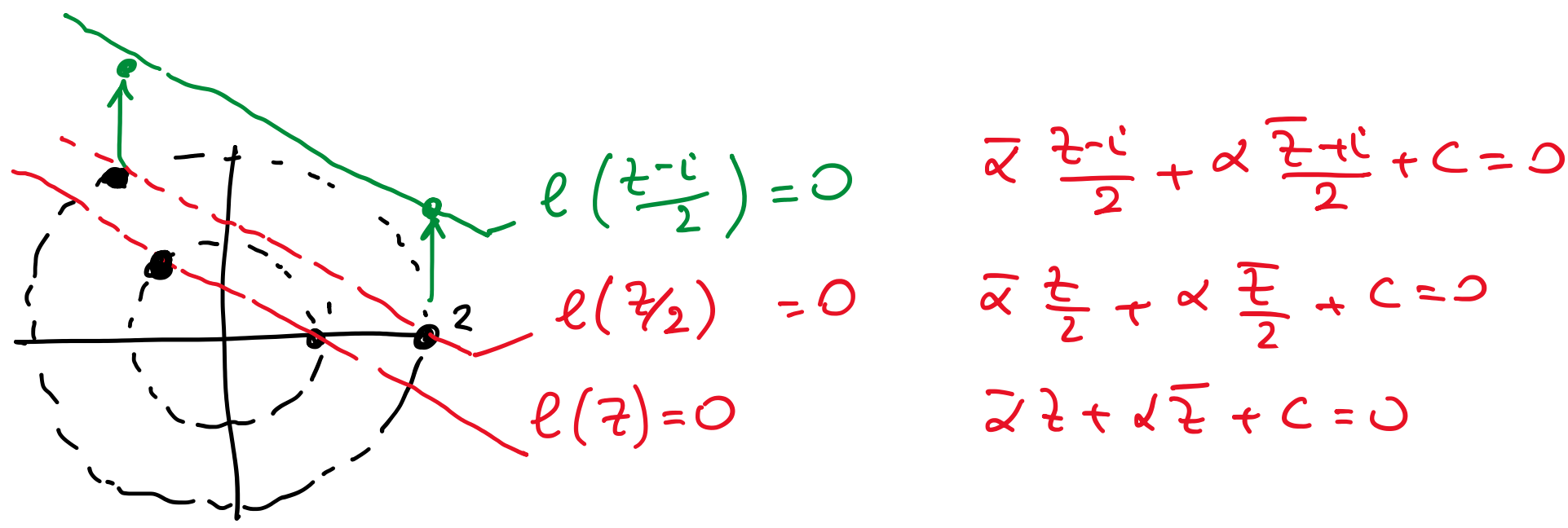
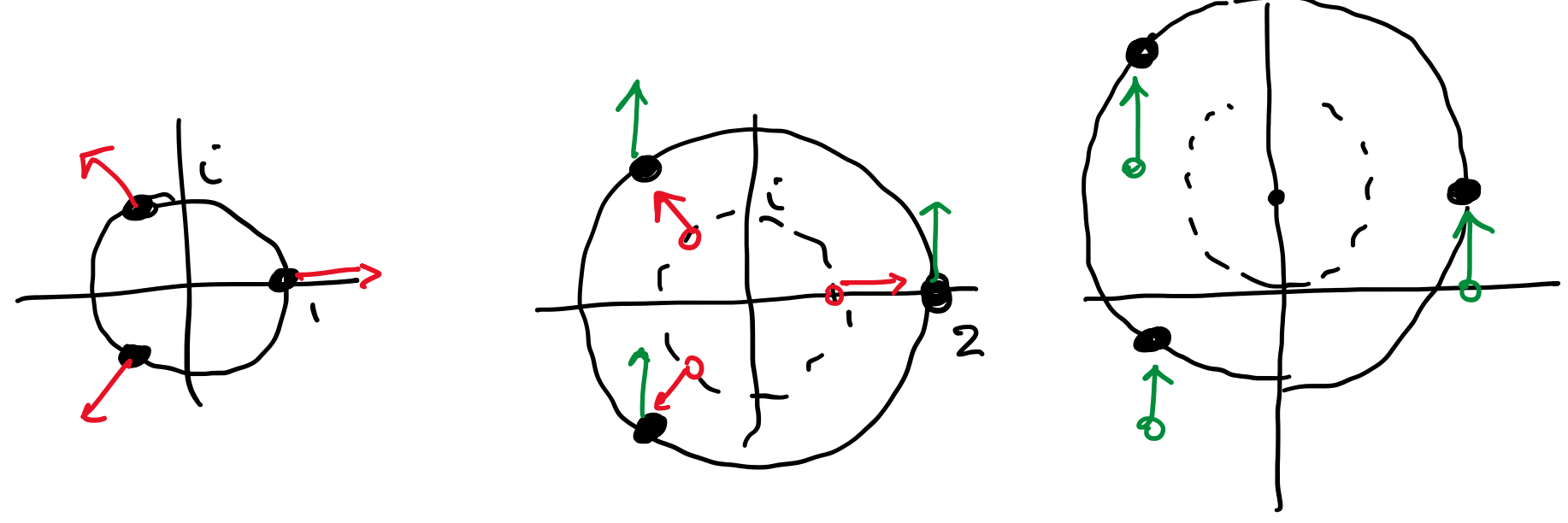


