Numeri complessi: operazione del prodotto $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (pseudo) associativa
operazione di somma $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ (pseudo) associativa
Esponenziale: $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

Radicazione: $\mathbb{C}\ni z\mapsto z^n\in\mathbb{C}$ $(\mathbb{C},+,\cdot)$ campo

radicazione: $\mathbb{R}\ni x\mapsto x^2\in\mathbb{R}$ $\mathbb{R}\ni x\mapsto\sqrt{x}\in\mathbb{R}$

$\mathbb{C}\ni z\mapsto z^2$ $\mathbb{C}\to\mathbb{R}$
$\mathbb{C}\ni z\mapsto\sqrt{z}=?$ $z\mapsto\sqrt{z}$
Metodo di $\mathbb{C}$: $|z|=|w|$ e $\arg z=\arg w$
$|z|=|w|$
$\arg z=\arg w+k\pi$

$\mathbb{R}\ni x\mapsto\sqrt{x}\in\mathbb{R}$ campo, è dipendente

- radice in quanto $x^2=x$ (radici x radici di $x\in\mathbb{C}$) x^2 radici
- TFA - $\mathbb{C}$ ogni polinomio in $\mathbb{C}$ ha tante radici in $\mathbb{C}$.
  - $\mathbb{R}$: polinomi irriducibili, radici $\mathbb{R}$ grado massimo $\mathbb{R}$
  $(x-a)(x-b)\in\mathbb{R}[x]$

$z=|z|\cdot\frac{z}{|z|}=|z|\cdot(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$

$\frac{z}{|z|}$ ha senso perché $\neq 0$

$\cos(n\vartheta)+i\sin(n\vartheta)=\cos(\vartheta)+i\sin(\vartheta)$

$\cos(n\vartheta)=\mathrm{Re}\left(\cos(n\vartheta)+i\sin(n\vartheta)\right)$

$\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\vartheta)^{n-k}(i\sin\vartheta)^k\right)$

$\sum_{k\text{ pari}}\binom{n}{k}(\cos\vartheta)^{n-k}\cdot i^k(\sin\vartheta)^k$

$\begin{cases}k=2h\\ h=\frac{k}{2}\end{cases}$

$\sum_{h\text{ pari}}\binom{n}{2h}(\cos\vartheta)^{n-2h}\cdot i^{2h}(\sin\vartheta)^{2h}$

$\sum_{h\text{ pari}}\binom{n}{2h}(\cos\vartheta)^{n-2h}\cdot(-1)^h(\sin\vartheta)^{2h}$

$\sin(n\vartheta)=\mathrm{Im}\left(\cos(n\vartheta)+i\sin(n\vartheta)\right)$

$\sum_{k\text{ dispari}}\binom{n}{k}(\cos\vartheta)^{n-k}(i\sin\vartheta)^k$

Esponenziale complesso:

$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$

$e^{i\vartheta}=e^{i\cdot\vartheta}=\left(e^{i\vartheta}\right)^{\vartheta}$

$e^{i\vartheta}=\cos(\vartheta)$

$e^{i\vartheta}=\cos\vartheta+i\sin\vartheta$

$\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$
$z\mapsto e^z=e^x\cos(y)$

Quindi: periodica di $e^{i\vartheta}$
$e^{i(\vartheta+2k\pi)}$
$k=0,1,\dots,n-1$

DETERMINARE

$(re^{i\vartheta})^n=r^n e^{in\vartheta}$

Perché?

$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$

$e^{iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}$

$=\underbrace{\sum_{n\text{ pari}}(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{z^n}{n!}}_{\cos(z)}+i\underbrace{\left(\sum_{n\text{ dispari}}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{z^n}{n!}\right)}_{\sin(z)}$

Formula di Eulero: $e^{i\vartheta}+\frac{1}{e^{i\vartheta}}=0$
(perché $e^{i\vartheta}=\cos\vartheta+i\sin\vartheta$)

Quando funziona: condizione di continuità fondamentale: $\forall z\in\mathbb{C}$, $\forall z_1,z_2$, ...

Problema: posiamo trovare logaritmi in $\mathbb{C}$?

Cioè dato $\forall z\in\mathbb{C}$, esistono w numeri complessi w tali che $e^w=z$
(dati z si chiamano "logaritmi di z").

Cioè data $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ trovare la controimmagine di $\forall z\in\mathbb{C}$ cioè $\{w\in\mathbb{C}:e^w=z\}=\exp^{-1}(z)$?

Geometria del piano $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$.

① Distanza: $z_1,z_2\in\mathbb{C}$
$d(z_1,z_2)=|z_2-z_1|=\sqrt{(z_2-z_1)(\overline{z_2-z_1})}$

$d:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$
① indefinita $d(z_1,w)=0\Leftrightarrow z_1=w$
② simmetria $d(z_1,w)=d(w,z_1)$ $\forall z_1,w\in\mathbb{C}$
③ è triangolare $d(z_1,w)\leq d(z_1,v)+d(v,w)$ $\forall z_1,w,v\in\mathbb{C}$.

