negative e quelle positive sono forme hermitiane.

Se $a: X\times X \to \mathbb{C}$ è una forma sesquilineare non negativa sussiste la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz :

$$|a(x,y)|^2 \le a(x,x)\, a(y,y) \qquad \forall (x,y)\in X\times X.$$

Infatti, fissati $x,y\in X$, per ogni $\lambda\in\mathbb{C}$ si ha
$0\le a(x+\lambda y, x+\lambda y) = a(x,x) + |\lambda|^2 a(y,y) + \lambda a(y,x) + \bar\lambda a(x,y) = a(x,x) + |\lambda|^2 a(y,y) + 2\mathcal{R}e[\bar\lambda a(x,y)]$,
donde, posto $\lambda = a(x,y)t$, si ha, per ogni $t\in\mathbb{R}$,
$0\le a(x,x) + t^2 a(y,y)|a(x,y)|^2 + 2t\,|a(x,y)|^2$,
che implica $|a(x,y)|^4 \le a(x,x)\,a(y,y)\,|a(x,y)|^2$, donde la conclusione.

Se $a$ è una forma sesquilineare non negativa (risp. positiva) su $X$, l'applicazione $x\mapsto (a(x,x))^{1/2}$ è una seminorma (risp. una norma) su $X$. Infatti tale applicazione è (evidentemente) positivamente omogenea di grado uno ed è subadditiva perché, in base alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ha
$a(x+y,x+y) = a(x,x) + a(y,y) + 2\mathcal{R}e\, a(x,y) \le a(x,x) + a(y,y) + 2\,|a(x,y)| \le a(x,x) + a(y,y) + 2(a(x,x))^{1/2}(a(y,y))^{1/2} \le$
$\le [(a(x,x))^{1/2} + (a(y,y))^{1/2}]^2$;
inoltre, se $a$ è positiva, tale applicazione si annulla solo in $x=0$.
Diremo che $x\mapsto (a(x,x))^{1/2}$ è la seminorma (risp. norma) associata alla forma sesquilineare non negativa (risp. positiva) $a$. Una seminorma su uno spazio vettoriale $X$ dicesi hilbertiana se essa è associabile a una forma sesquilineare non negativa su $X$, che, in virtù di (1.3), è individuata dalla seminorma stessa. Uno spazio vettoriale $X$ (su $\mathbb{C}$ o su $\mathbb{R}$) su cui è assegnata una forma sesquilineare non negativa $a$ dicesi uno spazio pre-hilbertiano e sarà indicato con $(X,a)$. Uno spazio pre-hilbertiano di Hausdorff e completo (per la struttura uniforme definita dalla norma associata alla forma sesquilineare positiva $a$) dicesi uno spazio di Hilbert (o uno spazio hilbertiano).

PROPOSIZIONE 1.1. Una seminorma $\|\cdot\|$ su uno spazio vettoriale $X$ è hilbertiana se e solo se

(1.5) $$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \tfrac12\|x+y\|^2 + \tfrac12\|x-y\|^2 \qquad \forall x,y\in X.$$

La proprietà (1.5) va sotto il nome di identità del parallelogramma, per il suo evidente significato geometrico nel caso $E=\mathbb{R}^2$.

Dimostrazione. Se $\|\cdot\|$ è una seminorma hilbertiana sussiste (1.5), come si può facilmente verificare. Viceversa, supponiamo che sussista (1.5) e proviamo che, allora, la seminorma $\|\cdot\|$ è hilbertiana. L'identità (1.3) ci suggerisce la considerazione dell'applicazione $a: X\times X\to\mathbb{C}$ definita da

(1.6) $$a(x,y) = \frac14\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\right).$$

Si verifica, utilizzando (1.5), che $a$ è una forma sesquilineare non negativa e che $\|x\|^2 = a(x,x)$. #

Conformemente alla definizione generale di isomorfismo (v. §1, n. 12), un isomorfismo di uno spazio pre-hilbertiano $(X,a)$ in uno spazio pre-hilbertiano $(Y,b)$ è un'applicazione lineare e iniettiva $f: X \to Y$ tale che

$$(1.7) \qquad b(f(x), f(y)) = a(x,y) \qquad \forall\, x,y \in X.$$

PROPOSIZIONE 1.2. Siano $(X,a)$, $(Y,b)$ due spazi pre-hilbertiani e $\|\cdot\|_X$, $\|\cdot\|_Y$ le seminorme associ alle forme sesquilineari $a$ su $X$ e $b$ su $Y$. Un'applicazione lineare e iniettiva $f: X \to$ è un isomorfismo di $(X,a)$ in $(Y,b)$ se (e solo se) $\|f(x)\|_Y = \|x\|_X \quad \forall x \in X$.

Dimostrazione. Sia $f^{(2)}: X \times X \to Y \times Y$ definita ponendo $f^{(2)}(x,y) = (f(x), f(y)) \quad \forall x,y \in X$. Si osservi che (evidentemente) $b \circ f^{(2)}$ è una forma sesquilineare non negativa su $X$ e che (1.7) può mettersi nella forma

$$(1.8) \qquad (b \circ f^{(2)})(x,y) = a(x,y) \qquad \forall\, x,y \in X.$$

D'altra parte la condizione $\|f(x)\|_Y = \|x\|_X \quad \forall x \in X$ può mettersi nella forma

$$(1.9) \qquad (b \circ f^{(2)})(x,x) = a(x,x) \qquad \forall x \in X.$$

Per concludere basta osservare che (1.9) implica (1.8), perché (in virtù di (1.3)) una forma sesquilineare su $X$ è individuata dalla sua restrizione alla diagonale di $X \times X$. #

Se $(X,a)$ è uno spazio pre-hilbertiano, ogni coppia $(i,(X^*,a^*))$, ove $(X^*,a^*)$ è uno spazio pre-hilbertiano completo e $i$ è un isomorfismo (per le strutture di spazio pre-hilbertiano) di $(X,a)$ in $(X^*,a^*)$ tale che $i(X)$ è denso in $(X^*,a^*)$, dicesi un completamento di $(X,a)$.

PROPOSIZIONE 1.3. Ogni spazio pre-hilbertiano ammette dei completamenti. Uno spazio pre-hilbertiano di Hausdorff $(X,a)$ ha un unico completamento $(j,(\hat{X},\hat{a}))$, con $(\hat{X},\hat{a})$ spazio hilbertiano, a meno di un isomorfismo (nel senso che, se $(j_1,(\hat{X}_1,\hat{a}_1))$ e $(j_2,(\hat{X}_2,\hat{a}_2))$ sono due completamenti di $(X,a)$, con $(\hat{X}_1,\hat{a}_1)$ e $(\hat{X}_2,\hat{a}_2)$ spazi di Hilbert, esiste un isomorfismo $g$ di $(\hat{X}_1,\hat{a}_1)$ su $(\hat{X}_2,\hat{a}_2)$ tale che $j_2 = g \circ j_1$).

