Introduzione al corso di Geometria 1

1. Questioni pratiche
2. Questioni concettuali
3. Nozioni preliminari (per noi)

(1) Questioni pratiche:

Corso ANNUALE, un solo voto finale,
ma due semestri:
1° semestre 2 canali: A-L (Cailotto), M-Z (Bertapelle)

(uno stesso programma / pg moodle / esami)

2° semestre tutti insieme (stessi docenti)

RIFERIMENTO UFFICIALE:
pg moodle del corso: info, appunti; liste esame...
(e pg web mia su DM)

TUTORATO: inizia la prossima settimana
non obbligatorio, ma utile,
2 studenti magistrali,
(speriamo di trovare aule...
pomeriggio tardi lunedì ...)

ORGANIZZAZIONE:
Lu 8,30 (2h)
Ma 8,30 (2h)
Me (8,30 RICEV. AULA) 9,30 (1h)

Ogni settimana lasciamo qualche esercizio consigliato;
se non riuscite a risolverli, chiedere!

Ricevimento: appunto mer 8,30 prima lezione
lunedì pomeriggio?

ESAMI: superare gli scritti su entrambi i moduli,
poi esame orale su TUTTO il programma
in cui si decide il voto finale.

Come si superano gli scritti?
- prove parziali nel semestre (metà, fine)
- appelli ufficiali del corso
(febbr. solo A, giugno, luglio,
agosto, settembre sia A che B)

TESTI: noi non seguiamo nessun testo in particolare
ci sono delle dispense "AGLA",
pdf libero su moodle e pgweb,
si possono usare altri libri di livello
universitario per matem/fisica

DOMANDE?

(2)

Scopo del corso NON È studiare questo o quel libro.

Lo scopo è: CAPIRE LA GEOMETRIA DEGLI SPAZI DI DIMENSIONE FINITA n
(non solo $n=2$ "piano"
o $n=3$ "spazio")

e di conseguenza essere capaci di leggere qualsiasi libro sull'argomento.

PROGRAMMA:

1° semestre (+ algebrico)
- numeri complessi e geom. piano
- spazi vettoriali
- funzioni lineari, calcolo matriciale
- DETERMINANTI
- Forme CANONICHE

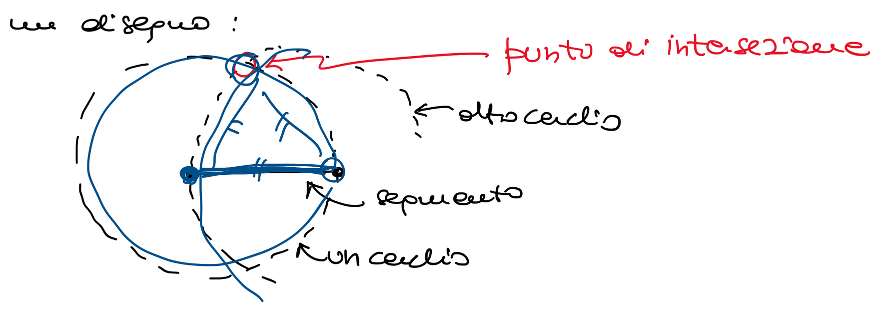
2° semestre (+ geometrico)
- △ GEOMETRIA AFFINE (proprietà geometriche indip. dalle distanze)
- △△ GEOMETRIA EUCLIDEA (nozioni di angoli, distanze, volumi...)
- △△△ GEOMETRIA PROIETTIVA

È bene capire subito perché noi studiamo la geometria usando l'algebra (vettori, matrici), lineare e quadratica (al primo anno):

La geometria fatta con "assiomi" e "postulati" alla Euclide (oggi detta "SINTETICA" in contrapposizione ad "ANALITICA" o "ALGEBRICA")
ha ormai solo interesse STORICO / DIDATTICO,
non più matematico:

(1) non può andare oltre le dimensioni "piccole" 2, 3

(2) molte "dimostrazioni" di Euclide sono sbagliate, non seguono dai suoi assiomi (e lui probabilmente lo sapeva!):
già la prima dimostrazione
"esistono triangoli equilateri"
usa un disegno:



ma: nessun postulato può dire se due cerchi si intersecano, sui cerchi c'è solo il postulato di esistenza!

di più: ci sono sistemi di punti e rette che soddisfano a tutti i postulati di Euclide, e le due circonferenze NON hanno punti in comune.

problema: cercate un esempio!
suggerimento: $\sqrt{3}$ non è razionale
(non è p/q con p, q interi)

HILBERT, >2k anni dopo, "aggiusta" tutto,
ma aggiunge molti assiomi,
alcuni complicati (tipo "continuità");
ma mostra anche che il piano di Euclide
è equivalente alle "coppie di numeri" $K^2 = K \times K$
con K campo che contiene $\mathbb{Q}$ ed è chiuso
per opportune operazioni ($\sqrt{\ }$ di >0).

Usando l'algebra lineare abbiamo vantaggi:

(1) lavoriamo in dim. finita qualsiasi
usando n-uple di numeri K^n invece di K^3, K^2 solo.

(2) dimostrazioni chiare e sicure ("fare i conti")

ma dobbiamo ricordarci di cercare
PROPRIETÀ DELLO SPAZIO INDIPENDENTI
dalle coordinate scelte.

(3)

Nozioni che noi usiamo subito
(vengono fatte in Algebra, Analisi):

insiemi: A
$B \subset A$ sottoinsieme
$a \in A$ elemento, $\{a\} \subseteq A$
$A \cup B$
$A \cap B$
$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$
$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$

funzioni $f : A \longrightarrow B$
$x \longmapsto f(x)$
- iniettive
- suriettive
- biiettive
- $id_A : A \to A$
- composizione $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$

insiemi numerici: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ numeri NATURALI

con operazioni:

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$
$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x+y$

somma $+$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $(a,b) \longmapsto a+b$
- associativa: $(x+y)+z = x+(y+z)$
- commutativa: $x+y = y+x \quad \forall x \, \forall y$
- con el. neutro: $\exists 0 : x+0 = x \quad \forall x$

prodotto $\cdot$: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $(a,b) \longmapsto ab$
- associativa: $(ab)c = a(bc)$
- commutativa: $ab = ba$
- con el. neutro: $\exists 1 : b \cdot 1 = b$

e DISTRIBUTIVITÀ di $\cdot$ su $+$: $a(b+c) = ab+ac$.

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots\}$

e le operazioni $+$ e $\cdot$ hanno una proprietà in più
OPPOSTI RISPETTO ALLA SOMMA $\quad \forall a, \exists (-a) : a + (-a) = 0$

(ma non per il prodotto!)

ANELLO COMM. con 1

$(\mathbb{Z}, +)$ è gruppo abeliano
- oss come elemento neutro
- inverso!

$\mathbb{Q} = \{ p/q \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ dove $p/q = p'/q' \Leftrightarrow pq' = p'q \}$

e le operazioni $+$ e $\cdot$ hanno anche
INVERSI RISPETTO AL PRODOTTO:

CAMPO
- $(\mathbb{Q}, +)$ gruppo
- $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ gruppo
- distributiva

il campo reale $\mathbb{R}$ si studierà in Analisi,
per ora $\mathbb{R} = \{$sviluppi decimali arbitrari$\}$

mentre $\mathbb{Q} = \{$sviluppi decimali finiti o periodici$\}$

Esempio: A insieme
$\mathcal{P}(A) = \{B \subseteq A\}$
tutti i sottoinsiemi
"parti di A"
"insieme potenza di A"

$\cup : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$
$(X, Y) \longmapsto X \cup Y$

$\cap : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(A)$
$(X, Y) \longmapsto X \cap Y$

$\Rightarrow \mathcal{P}(A)$ ha due "operazioni"

che proprietà hanno queste operazioni?