① radici dell'equazione $(z-i)^3 = 8$

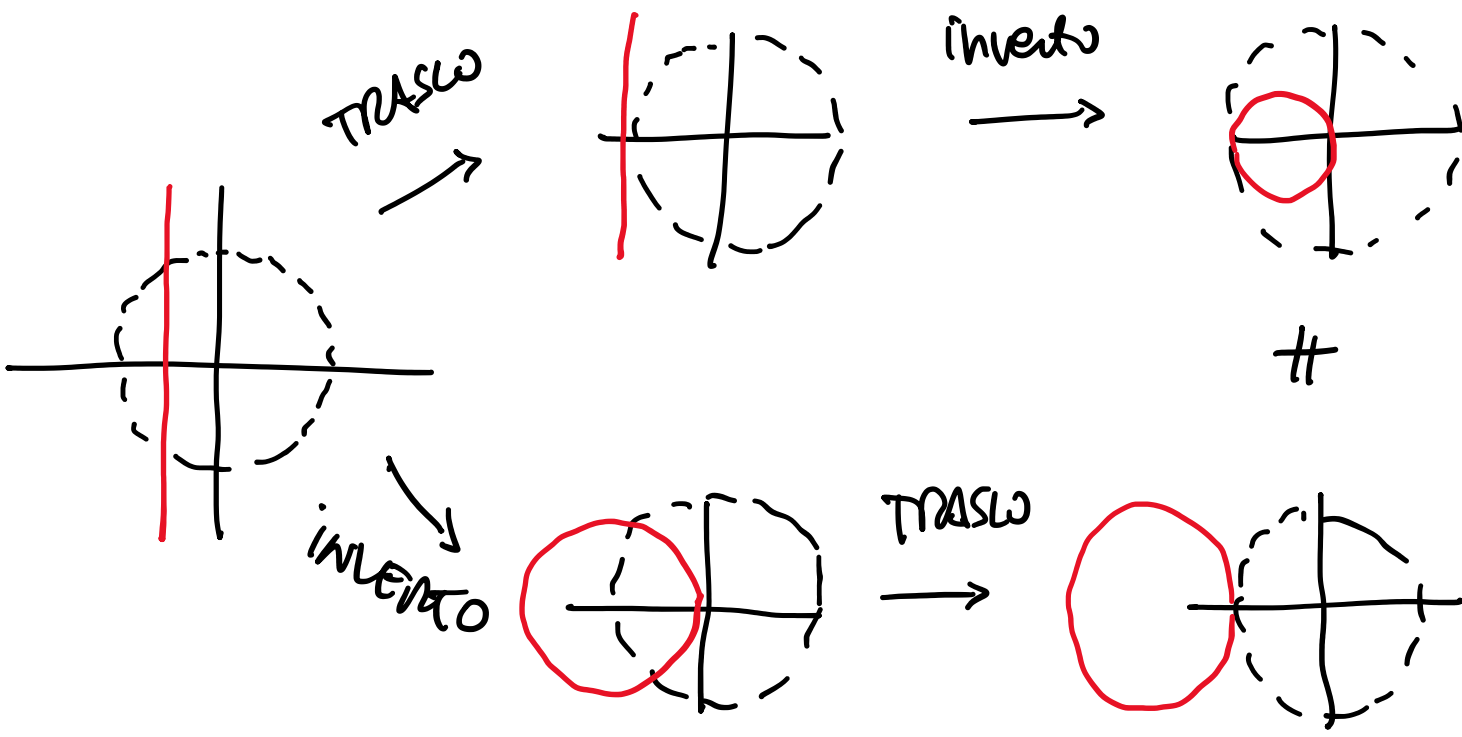
abbiamo $z-i = \text{radici cubiche di } 8 = \begin{cases} 2 e^{i 2\pi/3} \\ 2 e^{i 4\pi/3} \end{cases} = \begin{cases} 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ 2 \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases}$

e dunque $z = i + \begin{cases} -1 + i\sqrt{3} \\ -1 - i\sqrt{3} \end{cases} = \begin{cases} 2+i \\ -1 + (1+i\sqrt{3})i \\ -1 + (1-i\sqrt{3})i \end{cases}$

Per trovare le rette possiamo calcolare quelle per le radici cubiche di 1 e poi "moltiplicare per 2 e tornare di i ":



Per l'inversa invece si deve partire dalle equazioni effettive delle rette... (per l'inversa e dilatazioni/traslazioni non commutano):