Dimostrazione. Sia $(X,a)$ uno spazio pre-hilbertiano e sia $(i,(X^*,\|\cdot\|_{X^*}))$ un completamento dello spazio seminormato $(X,\|\cdot\|_X)$, ove $\|\cdot\|_X$ è la seminorma associata alla forma $a$ (v. Teorema 4.1 del §4). Poiché la seminorma $\|\cdot\|_X$ ha la proprietà (1.5), (evidentemente) anche la seminorma $\|\cdot\|_{X^*}$ su $X^*$ ha la proprietà (1.5) e quindi (per la Prop. 1.1) è hilbertiana; sia $a^*$ la forma sesquilineare non negativa su $X$ tale che $a^*(x^*,x^*) = \|x^*\|^2_{X^*} \quad \forall x^* \in X^*$. Ricordando (1.3) è chiaro che la forma $a^*$ su $X^*$ estende la forma sesquilineare non negativa $(i(x), i(y)) \mapsto a(x,y)$ su $i(X)$. Pertanto risulta

$$a^*(i(x), i(y)) = a(x,y) \qquad \forall x,y \in X$$

e quindi $(i,(X^*,a^*))$ è un completamento di $(X,a)$. La seconda parte dell'enunciato segue dal Teorema 4.1 del §4 e dalla Prop. 1.2. #

## 2. PROIEZIONE SU UN SOTTOINSIEME CONVESSO E COMPLETO DI UNO SPAZIO PRE-HILBERTIANO DI HAUSDORFF.

Sia $X=(X,a)$ uno spazio pre-hilbertiano e sia $\|\cdot\|$ la seminorma $x\mapsto(a(x,x))^{1/2}$ associata alla forma sesquilineare non negativa $a$. Se $x,y\in X$, il numero complesso $a(x,y)$ dicesi il <u>prodotto scalare</u> di $x$ e $y$.

Due <u>elementi</u> $x$ e $y$ di $X$ diconsi <u>tra loro ortogonali</u> se risulta $a(x,y)=0$. Più in generale due <u>sottoinsiemi</u> $A$ e $B$ di $X$ si dicono <u>tra loro ortogonali</u> se risulta $a(x,y)=0 \quad \forall (x,y)\in A\times B$.

Poiché $\|x+y\|^2=a(x+y,x+y)=a(x,x)+a(y,y)+2\,\mathrm{Re}\,a(x,y)=\|x\|^2+\|y\|^2+2\,\mathrm{Re}\,a(x,y)$, <u>se $x$ è ortogonale a $y$ si ha</u> $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$ (Teorema di Pitagora).

Se $M$ è un sottospazio vettoriale di $X$, il sottospazio vettoriale $M^0$ di $X$ definito da

$$M^0=\{x\in X : a(x,y)=0 \quad \forall y\in M\}$$

dicesi il <u>sottospazio di $(X,a)$ ortogonale a $M$</u> o (più semplicemente) <u>l'ortogonale di $M$</u> in $(X,a)$. Si pone an

$$M^{00}=\{x\in X : a(x,y)=0 \quad \forall y\in M^0\}.$$

TEOREMA 2.1. <u>Se $K$ è un sottoinsieme convesso e completo di uno spazio pre-hilbertiano di Hausdorff $(X,a)$ [in particolare, un sottoinsieme convesso e chiuso di uno spazio di Hilbert $(X,a)$] Per ogni $x\in X$ esiste uno ed un solo elemento $p_K(x)$ di $K$ tale che</u>

$$\|x-p_K(x)\|\le\|x-y\| \qquad \forall y\in K \tag{2.1}$$

<u>ove $\|\cdot\|$ è la norma associata alla forma sesquilineare positiva $a$.</u>

Il punto $p_K(x)$, verificante (2.1), dicesi la <u>proiezione di $x$ su $K$</u> e l'applicazione $p_K$ $x\mapsto p_K(x)$, di $X$ su $K$, dicesi la <u>proiezione di $X$ su $K$</u>.

Dimostrazione. Sia $l=\inf_{y\in K}\|x-y\|$ e sia $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $K$ tale che

$$l\le\|x-y_n\|\le l+1/n \; .$$

La successione $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy di $(X,a)$, perché (ricordando (1.5) e il fatto che $K$ è convesso) si ha

$$\tfrac12\|y_n-y_m\|^2=\tfrac12\|(y_n-x)-(y_m-x)\|^2=\|y_n-x\|^2+\|y_m-x\|^2-\tfrac12\|y_n+y_m-2x\|^2=$$

$$=\|y_n-x\|^2+\|y_m-x\|^2-2\left\|\frac{y_n+y_m}{2}-x\right\|^2\le\left(l+\frac1n\right)^2+\left(l+\frac1m\right)^2-2l^2=\frac1{n^2}+\frac1{m^2}+2l\left(\frac1n+\frac1m\right).$$

Allora, essendo $K$ completo e $(X,a)$ di Hausdorff, esiste, unico, $y_0\in K$ tale $\lim_{n\to\infty}\|y_n-y_0\|=0$.

Risulta $\|x-y_0\| \le \|x-y\|$ $\forall y \in K$, cioè $\|x-y_0\| = l$. Infatti si ha $\|x-y_0\| \ge l$ perchè $y_0 \in K$; inoltre, essendo $\|x-y_0\| \le \|x-y_n\| + \|y_n - y_0\|$, $\lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = l$, $\lim_{n\to\infty} \|y_n - y_0\| = 0$, risulta $\|x-y_0\| \le l$.

Proviamo, ora, l'unicità di $y_0 \in K$ tale che $\|x-y_0\| = l$. Se $y_1$ e $y_2$ sono elementi di $K$ tali che $\|x-y_1\| = \|x-y_2\| = l$, anche $\frac{y_1+y_2}{2}$ appartiene al convesso $K$ e, in base a (1.5), si ha

$$2\left\|x-\frac{y_1+y_2}{2}\right\|^2 = 2\left\|\frac{2x-y_1-y_2}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\|(x-y_1)+(x-y_2)\|^2 = \|x-y_1\|^2 + \|x-y_2\|^2 - \frac{1}{2}\|y_2-y_1\|^2 = 2l^2 - \frac{1}{2}\|y_2-y_1\|^2;$$

allora, se fosse $y_1 \ne y_2$, si avrebbe

$$\left\|x-\frac{y_1+y_2}{2}\right\| < l;$$

il che è assurdo perchè $\frac{y_1+y_2}{2} \in K$ e $l = \inf_{y\in K} \|x-y\|$. #

OSSERVAZIONE 2.1. <u>La proiezione $p_K(x)$ di $x$ su $K$ è anche caratterizzata dal fatto che</u> $p_K(x) \in K$ e ch[e]

$$(2.2) \qquad \mathrm{Re}\, a(x-p_K(x), y-p_K(x)) \le 0 \quad \forall y \in K.$$

Dimostrazione. Da (2.1) e dal fatto che $p_K(x) \in K$ segue che la funzione $y \mapsto \|x-y\|$, di $K$ in $\mathbb{R}$, ha minimo in $p_K(x)$. Ciò implica che, per ogni $y \in K$, la funzione $f_y : t \mapsto \|x-(p_K(x)+t(y-p_K(x)))\|^2$, dell'intervallo $[0,1]$ in $\mathbb{R}$ ha minimo nello zero, donde $f_y'(0) \ge 0$ $\forall y \in K$; pertanto sussiste (2.2), perchè, avendosi $f_y(t) = \|x-p_K(x)\|^2 + t^2\|y-p_K(x)\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\, a(x-p_K(x), y-p_K(x))$, risulta $f_y'(0) = -2\mathrm{Re}\,(x-p_K(x), y-p_K(x))$.