Proprietà distanza euclidea

Consideriamo la retta passante per z_1 e z_2:
① $d(z_1,z_2)=|z_2-z_1|$
$\vartheta=0$ se $z_2-z_1=0$
② $d(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$
$\vartheta=\pi$ se $z_1-z_2=0$
③ $d(z_1,z_2)=|z_1-v|+d(v,z_2)$
ϑ qualsiasi
viene dalla disuguaglianza!:
$d(z_1,z_2)=|z_1-v|$
$=|z_1-v+v-z_2|$
$\leq|z_1-v|+|v-z_2|$
$=d(z_1,v)+d(v,z_2)$

Strumenti:
distanza tra punti: $d(z,w)=|z-w|$
angolo tra segmenti: $\cos\vartheta(z_1,z_2)=\mathrm{Re}\left(\frac{z_1-z_2}{|z_1-z_2|}\cdot\frac{z_3-z_2}{|z_3-z_2|}\right)$

② Applicazione:

$d(z_1,z_2)^2=|z_1-z_2|^2$
$=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}$
$=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$
$=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})$
$=|z_1-z_2|^2+2\,\mathrm{Re}\left((z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})\right)$
$=|z_1-z_2|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\frac{z_1-z_2}{|z_1-z_2|}\cdot\overline{\frac{z_1-z_2}{|z_1-z_2|}}\cdot|z_1-z_2|^2\right)$
$\cos(\vartheta)=\mathrm{Re}\left(\frac{z_1-z_2}{|z_1-z_2|}\cdot\overline{\frac{z_1-z_2}{|z_1-z_2|}}\right)$
$=|z_1-z_2|^2+2\,\mathrm{Re}\left(\frac{z_1-z_2}{|z_1-z_2|}\cdot\overline{\frac{z_1-z_2}{|z_1-z_2|}}\right)\cdot|z_1-z_2|^2$
$\cos(\vartheta)$
$=d(z_1,z_2)^2-2\,d(z_1,z_2)\,d(z_1,\overline{z_2})\cos(\vartheta)+d(z_1,z_2)^2$
(non dipende da z_1 e z_2)
Se poi $\cos(\vartheta)=0$ ($\vartheta=90$)
è il teorema di PITAGORA.
$\left(\frac{|z_1-z_2|}{|z_1-z_2|}\right)$ $c=d=1$

---

③ $z_1z_2z_3=$

caso banale: $z_1=0$, $z_2,z_3\in\mathbb{R}^2$

$z_2=z_1+re^{i\vartheta}$
$z_3=z_1+se^{i\vartheta}$
$z_2,z_3\in\mathbb{R}^2$
$z_2=z_1+re^{i\vartheta}$
$z_3=z_1+se^{i\vartheta}$
$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{r}{s}$
$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\in\mathbb{R}$
$\cos\vartheta=\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\cdot\overline{\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)}$
$\cos\vartheta=\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\cdot\overline{\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right)}$
$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{r}{s}$ $\Rightarrow\cos\vartheta=1\Leftrightarrow\vartheta=k\pi$

$\cos(z_1z_2z_3)=\cos(\widehat{z_2z_1z_3})=\mathrm{Re}\left(\frac{z_2-z_1}{|z_2-z_1|}\cdot\overline{\left(\frac{z_3-z_1}{|z_3-z_1|}\right)}\right)$
$\cos\vartheta=\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$
$\cos\vartheta=\mathrm{Re}(z_1\overline{z_3})$
$\cos\vartheta=\mathrm{Re}(z_2\overline{z_3})$

Proposizione:
$z_1=re^{i\vartheta}$
$z_2=\frac{r}{s}e^{i\vartheta}=\frac{r}{s}\overline{z_1}$
$\cos\vartheta=\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})$
$\cos\vartheta=\mathrm{Re}(z_1\overline{z_3})$
$e^{i\vartheta}=z_1\overline{z_2}=\frac{z_2-z_1}{|z_2-z_1|}\cdot\frac{z_3-z_1}{|z_3-z_1|}$
$\cos\vartheta=\mathrm{Re}\,e^{i\vartheta}$

④ ⑤ $\overset{\frown}{AB}$ + degli $\overset{\frown}{AB}$ per λ circonferenza C neutro

* è quella alla circonferenza
* inoltre dobbiamo aggiungere il centro!

Abbiamo visto che (formula) $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2$.

Possiamo assegnare alla retta la circonferenza unitaria, con tutti i reali $0\in\mathbb{C}$.
e che $\lambda\in\mathbb{C}$

$\lambda=re^{i\vartheta}$ $\frac{\lambda}{r}=e^{i\vartheta}$

$\lambda\mapsto$ inversione relativa al cerchio?

abbiamo la formula generale:

$\lambda=re^{i\vartheta}$
$e^{i\vartheta}=\frac{\overline{\lambda}}{|\overline{\lambda}|}=\frac{\overline{\lambda}}{|\lambda|}$

$\lambda\mapsto\frac{1}{\overline{\lambda}}$
$\frac{1}{\overline{\lambda}}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\lambda}{|\lambda|}$
$\frac{1}{\overline{\lambda}}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\lambda}{|\lambda|}$

$e^{i\vartheta}=\frac{\lambda}{|\lambda|}$
$\frac{\overline{\lambda}}{|\overline{\lambda}|}=\frac{1}{r}\cdot