② Molto simile ad un esercizio del piano reale:

vediamo solo una soluzione "tesica"

se $V = U \oplus W = U \oplus W'$
e usiamo una base di V fatta con basi di U e W :
 $v = (2u, w)$
allora $\alpha_v(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
mentre $\alpha_v(\pi') = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ se W' base di W'
e $w = (2u, w')$ $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$
da cui $\pi'w = (2u, w') \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} = 2uA$
e si vede $\alpha_v(\pi \pi') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_v(\pi')$
 $\alpha_v(\pi' \pi) = \begin{pmatrix} 1 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_v(\pi)$
dunque non sono uguali, ma sono proiezioni!
(quella di potenza 2, in particolare sono idempotenti)

Si può copiare senza fare le conto con le matrici?

$V = U \oplus W = U \oplus W'$
 $v = u + w = u' + w'$
dunque: $\pi(v) = u$ $\pi'(v) = u'$
da cui $\pi'(\pi(v)) = \pi'(u) = u$ (perché $u \in U$) dunque $\pi'(u) = u$
 $\pi(\pi'(v)) = \pi(u') = u$ (perché $u' \in U$) dunque $\pi(u') = u$

Per questo, componendo due proiezioni con lo stesso schermo U dà sempre la proiezione delle proiezioni applicate!

③ $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$

$F: V \rightarrow V$
 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+e \\ b+a \\ c+b \\ d+c \\ e+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$
 $p_F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & x-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^5 - 1$
che nel campo $\mathbb{C}$ ha 5 radici distinte
che $(x-1)^5 = 1$
 $(x-1) = \text{radici 5° unite}$
 $x = 1 + \text{radici 5° unite}$
dunque $m_F(x) = p_F(x)$, e F è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

Usando: w^2 w 1 w $\bar{w}$

$\alpha_E(F) \sim_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 2 & 1+w & 1+\bar{w} & 1+w^2 & 1+\bar{w}^2 \end{pmatrix}$

Ma che su $\mathbb{R}$ non è né diagonalizzabile, né triangolarizzabile
perché non ha tutti gli autovalori in $\mathbb{R}$:
 $\alpha_E(F) \sim_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 2 & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \leftarrow & \leftarrow \end{matrix}} & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} \leftarrow & \leftarrow \end{matrix}} & & \\ & & & \begin{pmatrix} \text{Re}(1+w) & \text{Im}(1+w) \\ -\text{Im}(1+w) & \text{Re}(1+w) \end{pmatrix} \\ & & & \begin{pmatrix} \text{Re}(1+w^2) & \text{Im}(1+w^2) \\ -\text{Im}(1+w^2) & \text{Re}(1+w^2) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

Usando che $F = \text{id} + \text{ciclo sui vettori della base canonica}$,
 $F - \text{id} = \gamma$ e $\gamma^5 = \text{id}$
 $\gamma^4 \neq \text{id}$
abbiamo $m_\gamma(x) \mid x^5 - 1$
polinomio minimo di γ ,
ma nessun divisore proprio annulla γ ,
quindi $m_\gamma(x) = x^5 - 1 = p_\gamma(x)$
e allora $p_F(x) = p_\gamma(x-1) = (x-1)^5 - 1$
 $x^5 - 1 = (x-1)(x^2 - 2\text{Re}(w)x + |w|^2)(x^2 - 2\text{Re}(w^2)x + |w|^2)$

④ $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$p_A(x) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & x-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)((x-2)x+1)(x(x-2)+1) = (x-1)^5$

Unico autovalore $x=1$, molteplicità 5.
Vediamo l'autospazio:
 $\ker(A - \mathbb{1}) = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$
nullità = 2
(solo 2 blocchi di Jordan)
ci sono anche 2 possibilità: $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ e $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}$
e per copiare basta colorare
 $\ker(A - \mathbb{1})^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$
rank 1, dimensione 4, quindi $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{smallmatrix}$
con $m_A(x) = (x-1)^3$

Possiamo usare una base giordanica usando

$v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V \setminus \ker(A-1)^3$
 $v_4 = (A - \mathbb{1})v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 $v_3 = (A - \mathbb{1})v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (A - \mathbb{1})^2 v_5$
 $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker(A-1)^2 \setminus \ker(A-1)$
 $v_1 = (A - \mathbb{1})v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

quindi usando $M = (v_1 v_2 v_3 v_4 v_5)$
abbiamo $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ϕ ha la stessa forma di Jordan di ϕ , quindi il minimo sottospazio in cui ϕ è diagonalizzabile è esattamente l'autospazio di 1, di dimensione 2.

Per matrici di ordine 8 è più unico che raro
è necessariamente $(x-1)^8$, e vi sono alcune forme possibili:

$\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix} \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square & \square \end{smallmatrix}$

dimensioni degli autospazi generalizzati:
6, 7, 8 5, 7, 8 4, 7, 8 4, 6, 8 3, 6, 8 -