Per convincersi che (2.2) implica (2.1) basta osservare che $\|x-y\|^2 = \|(x-p_K(x))-(y-p_K(x))\|^2 = a((x-p_K(x))-(y-p_K(x)), (x-p_K(x))-(y-p_K(x))) = \|x-p_K(x)\|^2 + \|y-p_K(x)\|^2 - 2\mathrm{Re}\, a(x-p_K(x), y-p_K(x))$. #

OSSERVAZIONE 2.2. <u>Se $M$ è un sottospazio vettoriale completo di uno spazio pre-hilbertiano di Hausdorff $(X, a)$ e $x \in X$, la proiezione</u>(*) <u>$p_M(x)$ di $x$ su $M$ è caratterizzata dal fatto che $p_M(x) \in M$ e che $x-p_M(x)$ è ortogonale a $M$.</u>

Dimostrazione. In virtù dell'Osservazione precedente risulta $\mathrm{Re}\, a(x-p_M(x), y-p_M(x)) \le 0$ $\forall y \in M$, donde (ricordando che $M$ è uno spazio vettoriale) $\mathrm{Re}\, a(x-p_M(x), y) \le 0$ $\forall y \in M$, donde ancora $\mathrm{Re}\, a(x-p_M(x), \lambda y) \le 0$ $\forall y \in M$ e $\forall \lambda \in \mathbb{C}$; ponendo, in quest'ultima, $\lambda = a(x-p_M(x), y)$, si ha $|a(x-p_M(x), y)|^2 \le 0$ $\forall y \in M$, da cui $a(x-p_M(x), y) = 0$ $\forall y \in M$; dunque $x-p_M(x)$ è ortogonale a $M$. Viceversa, se $y_0 \in M$ è tale che $x-y_0$ è ortogonale a $M$, si ha $a(x-y_0, y-y_0) = 0$ $\forall y \in M$ e quindi, per l'Osservazione 2.1, $y_0 = p_M(x)$. #

OSSERVAZIONE 2.3. <u>Sia $M$ un sottospazio vettoriale completo di uno spazio pre-hilbertiano di Hausdorff $(X, a)$. La proiezione $p_M : X \to M$ è un'applicazione lineare e continua e risulta $\|p_M\| = 1$, ove $\|p_M\| = \sup_{\|x\|=1} \|p_M(x)\|$; inoltre risulta</u>

$$\mathrm{Ker}\, p_M = M^0.$$

---

(*) certamente esistente e unica, in base al Teorema 2.1, perchè $M$ (in quanto spazio vettoriale) è convess[o]

Dimostrazione. Dall'Osservazione 2.2 segue immediatamente che $p_M : X \to M$ è lineare. Ricordando che $x - p_M(x)$ è ortogonale a $M$ e che $p_M(x) \in M$, si ha $\|x\|^2 = \|x - p_M(x) + p_M(x)\|^2 = \|x - p_M(x)\|^2 + \|p_M(x)\|^2$ e quindi risulta $\|p_M(x)\| \leq \|x\|$ $\forall x \in X$ donde la continuità di $p_M : X \to M$ (in virtù della Prop. 4.2 del §4).
Inoltre, da $\|p_M(x)\| \leq \|x\|$ $\forall x \in X$ e dal fatto che $p_M(x) = x$ $\forall x \in M$ segue $\sup_{\|x\|=1} \|p_M(x)\| = 1$.
Infine, dall'Osservazione 2.2 discende subito che $M^0$ è il nucleo di $p_M$. #

PROPOSIZIONE 2.1. <u>Se $M$ è un sottospazio vettoriale completo di uno spazio pre-hilbertiano di Hausdorff $(X,a)$ [in particolare, un sottospazio vettoriale chiuso di uno spazio di Hilbert $X$], allora $M^0$ è chiuso, $M^{00} = M$ e $X$ è somma diretta topologica di $M$ e $M^0$</u> (v. §4, n.1).
$M^0$ dicesi anche il <u>supplementare ortogonale di $M$</u>.

Dimostrazione. Dalla continuità di $p_M : X \to M$ e dal fatto che $\operatorname{Ker} p_M = M^0$ (v. Osservazione 2.3) segue che $M^0$ è chiuso. Risulta $X = M + M^0$ perché, per ogni $x \in X$ si ha (v. Osservazione 2.

$$x = p_M(x) + (x - p_M(x)), \quad \text{con } p_M(x) \in M, \quad x - p_M(x) \in M^0;$$

essendo, poi, $M \cap M^0 = \{0\}$, $X$ è somma diretta di $M$ e del suo ortogonale $M^0$.
Anzi, la somma diretta è topologica, perché sono continue (per l'Osservazione 2.3) le applicazioni $p_M : X \to M$ e $i - p_M : X \to M^0$, ove $i : X \to X$ è l'identità.
Proviamo, infine, che $M^{00} = M$. Evidentemente $M^{00} \supseteq M$. E' anche $M^{00} \subseteq M$ perché, se $x \in M$ si ha $a(x, x - p_M(x)) = 0$ [essendo $x - p_M(x) \in M^0$] e $a(p_M(x), x - p_M(x)) = 0$, donde $\|x - p_M(x)\|^2 = a(x - p_M(x), x - p_M(x)) = a(x, x - p_M(x)) - a(p_M(x), x - p_M(x)) = 0$, cioè $x = p_M(x)$, cioè $x \in M$. #

OSSERVAZIONE 2.4. <u>Se $M$ è un sottospazio vettoriale di uno spazio pre-hilbertiano di Hausdorff $(X,a)$ si</u>

$$M^{00} = \overline{M}.$$

Dimostrazione. Poiché (per la Prop. 2.1) $\overline{M}^{00} = \overline{M}$, basta provare che $\overline{M}^0 = M^0$, cioè che $M^0 \subseteq \overline{M}^0$. Ciò è vero perché, avendosi (per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) $|a(x,y)| \leq \|x\| \|y\|$, da $a(x,y) = 0$ $\forall y \in M$ segue (evidentemente) $a(x,y) = 0$ $\forall y \in \overline{M}$. #

## 3. DUALE DI UNO SPAZIO DI HILBERT.

Sia $X=(X,a)$ uno spazio di Hilbert e sia $\|\cdot\|$ la norma associata alla forma sesquilineare positiva $a$.

Sappiamo (v. §5, n.1 e §6, n.5) che il duale forte $X'_b$ di $X$ è uno (spazio localmente convesso) normab. e completo e che una norma definente la topologia forte su $X'$ è la seguente

(3.1) $$x' \mapsto \|x'\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x,x'\rangle| , \quad \text{ove } \langle x,x'\rangle = x'(x);$$

con il simbolo $X'_b$ intenderemo, ora, riferirci proprio allo spazio $X'$ dotato di questa norma.

Per ogni $x\in X$, indicheremo con $j(x)$ la forma lineare e continua(*) su $X$ definita da

(3.2) $$\langle y, j(x)\rangle = a(y,x) ,$$

ove $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota la dualità naturale tra $X$ e $X'$.

TEOREMA 3.1. Sia $X=(X,a)$ uno spazio di Hilbert. L'applicazione $j: x\mapsto j(x)$, ove $j(x)$ è l'elemento di $X'$ definito da (3.2), è una isometria (semilineare) di $X$ su $X'_b$ (in quanto spazi normati).

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $j:X\to X'$ è suriettiva e che risulta $\|j(x)\|=\|x\|$ $\forall x\in X$; di conseguenza (v. §2, n.1) $j:X\to X'$ è iniettiva.

Ricordando che (per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) si ha $|a(y,x)|\leq\|x\|\|y\|$ $\forall x,y\in X$, si ha $\|j(x)\| = \sup_{\|y\|\leq 1}|\langle y,j(x)\rangle| = \sup_{\|y\|\leq 1}|a(y,x)|\leq\|x\|$; ne segue $\|j(x)\|=\|x\|$ osservando che $a\left(\frac{x}{\|x\|},x\right)=\|x\|$. Proviamo che $j:X\to X'$ è suriettiva, cioè che per ogni $x'\in X'$ esiste $x\in X$ tale che $j(x)=x'$, ossia tale che $a(y,x)=\langle y,x'\rangle$ $\forall y\in X$. Sia dunque $x'\in X'$.

