03.234 13-nc 1

[illegible]

Timoshenko:

Se G insieme, $* : G \times G \longrightarrow G$ "operazione" allora se a^2

ASSOCIATIVA se $a*(b*c) = (a*b)*c \quad \forall a,b,c \in G$

CON ELEMENTO NEUTRO se $\exists e \in G : e*x = x*e = x \quad \forall x \in G$

CON SIMMETRIA se $\forall x \in G, \exists y \in G : xy = e = yx$

Commutativa se $x*y = y*x \quad \forall x,y \in G$

$(G,*)$ MONOIDE + ASSOCIATIVA

con un neutro

e con la simmetria: GRUPPO

GRUPPO COMMUTATIVO o ABELIANO (ABEL)

Esempi: $(\mathbb{N},+)$ semigruppo commutativo

$\mathbb{N} \ni x$ gruppo

$(\mathbb{N},*)$ $1 \in \mathbb{N}$ neutro

$(\mathbb{Z},+)$ gruppo additivo

$(\mathbb{Z},*)$ non è gruppo, semi gruppo

$(\mathbb{Q},*)$ gruppo moltiplicativo

$(\mathbb{Q},+)$ sul $\{x \in \mathbb{Q} : x \neq 0\}$ gruppo moltiplicativo.

X insieme, $\{A : \underbrace{\{x \longrightarrow x\}}_{\text{corrispondenza}}, \underbrace{x \longrightarrow y}_{y^x}\}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y^x$ $\quad (y^x)(z) = y(z)$

$A \circ A \longrightarrow A$

$(A,*) : x \mapsto y(z \mapsto f(z)) = f(z)$ (composizione)

$x \longrightarrow y(f(x))$

$y \circ f \circ g$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (il valore non importa!)

$x \mapsto 1/x$ $\quad x \longrightarrow y$

$y \longrightarrow y^2$

$x \longrightarrow \cos(x)$ $\quad x \longrightarrow x^2 \sin$

Se di sinistra $\mathbb{R} \ni x \longrightarrow x$ (il valore)

$x \longrightarrow x$

in generale $\nexists$ e per un insieme X di $\mathbb{C}$. $\quad$ $e \circ x = x \circ e$ per $e \in$ identità

$\boxed{S = \{\text{insieme } X \longrightarrow X\}}$ allora S GRUPPO con $*$ (non abeliano)

$(A,+,\cdot)$ $\quad + : A \times A \longrightarrow A$

$\cdot : A \times A \longrightarrow A$

si dice ANELLO se $(A,+)$ è GRUPPO ABELIANO con un elemento $0 \cdot 0$

(Anello commutativo (MOLTI))

$(A,\cdot)$ è SEMIGRUPPO (GRUPPO)

GRUPPO COMMUTATIVO

$\Leftrightarrow$ $\exists 1 : (\forall a \in) \; 1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in A$

(SEMIGRUPPO DI $\cdot$ $\Rightarrow$ neutro $\cdot$ $\Rightarrow$)

(se $\cdot$ è commutativo)

Proprietà: $(A,+,\cdot)$

Anello: $(A,+)$ gruppo ab.

$(A,\cdot)$ semigruppo $\in$

$\cdot$ gruppo DISTR.

Anello commutativo: anello con commutativo

Campo: anello con tutti inversi.

cioè $(A,+)$ gruppo ab. con 0

$(A \setminus \{0\}, \cdot)$ gruppo

$\cdot$ è ab.

Campo commutativo

(campo commutativo)

cioè $(A,+)$ gruppo ab.

$(A \setminus \{0\}, \cdot)$ gruppo

$\cdot$ è ab. e commutativo

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{C}$

Peano $\quad$ Dedekind $\quad$ CAMPO DEI NUMERI REALI

① Motivazione: Si basa polinomi reali: $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ ne x^2+1, che non hanno quindi radici.

Problema: Vorrei un campo che $\supseteq \mathbb{R}$, e che "INCORPORI CONTENTE" questo e ogni polinomio ha radici.

Teorema: $p(x) = 0$ con $(x-a) \mid p(x)$ per $a \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}[x] \supseteq \mathbb{R}[x]$

Se è così ok

② Idea: aggiungiamo a $\mathbb{R}$ un nuovo simbolo i tale che $i^2 = -1$, e vediamo.

$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ i unità

$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+(b+d)$

$(a+ib)\cdot(c+id) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

$\underbrace{(a+ib)^{-1}}_{\frac{1}{a+ib}} = a - ib + a/(a^2+b^2) + \frac{b}{a^2+b^2} i$

$= \left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) + i\left(\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

$\boxed{(\mathbb{C},+,\cdot) \text{ è un CAMPO}}$

③ Definizione:

$\boxed{\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}}$

$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (a,b)+(c,d) = (a+c, b+d)$

$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \quad (a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ è campo dove $\underbrace{0}_{\mathbb{C}} = (0,0)$