Dalla continuità di $x'$ segue che $\ker x'$ è un iperpiano chiuso di $X$; perciò (v. Prop. 2.1 e Prop. 5.1 del §3) $E=\ker x'\oplus(\ker x')^\circ$, ove $(\ker x')^\circ$ ha dimensione 1 ed è ortogonale a $\ker x'$ e quindi esiste $x_0\in(\ker x')^\circ$ tale che $X=\ker x'\oplus \mathbb{C}x_0$. Si osservi che $x'$ e $j(x_0)$ hanno lo stesso nucleo, perché $\ker j(x_0)=\{x\in X: a(x,x_0)=0\}=\{x_0\}^\circ=(\mathbb{C}x_0)^\circ=\ker x'$; pertanto (v. Prop. 5.2 del §3) esiste $\lambda\in\mathbb{C}$ tale che $x'=\lambda j(x_0)$, donde (per la semilinearità di $j$) $x'=j(\bar\lambda x_0)$. #

COROLLARIO 1. Sia $X=(X,a)$ uno spazio di Hilbert. La norma (3.1) su $X'$ è hilbertiana e, detta $a'$ la forma sesquilineare su $X'$ alla quale la norma (3.1) è associata, si ha, per ogni $x,y\in X$

(3.3) $$a'(j(x),j(y)) = \overline{a(x,y)} = a(y,x)$$

---

(*) La forma lineare $j(x): y\mapsto a(y,x)$ su $X$ è continua, perché (in base alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) si ha $|a(y,x)|\leq\|x\|\|y\|$.

Dimostrazione. Ricordando il legame (1.6) tra una forma sesquilineare positiva e la norma ad essa associata, da $\|j(x)\|=\|x\|$ e dal fatto che $j: X \to X'$ è semilineare segue che

$$\begin{aligned} a'(j(x),j(y)) &= \tfrac{1}{4}\left(\|j(x)+j(y)\|^2-\|j(x)-j(y)\|^2\right)+\tfrac{i}{4}\left(\|j(x)+i\,j(y)\|^2-\|j(x)-i\,j(y)\|^2\right) = \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\|j(x+y)\|^2-\|j(x-y)\|^2\right)+\tfrac{i}{4}\left(\|j(x-iy)\|^2-\|j(x+iy)\|^2\right) = \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right)-\tfrac{i}{4}\left(\|x+iy\|^2-\|x-iy\|^2\right) = \overline{a(x,y)} = a(y,x). \quad \# \end{aligned}$$

COROLLARIO 2. <u>Ogni spazio di Hilbert è riflessivo</u> (in quanto spazio localmente convesso).
Dimostrazione. Sia $(X,a)$ uno spazio di Hilbert. Per il Corollario 1, la topologia forte su $X'$ deriva dalla forma sesquilineare positiva $a'$ su $X'$ definita da (3.3).
Sia $j$ l'isometria semilineare dello spazio normato $X$ sullo spazio normato $X'_b$ e sia $k$ l'isometria semilineare dello spazio normato $X'_b$ sullo spazio normato $(X'_b)'_b$; esse sono definite da (v. Teorema 3.1)

$$\langle y, j(x)\rangle = a(y,x), \qquad \langle y', k(x')\rangle = a'(y',x').$$

Lo spazio hilbertiano $(X,a)$ è riflessivo, perchè, come ora verificheremo, l'isometria lineare $k\circ j$ dello spazio normato $X$ sullo spazio normato $(X'_b)'_b$ coincide proprio con la mappa di valutazione $x \mapsto \tilde{x}$, di $X$ su $(X'_b)'$, ove $\tilde{x}(x') = \langle x, x'\rangle$ (v. §6, n. 4).
Si tratta di verificare che $(k\circ j)(x) = \tilde{x}$, cioè che

$$\langle x', (k\circ j)(x)\rangle = \langle x, x'\rangle$$

In effetti, ricordando (3.3), si ha

$$\langle x', (k\circ j)(x)\rangle = \langle x', k(j(x))\rangle = a'(x', j(x)) = a(x, j^{-1}(x')) = \langle x, j(j^{-1}(x'))\rangle = \langle x, x'\rangle. \quad \#$$

TEOREMA 3.2 (noto come <u>Lemma di Lax-Milgram</u>). <u>Siano $(X,a)$ uno spazio di Hilbert e $b$ una forma sesquilineare continua (*) su $(X,a)$ tale che</u>

$$|b(x,x)| \geq k\, a(x,x) \qquad \forall x \in X \tag{3.4}$$

<u>ove $k$ è una costante positiva. Per ogni $x' \in X'$ esistono (univocamente determinati) $x_1 \in X$ e $x_2 \in X$ tali che</u>

$$\langle y, x'\rangle = b(y, x_1) = \overline{b(x_2, y)} \qquad \forall y \in X.$$

Dimostrazione. Proviamo che, per ogni $x' \in X'$ esiste (univocamente determinato) $x_2 \in X$ tale che

---

(*) La forma sesquilineare $b: X\times X \to \mathbb{C}$ è continua se e solo se esiste una costante $c>0$ tale che

$$|b(x,y)| \leq c\,\|x\|\,\|y\| \qquad \forall x,y \in X$$

ove $\|\cdot\|$ è la norma associata alla forma sesquilineare positiva $a$. Questo risultato, che abbiamo dimostrato nel caso che $b$ sia bilineare (v. Prop. 5.2 del §5), evidentemente sussiste anche se $b$ è sesquilineare.

(3.5) $$\langle y, x'\rangle = \overline{b(x_2, y)} \qquad \forall y \in X.$$

Dopodiché, applicando questo risultato alla forma sesquilineare $(x,y) \mapsto \overline{b(y,x)}$, si ha che per ogni $x' \in X'$ esiste, univocamente determinato, $x_1 \in X$ tale che $\langle y, x'\rangle = b(y, x_1)$ $\forall y \in X$.

Per ogni $y \in X$ l'applicazione $x \mapsto b(x,y)$ è una forma lineare e continua su $X$ e quindi (per il Teorema 2.1) esiste un elemento $\varphi(y)$ di $X$ tale che

(3.6) $$b(x,y) = a(x, \varphi(y)) \qquad \forall y \in X;$$

detta $j$ la isometria semilineare dello spazio normato $X$ sullo spazio normato $X'_b$ definita da (3.2), si
$$a(\varphi(y), x) = \langle \varphi(y), j(x)\rangle \qquad \forall y \in X,$$
donde $a(x, \varphi(y)) = \overline{\langle \varphi(y), j(x)\rangle}$ $\forall y \in X$. Pertanto (3.5) equivale a

(3.7) $$\langle y, x'\rangle = \langle \varphi(y), j(x_2)\rangle \qquad \forall y \in X.$$

Dal Teorema 9.1 del §6, ove si assuma $L = X_1 = X_2 = X$, $u_2 = \varphi$ e $u_1 =$ identità di $X$ in $X$, segue (ricordando che $j: X \to X'$ è suriettiva) che per ogni $x' \in X'$ esiste $x_2 \in X$ verificante (3.7) se e solo se esiste una costante $c > 0$ tale che

(3.8) $$\|y\| \le c\,\|\varphi(y)\| \qquad \forall y \in X,$$ ove $\|\cdot\|$ è la norma associata alla forma $a$.

Per concludere basta osservare che (3.4) implica (3.8), perché se vale (3.4) si ha (ricordando (3.6))
$$\|y\|^2 \le \frac{1}{k}\,|b(y,y)| = \frac{1}{k}\,|a(y, \varphi(y))| \le \frac{1}{k}\,\|y\|\,\|\varphi(y)\|. \qquad \#$$

## 4. CENNI SULLA SOMMABILITÀ IN UNO SPAZIO VETTORIALE TOPOLOGICO.

Sia $E$ uno spazio vettoriale topologico di Hausdorff e sia $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ una famiglia in $E$.
Detto $\mathcal{F}$ l'insieme delle parti di $A$ ordinato per inclusione, consideriamo la rete $(s_F)_{F\in\mathcal{F}}$ in $E$, ove
$$s_F = \sum_{\alpha\in F} x_\alpha$$
La famiglia $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ dicesi sommabile se la rete $(s_F)_{F\in\mathcal{F}}$ converge in $E$, cioè (v. §1, n.6) se esiste $x\in E$ tale che per ogni intorno $U$ di $x$ in $E$ esiste $\bar F\in\mathcal{F}$ tale che $\mathcal{F}\ni F\supseteq \bar F \Rightarrow s_F\in x+U$; in tal caso si pone
$$x=\sum_{\alpha\in A} x_\alpha$$
e $x$ dicesi la somma della famiglia $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$.
È immediato constatare che una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E$ è sommabile se e solo se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ad essa associata è incondizionatamente convergente [cioè se, per ogni biiezione $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ è convergente] in $E$.