$\boxed{\mathbb{C} = \{(a,0)\}}$

e in questo campo abbiamo una

$\boxed{(a,0)+(c,0) = (a+c,0) \quad (a,0)\cdot(c,0) = (ac,0)}$

allora: $(a,b) = (a,0) + (0,b) =$

$= \underbrace{(a,0)}_{a} + \underbrace{(b,0)}_{b} \cdot \underbrace{(0,1)}_{i}$

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ $\quad$ $\mathbb{R}$ sottocampo di $\mathbb{C}$

---

④ Rappresentazione di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}^2$:

Indirizzamento: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longrightarrow (x,0)$

Sottoinsieme $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$

Sottoinsieme: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longrightarrow (x,0) = (0,x)$

Sottoinsieme $\{(0,x) : x \in \mathbb{R}\}$

$(0,x)+(0,y) = (0,x+y)$

$(0,x)\cdot(0,y) = (0,-xy)$

$= (-xy, 0)$

$= (0,x)\cdot(0,y) = (0,-xy)$

Non funziona

Indirizzamento $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad R(z+w) = R(z)+R(w)$

$z \mapsto z(1) = x$ $\quad$ $\text{Im}\, z \longrightarrow$

$R(z) \text{ dato } z \in (x,y)$

$\text{Im}\, z \longrightarrow$

$z \in \mathbb{C}$ allora $z = x+iy$

$z \longrightarrow z(i) = y$

⑤ $i = (0,1)$ ha la proprietà $i^2 = -1$

$\in \mathbb{C}$ cioè $\in$ elemento di $X^2 \neq 0$

Non anche $i = (0,1)$: $(i)^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0,-1)$

Consideriamo: $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$z \longrightarrow \bar{z} = x - iy$

$x+iy \longrightarrow x-iy$

$(x,y) \longrightarrow (x,-y)$

è biettiva (biunivoca) e iniettiva

$\bar{\bar{z}} = z$

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$

$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

$\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$

$\bar{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R}$

$\bar{z} = \frac{z+\bar{z}}{2} + i\frac{z-\bar{z}}{2i}$

$\begin{cases} z = x+iy \\ \bar{z} = x-iy \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{z+\bar{z}}{2} = x \\ \frac{z-\bar{z}}{2i} = y \end{cases}$

$\begin{cases} z = x+iy \\ \bar{z} = x-iy \end{cases}$

$\begin{cases} \frac{(x+iy)+(x-iy)}{2} = x \\ \frac{(x+iy)-(x-iy)}{2i} = y \end{cases}$

$\begin{cases} (x+iy)+(x-iy) = 2x \\ (x+iy)-(x-iy) = 2iy \end{cases}$

$\boxed{z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = (x^2+y^2)+i0}$

$\in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$= 0 \iff z = 0 \quad (x,y) = (0,0) \iff x = y = 0$

$\in \mathbb{R}$.

$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ne $z \neq 0$

$z = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \in$ $\quad$ $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$

Inverso di $z = x+iy$ $\in \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$

Inverso di $(x,y) \in \left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$

08/03/2022

Appunti: particolarmente prima lettura di 10.60 (la spiegazione va molto...).

Nel rendere interessi anche con 10.4 di Fisica (Lagrange Tipo di quadrato Anche: Esercizio su Derivate vs Conti).

Definizione:

Definizione $\mathbb{C} = \{x+iy : x, y \in \mathbb{R}\}$ $\quad$ $i^2 = -1$

$= \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

con operazioni $+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$((x,y),(z,w)) \longrightarrow (x+z, y+w)$

$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$((x,y),(z,w)) \longrightarrow (xz-yw, yz+xw)$

e $(\mathbb{C},+,\cdot)$ è CAMPO

di neutro $+$: $(0,0)+(0,0)$

di neutro $\cdot$: $(1,0) = 1+i0$

Inverso $(x,y)^{-1} = (x,y)(x,y) = (x^2,0) = 1+i0$

$\mathbb{C} \ni z \longrightarrow x+iy$

$\mathbb{R} \longrightarrow x$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longrightarrow x+i0$

$\text{Re}(z) = x$ $\quad$ $\text{Im}(z) = y$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longrightarrow x+i0$

$\text{Re} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ (sottoinsieme)

$z \longrightarrow \text{Re}(z)$ $\quad$ $\text{Im} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ (non)

$z \longrightarrow \text{Im}(z)$

Piuttosto interessante

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longrightarrow x+i0$

Sottoinsieme $\{x+i0 : x \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longrightarrow (x,0)$

Sottoinsieme $\{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longrightarrow x+i0$

$\text{Re}(z) = x$

$\text{Im}(z) = y$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longrightarrow x+i0$

$\text{Re}(z) = x$

$\text{Im}(z) = 0$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longrightarrow x+i0$

$\text{Re}(z) = x$

$\text{Im}(z) = 0$

$\mathbb{C} \ni z \longrightarrow x+iy$

$\text{Re}(z) = x$

$\text{Im}(z) = y$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longrightarrow x+i0$

$\text{Re}(z) = x$

$\text{Im}(z) = 0$

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longrightarrow x+i0$

$\text{Re}(z) = x$

$\text{Im}(z) = 0$

$\mathbb{C} \ni z \longrightarrow x+iy$

$\text{Re}(z) = x$

$\text{Im}(z) = y$

Sottoinsieme

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

$x \longrightarrow x+i0