OSSERVAZIONE 4.1. Se $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ è sommabile, allora per ogni intorno $U$ dell'origine in $E$ l'insieme $\{\alpha\in A : x_\alpha\notin U\}$ è finito. Di conseguenza, se $E$ è metrizzabile e $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ è sommabile, allora l'insieme $\{\alpha\in A: x_\alpha\neq 0\}$ è al più numerabile.

Dimostrazione. Dato l'intorno dell'origine $U$ in $E$ sia $V$ un intorno dell'origine in $E$ tale che $V+V\subseteq U$. Se $x=\sum_{\alpha\in A} x_\alpha$, esiste $\bar F\in\mathcal{F}$ tale che $\mathcal{F}\ni F\supseteq\bar F\Rightarrow s_F\in x+V$. Allora per ogni $G\in\mathcal{F}$ tale che $G\cap\bar F=\emptyset$ si ha $s_{G\cup\bar F}\in x+V$, donde $s_G=s_{G\cup\bar F}-s_{\bar F}\in(x+V)-(x+V)\subseteq V+V\subseteq U$; pertanto a $E\setminus U$ appartengono al più gli elementi dell'insieme finito $\{x_\alpha : \alpha\in\bar F\}$ e quindi $\{\alpha\in A: x_\alpha\notin U\}$ è finito.
Sia ora $E$ metrizzabile e sia $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base di intorni dell'origine in $E$. Posto, per ogni $n\in\mathbb{N}$, $A_n=\{\alpha\in A: x_\alpha\notin V_n\}$, risulta $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n=\{\alpha\in A: x_\alpha\neq 0\}$: infatti $x_\alpha\neq 0\Rightarrow x_\alpha\notin V_{\bar n}$ per qualche $\bar n\in\mathbb{N}\Rightarrow x_\alpha\in A_{\bar n}\Rightarrow x_\alpha\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ e, viceversa, $x_\alpha\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Rightarrow x_\alpha\in A_{\bar n}$ per qualche $\bar n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow x_\alpha\notin V_{\bar n}\Rightarrow x_\alpha\neq 0$. Ne segue, essendo $A_n$ finito (come s'è appena visto), che l'insieme $\{\alpha\in A: x_\alpha\neq 0\}$ è al più numerabile. #

PROPOSIZIONE 4.1. Sia $(E,\|\cdot\|)$ uno spazio di Banach. Una famiglia $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in $E$ è sommabile se e solo se ogni numero reale $\varepsilon>0$ esiste $\bar F\in\mathcal{F}$ tale che
$$(4.1)\qquad F\in\mathcal{F},\ F\cap\bar F\neq\emptyset \Rightarrow \|s_F\|\leq\varepsilon\ ;$$
di conseguenza $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ è sommabile se $(\|x_\alpha\|)_{\alpha\in A}$ è sommabile in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Sia $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ sommabile e sia $x=\sum_{\alpha\in A} x_\alpha$. Allora per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\bar F\in\mathcal{F}$ tale che
$$F\in\mathcal{F},\ F\supseteq\bar F\Rightarrow \|x-s_F\|\leq\varepsilon/2\,.$$

Pertanto, se $F \in \mathcal{F}$ e $F \cap \bar{F} = \emptyset$, si ha

$$\|s_F\| = \|s_{F\cup\bar{F}} - s_{\bar{F}}\| \le \|s_{F\cup\bar{F}} - x\| + \|x - s_{\bar{F}}\| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

Viceversa, supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $\bar{F} \in \mathcal{F}$ tale che valga (4.1) e proviamo che $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ è sommabile. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $F_n \in \mathcal{F}$ tale che

(4.2) $$F \in \mathcal{F},\ F \cap F_n = \emptyset \Rightarrow \|s_F\| \le 1/n .$$

Possiamo supporre $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ crescente (sostituendo, eventualmente, $F_n$ con $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$).
La successione $(s_{F_n})_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $E$ perchè, se $m > n$, si ha $\|s_{F_m} - s_{F_n}\| = \|s_{F_m \setminus F_n}\| \le 1/n$ [in quanto $(F_m \setminus F_n) \cap F_n = \emptyset$] e quindi converge in $E$; sia $x \in E$ tale che $\lim_{n\to\infty} \|s_{F_n} - x\| = 0$.
Se $F \in \mathcal{F}$ e $F \supseteq F$ si ha, per (4.2),

$$\|x - s_F\| \le \|s - s_{F_n}\| + \|s_{F_n} - s_F\| = \|x - s_{F_n}\| + \|s_{F\setminus F_n}\| \le \|x - s_{F_n}\| + 1/n ;$$

dunque $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ è sommabile e $x$ è la sua somma.
Supponiamo, ora, che $(\|x_\alpha\|)_{\alpha\in A}$ sia sommabile. Allora (applicando quanto è stato appena dimostrato al caso che lo spazio di Banach sia $\mathbb{R}$) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{F} \in \mathcal{F}$ tale che

$$F \in \mathcal{F},\ F \cap \bar{F} = \emptyset \Rightarrow \sum_{\alpha\in F} \|x_\alpha\| \le \varepsilon ;$$

ne segue che, se $F \in \mathcal{F}$ e $F \cap \bar{F} = \emptyset$, si ha $\|s_F\| = \|\sum_{\alpha\in A} x_\alpha\| \le \sum_{\alpha\in A} \|x_\alpha\| \le \varepsilon$; dunque $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ è sommabile. #

OSSERVAZIONE. Nella Proposizione 4.1, la condizione (4.1) è necessaria per la sommabilità di $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ anche se $(E, \|\cdot\|)$ non è completo (come risulta dalla dimostrazione); la completezza di $(E, \|\cdot\|)$ serve solo per dimostrare la sufficienza di (4.1).

## 5. SOMMABILITÀ IN UNO SPAZIO DI HILBERT. BASI ORTONORMALI.

D'ora in avanti, $E$ sarà uno spazio pre-hilbertiano di Hausdorff e, per ogni $x, y \in E$, indicheremo con $(x|y)$ il loro prodotto scalare in $E$. Inoltre sarà $\|x\|^2 = (x|x)$.

Una <u>famiglia</u> $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in $E$ dicesi <u>ortogonale</u> se, per ogni $\alpha, \beta \in A$ con $\alpha \neq \beta$, risulta $(x_\alpha|x_\beta) = 0$; una <u>famiglia</u> $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in $E$ dicesi <u>ortonormale</u> se essa è ortogonale e risulta $\|x_\alpha\| = 1 \quad \forall \alpha \in A$.

PROPOSIZIONE 5.1. <u>Se una famiglia ortogonale $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in $E$ è sommabile, allora $(\|x_\alpha\|)_{\alpha\in A}$ è sommabile in $\mathbb{R}$ e risulta</u>

$$\|\sum_{\alpha\in A} x_\alpha\|^2 = \sum_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|^2. \tag{5.1}$$

<u>Se $E$ è di Hilbert, una famiglia ortogonale $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ in $E$ è sommabile se e solo se $(\|x_\alpha\|)_{\alpha\in A}$ è sommabile.</u>

Dimostrazione. Se $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ è ortogonale, per ogni parte finita $F$ di $A$ si ha $\sum_{\alpha\in F}\|x_\alpha\|^2 = \|\sum_{\alpha\in A} x_\alpha\|^2$ e quindi (per la Prop. 4.1 e l'Osservazione successiva) dalla sommabilità di $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ segue quella di $(\|x_\alpha\|)_{\alpha\in A}$. Se $x = \sum_{\alpha\in A} x_\alpha$, per ogni $y \in F$ ris.

$$(x|y) = \sum_{\alpha\in A}(x_\alpha|y) \quad ; \tag{5.2}$$

per convincersene basta osservare che (per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) si ha, $\forall F \in \mathcal{F}$,

$$\left|(x|y) - \sum_{\alpha\in F}(x_\alpha|y)\right| = \left|(x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha, y)\right| \leq \|x - \sum_{\alpha\in F} x_\alpha\|\,\|y\| .$$

Di conseguenza, nell'ipotesi che $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ sia ortogonale e sommabile, sussiste (5.1) perché

$$\|x\|^2 = (x|x) = \left(\sum_{\alpha\in A} x_\alpha \middle| x\right) = \sum_{\alpha\in A}(x_\alpha|x) = \sum_{\alpha\in A}\overline{(x|x_\alpha)} = \sum_{\alpha\in A}\overline{\left(\sum_{\beta\in A} x_\beta \middle| x_\alpha\right)} = \sum_{\alpha\in A}\left(\overline{\sum_{\beta\in A}(x_\beta|x_\alpha)}\right) = \sum_{\alpha\in A}\left(\sum_{\beta\in A}(x_\alpha|x_\beta)\right)$$
$$= \sum_{\alpha\in A}(x_\alpha, x_\alpha) = \sum_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|^2 .$$

La seconda parte della Prop. 5.1 è conseguenza della prima parte e della Prop. 4.1. #

PROPOSIZIONE 5.2. <u>Sia $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ una famiglia ortonormale in $E$.</u> Per ogni $x \in E$ si ha

$$\sum_{\alpha\in A}|(x|e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2 \qquad (\text{disuguaglianza di Bessel}) \tag{5.3}$$

<u>e quindi</u> (v. Osservazione 4.1) <u>l'insieme $\{\alpha\in A : (x|e_\alpha) \neq 0\}$ è al più numerabile.</u>

<u>Se $E$ è hilbertiano, per ogni $x \in E$ la famiglia $((x|e_\alpha)e_\alpha)_{\alpha\in A}$ è sommabile.</u>

Dimostrazione. Sussiste (5.3) perché, per ogni parte finita $F$ di $A$, risulta $\sum_{\alpha\in F}|(x|e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$; infatti è immediato verificare (sfruttando il fatto che $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ è ortonormale) che

$$\|x - \sum_{\alpha\in F}(x|e_\alpha)e_\alpha\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\alpha\in F}|(x|e_\alpha)|^2 .$$

Poichè $\|(x|e_\alpha)e_\alpha\|^2 = |(x|e_\alpha)|^2$, da (5.3) segue che la famiglia $(\|(x|e_\alpha)e_\alpha\|^2)_{\alpha\in A}$ è sommabile. Di conseguenza, se $E$ è uno spazio di Hilbert, è sommabile la famiglia $((x|e_\alpha)e_\alpha)_{\alpha\in A}$ in virtù della Prop. 4.1. #

OSSERVAZIONE. Sia $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ una famiglia ortonormale in $E$ e sia $x\in E$. Se $x=\sum_{\alpha\in A}\lambda_\alpha e_\alpha$, con $\lambda_\alpha\in\mathbb{C}$ risulta $\lambda_\alpha=(x|e_\alpha)$ $\forall\alpha\in A$.

Dimostrazione. Essendo $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ ortonormale, per ogni parte finita $F$ di $A$ si ha $\lambda_\alpha=\sum_{\beta\in F}\lambda_\beta(e_\beta, e_\alpha)$. Inoltre, per (5.2), si ha

$$(x|e_\alpha)=\sum_{\beta\in A}\lambda_\beta(e_\beta|e_\alpha)$$

e quindi per ogni $\varepsilon>0$ esiste una parte finita $\bar{F}$ di $A$ tale che, per ogni parte finita $F$ di $A$ contenente $\bar{F}$, risulta $|(x|e_\alpha)-\sum_{\beta\in F}\lambda_\beta(e_\beta|e_\alpha)|\le\varepsilon$. Ne segue che $|(x|e_\alpha)-\sum_{\beta\in\bar{F}\cup\{\alpha\}}\lambda_\beta(e_\beta|e_\alpha)|=$ $=|(x|e_\alpha)-\lambda_\alpha|\le\varepsilon$, donde $(x|e_\alpha)=\lambda_\alpha$, data l'arbitrarietà di $\varepsilon>0$. #

Sia $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ una famiglia ortonormale in uno spazio di Hilbert $E$. Se $x\in E$, i numeri

$$(x|e_\alpha) \qquad ,(\alpha\in A),$$

diconsi i <u>coefficienti di Fourier di $x$</u> rispetto alla famiglia ortonormale $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Si ricordi (v. Prop. 5.2) che l'insieme $\{\alpha\in A : (x|e_\alpha)\neq 0\}$ è al più numerabile e che la famiglia $((x|e_\alpha)e_\alpha)_{\alpha\in A}$ è sommabile. Detto $V$ il sottospazio vettoriale di $E$ generato dalla famiglia $(x_\alpha)_{\alpha\in}$, il punto $y=\sum_{\alpha\in A}(x|e_\alpha)e_\alpha$ appartiene alla chiusura $\overline{V}$ di $V$ in $E$ (perchè $y$ è limite in $E$ di una rete in $V$). Anzi risulta

$$\text{(5.4)} \qquad \sum_{\alpha\in A}(x|e_\alpha)e_\alpha = p_{\overline{V}}(x);$$

infatti $x-y$ è ortogonale a ogni elemento $\sum_{\beta\in F}\lambda_\beta e_\beta$, ($F$ parte finita di $A$, $\lambda_\beta\in\mathbb{C}$) di $V$, perchè (ricordando (5.2)) si h

$$(x-y|\sum_{\beta\in F}\lambda_\beta e_\beta)=(x-\sum_{\alpha\in A}(x|e_\alpha)e_\alpha)|\sum_{\beta\in F}\lambda_\beta e_\beta)=\sum_{\beta\in F}\bar{\lambda}_\beta(x|e_\beta)-\sum_{\beta\in F}\Big(\sum_{\alpha\in A}(x|e_\alpha)e_\alpha|e_\beta\Big)=\sum_{\beta\in F}\bar{\lambda}_\beta(x|e_\beta)-\sum_{\beta\in F}\bar{\lambda}_\beta(x|e_\beta)=$$

e quindi (per la continuità della forma sesquilineare $(x,y)\mapsto(x|y)$) $x-y$ è ortogonale a $\overline{V}$, cioè (per l'Osservazione 2.2) $y=p_{\overline{V}}(x)$.

Dal fatto che $y=p_{\overline{V}}(x)$ segue che, se $V$ è denso in $E$, per ogni $x\in E$ si ha $x=\sum_{\alpha\in A}(x|e_\alpha)e_\alpha$.

La famiglia ortonormale $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ dicesi <u>totale</u>(*) se il sottospazio vettoriale $V$ di $E$ generato da $(e_\alpha)_\alpha$ è denso in $E$.

Si osservi che la famiglia ortonormale $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ è totale se e solo se da $(x|e_\alpha)=0$ $\forall\alpha\in A$ segue $x=$

Infatti (per (5.4)) risulta $(x|e_\alpha)=0$ $\forall\alpha\in A$ se e solo se $p_{\overline{V}}(x)=0$, cioè (per l'Osservazione 2.2)

(*) Più in generale, un sottoinsieme di uno spazio vettoriale topologico $E$ dicesi totale se il sottospazio vettoriale di $E$ da esso generato è denso in $E$.

se e solo se $x \in (\overline{V})^{\circ}$ e quindi l'implicazione $(x|e_\alpha)=0 \ \forall \alpha\in A \Rightarrow x=0$ equivale all'implicazione $x\in(\overline{V})^{\circ} \Rightarrow x=0$, cioè (per la Prop. 2.1) alla condizione $(\overline{V})^{\circ\circ}=E$, ossia alla condizione $\overline{V}=E$ (perchè $(\overline{V})^{\circ\circ}=\overline{V}$).

Pertanto, ricordando anche la Prop. 5.1, sussiste la seguente

PROPOSIZIONE 5.3. Se $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ è una famiglia ortonormale in uno spazio di Hilbert $E$, le seguenti affermazioni sono equivalenti.

(a) La famiglia $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ è totale;

(b) Per ogni $x\in E$ la famiglia $((x|e_\alpha)e_\alpha)_{\alpha\in A}$ è sommabile e risulta

$$x=\sum_{\alpha\in A}(x|e_\alpha)e_\alpha \quad ;$$

(c) Per ogni $x\in E$ la famiglia $(|(x|e_\alpha)|)_{\alpha\in A}$ è sommabile e risulta

$$\|x\|^2=\sum_{\alpha\in A}|(x|e_\alpha)|^2 \quad (\text{relazione di Parseval});$$

(d) Se $x\in E$ e $(x|e_\alpha)=0 \ \forall\alpha\in A$, allora $x=0$.

OSSERVAZIONE. L'equivalenza delle affermazioni (a), (b) e (c), nella Prop. 5.3, sussiste anche se lo spazio pre-hilbertiano di Hausdorff $E$ non è completo. Il lettore può convincersene senza difficoltà utilizzando la Prop. 1.3.

Una famiglia ortonormale totale in uno spazio pre-hilbertiano $E$ si dice una base ortonormale di $E$.

PROPOSIZIONE 5.4. Se $(x_\beta)_{\beta\in B}$ è una famiglia ortonormale in uno spazio hilbertiano $E$ esiste una base ortonormale $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ di $E$ tale che $\{x_\beta:\beta\in B\}\subseteq\{e_\alpha:\alpha\in A\}$.

Dimostrazione. Diremo che una parte $L$ di $E$ è ortonormale se, $\forall x,y\in E$, si ha $(x|x)=1$ e $(x|y)=0$ quando $x\neq y$. Sia $\mathcal{O}$ l'insieme delle parti ortonormali di $E$ ordinato per inclusione. Poichè (evidentemente) ogni parte totalmente limitata di $\mathcal{O}$ ammette estremo superiore, esiste in $\mathcal{O}$ (per il Lemma di Zorn) un elemento massimale $L$ contenente $\{x_\beta:\beta\in B\}$. Per concludere basta provare che la famiglia definita dall'identità di $L$ su $L$ è totale. Se ciò non fosse vero esisterebbe (per la Prop. 5.3) un elemento $x\in E$ diverso dall'origine e ortogonale a $L$; poichè si può supporre $(x|x)=1$, $L\cup\{x\}$ sarebbe una parte di $E$ ortonormale, distinta da $L$ e contenente $L$, in contraddizione con la definizione di $L$. #

Applicando la Prop. 5.4 al caso $B=\emptyset$, si ha il seguente

COROLLARIO. *Ogni spazio hilbertiano ammette una base ortonormale.*

PROPOSIZIONE 5.5. *Siano $E$ uno spazio pre-hilbertiano di Hausdorff e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia libera (v. §3, n. 4) in $E$. Esiste una e una sola famiglia ortonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E$ tale che $(x_n|e_n)>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$ e che, per ogni intero $k>0$ il sottospazio vettoriale di $E$ generato da $e_1,..,e_k$ coincide con quello generato da $(x_1,..,x_k)$.*

Dimostrazione. Sia $V_n$ il sottospazio vettoriale di $E$ (di dimensione $n$) generato da $x_1,..,x_n$. $V_n$ è un sottospazio completo di $E$ perché ha dimensione finita (v. Teorema 3.1 del §4) e quindi, per il Teorema 2.1, si può considerare la proiezione $p_{V_n}$ di $E$ su $V_n$. Poniamo $y_1=x_1$ e, per ogni $n$

$$y_{n+1}=x_{n+1}-p_{V_n}(x_{n+1}).$$

Per l'Osservazione 2.2, $y_{n+1}$ è ortogonale a $V_n$ e quindi (v. Prop. 2.1) $\mathbb{C}y_{n+1}$ è il supplementare ortogonale di $V_n$ in $V_{n+1}$. Ne segue che se esiste una famiglia ortonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con le proprietà espresse nella Prop. 5.5, per ogni $n\in\mathbb{N}$ si ha

$$e_{n+1}=\alpha_{n+1}y_{n+1} \qquad \forall n\in\mathbb{N} \tag{5.5}$$

ove $\alpha_{n+1}$ è un numero complesso tale che $\|\alpha_{n+1}y_{n+1}\|=1$ e $(x_{n+1}|\alpha_{n+1}y_{n+1})>0$, cioè tale che $|\alpha_{n+1}|^2\|y_{n+1}\|^2=1$ e $\bar{\alpha}_{n+1}(x_{n+1}|y_{n+1})>0$. Poiché il numero complesso $\alpha_{n+1}$ verificante queste due condizioni esiste ed è unico, posto (5.5) con il valore suddetto di $\alpha_{n+1}$ e posto $e_1=x_1$, resta definita una famiglia ortonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E$ verificante le proprietà richieste e tale famiglia è univocamente determinata da tali condizioni. #

Con riferimento alla Prop. 5.5, si dice che la base ortonormale $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è ottenuta dalla famiglia libera $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per *ortonormalizzazione*.

COROLLARIO. *Ogni spazio pre-hilbertiano di Hausdorff separabile ammette una base ortonormale numerabile.*

Dimostrazione. Se uno spazio pre-hilbertiano di Hausdorff $E$ è separabile esiste una famiglia libera numerabile $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $E$ densa in $E$. Detta $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famiglia ortonormale in $E$ che si ottiene da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ per ortonormalizzazione, il sottospazio vettoriale di $E$ generato da $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coincide con quello generato da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e quindi è denso in $E$; pertanto $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una base ortonormale (numerabile) di $E$.

PROPOSIZIONE 5.6. In uno spazio hilbertiano $E$, due basi ortonormali qualunque sono equipotenti.

Dimostrazione. Siano $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ e $(b_\beta)_{\beta\in B}$ due basi ortonormali di $E$. Se $A$ è finito, anche $B$ è finito e ha la stessa cardinalità di $A$, perchè dalla Prop. 5.5 si deduce immediatamente in uno spazio pre-hilbertiano una base ortonormale finita è anche una base in senso algebrico. Supponiamo allora che $A$ e $B$ siano infiniti. Per ogni $\alpha\in A$ sia $B_\alpha=\{\beta\in B : (a_\alpha|b_\beta)\neq 0\}$. L'insieme $B_\alpha$ è numerabile (v. Prop. 5.2) e per ogni $\beta\in B$ esiste $\alpha\in A$ tale che $\beta\in B_\alpha$ (perchè $(a_\alpha)_{\alpha\in A}$ è ortonormale e $b_\beta\neq 0$), donde $B=\bigcup_{\alpha\in A} B_\alpha$. Ne segue che il cardinale di $B$ non supera quello di $\mathbb{N}\times A$ e quindi non supera quello di $A$. In maniera analoga si prova che il cardinale di $A$ non supera quello di $B$. Dunque $A$ e $B$ hanno la stessa cardinalità. #

Il cardinale di una base ortonormale (qualunque) di uno spazio hilbertiano $E$ dicesi la dimensione hilbertiana di $E$.

OSSERVAZIONE. Come s'è già notato, dalla Prop. 5.5 si deduce che, se la dimensione hilbertiana di uno spazio di Hilbert $E$ è finita, essa coincide con la dimensione dello spazio vettoriale $E$ (su $\mathbb{C}$). Escludendo questo caso, la dimensione hilbertiana di $E$ è diversa dalla dimensione dello spazio vettoriale $E$.
Vogliamo anche segnalare che, nella Prop. 5.4, è essenziale che lo spazio $E$ sia completo: infatti si possono dare esempi di spazi pre-hilbertiani di Hausdorff che non ammettono una base ortonormale.

ESEMPIO. Sullo spazio vettoriale $C([-1,1])$ delle funzioni complesse definite e continue nell'intervallo $[-1,1]$ consideriamo la forma sesquilineare positiva $(f,g)\mapsto (f|g)$, ove

$$(f|g)=\int_{-1}^{1} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx .$$

Posto, per ogni $n\in\mathbb{N}$, $\varphi_n(x)=x^n$, $(x\in[-1,1])$, la famiglia libera $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è totale in $(C([-1,1]),(\cdot|\cdot))$ in base al noto Teorema di Stone-Weierstrass. Ortonormalizzando $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si ottiene una successione (ortonormale totale) $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. E' evidente che $P_n$ è una funzione polinomiale di grado $n$. Le funzioni $P_n$ sono chiamate i polinomi di Legendre.
Un'altra successione ortonormale totale nello spazio $(C([-1,1]),(\cdot|\cdot))$ è $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ove

$$\psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{\pi n i x}\quad ,(x\in[-1,1]).$$

Infatti si verifica facilmente che $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è ortonormale; essa è totale in base al Teorema di Stone-Weierstrass.

# 6. SOMMA HILBERTIANA ESTERNA.

Sia $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ una famiglia di spazi hilbertiani. Se $x_\alpha, y_\alpha \in E_\alpha$, indicheremo con $(x_\alpha|y_\alpha)$ il loro prodotto scalare in $E_\alpha$ e, se $x_\alpha \in E_\alpha$, porremo $\|x_\alpha\|^2 = (x_\alpha|x_\alpha)$.

Sia $F$ la somma diretta (esterna) degli spazi vettoriali $E_\alpha$, cioè (v. § 3, n. 2) il sottospazio vettoriale del prodotto $\prod_{\alpha\in A} E_\alpha$ costituito dagli elementi $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$ del prodotto tali che $x_\alpha = 0$ tranne che per un numero finito di indici. Per ogni $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$ e $y = (y_\alpha)_{\alpha\in A}$ di $F$, sia

$$(6.1) \qquad (x|y) = \sum_{\alpha\in A}{}'(x_\alpha|y_\alpha), \qquad \|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A}\|x_\alpha\|^2 .$$

In tale modo $F$ resta atteggiato a spazio pre-hilbertiano di Hausdorff, perchè l'applicazione $(x,y) \mapsto (x|y)$ è chiaramente una forma sesquilineare positiva su $F$. In generale tale spazio pre-hilbertiano non è completo; lo spazio di Hilbert $\hat{F}$ che si ottiene completando lo spazio pre-hilbertiano $F$ (v. Prop. 1.3) dicesi <u>la somma hilbertiana esterna</u> della famiglia $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Sia ora

$$E = \{x = (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} E_\alpha : \ (\|x_\alpha\|)_{\alpha\in A} \text{ è sommabile}\}.$$

$E$ è un sottospazio vettoriale del prodotto $\prod_{\alpha\in A} E_\alpha$, perchè (v. (1.5)) $\|x_\alpha + y_\alpha\|^2 \le 2(\|x_\alpha\|^2 + \|y_\alpha\|^2)$. Poichè (per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) $|(x_\alpha|y_\alpha)| \le \|x_\alpha\|\|y_\alpha\| \le \frac{1}{2}(\|x_\alpha\|^2 + \|y_\alpha\|^2)$, se $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$ e $y = (y_\alpha)_{\alpha\in A}$ sono elementi di $E$ la famiglia $((x_\alpha|y_\alpha))_{\alpha\in A}$ è sommabile e quindi ha senso la posizione (6.1) per ogni $x$ e $y$ di $E$, la quale definisce (evidentemente) una forma sesquilineare positiva $(x,y) \mapsto (x|y)$ su $E$. Proviamo che <u>$(E, (\cdot|\cdot))$ è completo</u> e quindi è <u>uno spazio di Hilbert</u>.

Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ove $x_n = (x_{n,\alpha})_{\alpha\in A}$, una successione di Cauchy in $(E, \|\cdot\|)$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $n, m \ge n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\| \le \varepsilon$, cioè tale che $n, m \ge n_0 \Rightarrow \sum_{\alpha\in A}\|x_{n,\alpha} - x_{m,\alpha}\|^2 \le \varepsilon^2$. Ne segue che, per ogni $\alpha \in A$, la successione $(x_{n,\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $E_\alpha$ e quindi converge verso un punto $a_\alpha \in E_\alpha$. Allora (ricordando che $\|x_{n,\alpha} - a_\alpha\| \le \|x_{n,\alpha} - x_{m,\alpha}\| + \|x_{m,\alpha} - a_\alpha\|$) si constata facilmente che, per ogni parte finita $I$ di $A$, si ha $\sum_{\alpha\in I}\|x_{n,\alpha} - a_\alpha\|^2 \le \varepsilon^2 \ \forall n \ge n_0$. Di conseguenza si ha $\sum_{\alpha\in A}\|x_{n,\alpha} - a_\alpha\|^2 \le \varepsilon^2 \ \forall n \ge n_0$ e quindi, posto $a = (a_\alpha)_{\alpha\in A}$, si ha che $a \in E$ (perchè $x_{n_0} - a \in E$) e che $x_n$ converge al punto $a$ in $(E, \|\cdot\|)$. Dunque $(E, \|\cdot\|)$ è completo.

<u>Poichè $(F, (\cdot|\cdot))$ è (evidentemente) un sottospazio di $(E, (\cdot|\cdot))$ denso in esso, possiamo identificare la somma hilbertiana esterna della famiglia $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ di spazi di Hilbert con lo spazio di Hilbert $(E, (\cdot|\cdot))$.</u>

* * * * *

OSSERVAZIONE. Per ogni insieme di indici $A$ indichimo con $\ell^2(A)$ lo spazio hilbertiano somma hilbertiana esterna della famiglia $(\mathbb{C}_\alpha)_{\alpha\in A}$, ove $\mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C}$ $\forall \alpha \in A$.
Per quel che s'è detto sopra, $\ell^2(A)$ è lo spazio vettoriale delle famiglie $\xi = (\xi_\alpha)_{\alpha\in A}$ in $\mathbb{C}$ tali che $(|\xi_\alpha|^2)_{\alpha\in A}$ è sommabile munito della forma sesquilineare positiva $(\xi,\eta) \mapsto (\xi|\eta)$, ove $(\xi|\eta) = \sum_{\alpha\in A} \xi_\alpha \bar{\eta}_\alpha$.

Se $(E, (\cdot|\cdot))$ è uno spazio di Hilbert e $(e_\alpha)_{\alpha\in A}$ una sua base ortonormale, l'applicazione $E \ni x \mapsto ((x|e_\alpha))_{\alpha\in A}$ è (come si constata immediatamente) un isomorfismo dello spazio di Hilbert $(E,(\cdot|\cdot))$ sullo spazio di Hilbert $\ell^2(A)$.